经济应用数学基础

郝端旭 吴哲伦 编译

文津出版社

编译者的话

J·M·皮尔逊著《经济应用数学基础》是经济数学方面的重要著作，它包含着一些初等内容，具有取材广泛、深入浅出特点，并配有大量经济应用题。这本书对我国经济类大学低年级学生和电视大学学生、中小型企业管理人员及其他经济工作者很有参考价值，即使懂得数学知识很少的读者仍能阅读此书。

本译文初稿是郝端旭于1990年为电大经济类学员辅导而译，以此为蓝本，由郝端旭修订了序、第二章，吴哲伦、孙凤兰、朱维祥修订了第一、三、四、五各章及全部习题答案，白振敏、郝端旭修订了第六、七两章，赵建功、李树祥参加了全书经济应用部分的修订。

此外，吴哲伦、孙凤兰在河北省唐山市市、县两级中小型企业厂长和管理人员培训班上曾作为教材试用。

在翻译过程中，朱志诚给予了大力支持，张德和为此书描了大部分插图。丰润县第五水泥厂应用本书强化企业管理收到了较好效果，使我们进一步坚定了出版这本译作的信心。在此表示我们深切感激之情。

由于水平有限，不妥之处，恳请读者批评指正。

编译者

1992年1月

序

此书是为经济系学生提供的基础教材，但对于需要接受一定数学训练的社会科学系学生，也是适用的。

经济学家运用数学来分析经济领域的问题，尽管有些经济家意识不到高等数学对他们所谓模糊的经济现实有很大作用，但事实上本书所介绍的数学理论对他们正确地理解、分析经济问题是有很大帮助的。例如：某公司面临这样一个问题："生产规模多大，才能获取最高利润。"这是所有经济学家必须弄清楚的问题。为分析和解决这一最大值的问题，他们采用了不同的计算方法，但只有精通了数学分析才能成功地进行经济分析。这一点，在经济学和社会科学领域中是可以得到证实的。

此书为经济学者和数学水平很低的学生提供了一个学期的课程。因为在以前许多情况下，本书修订的内容都包含于低级数学大纲（集合、图解、方程）。另外，为使学生能拿到经济学学位，本书又增添了其它内容，让学生掌握（微分、积分、优化）。本书还特别适用于没有数学水平和正处于一半数学一半统计学的"数量方法"过程的初等数学水平的学生使用，这些学生应该认识到他们所学的大部分内容都包含于此书中。本书对于没有数学水平且正在进行初级数学学习

的学生起到一个桥梁作用。本书采纳了含有传统式“老数学”课本相同且又与“集合式”“现代数学”课本相接近的内容。采用这种方法有两个原因，首先集合理论在分析经济问题时，作为一项技能运用得越来越多；其次它给所涉及的各种题目提供了一个统一的途径。

除了论述数学理论之外，本书还演示了这些理论在经济问题上的应用。这些内容在以后章节“经济上的应用”一节介绍。

例如：第二章结尾应用一节中，论述了需求与供给，成本、收入和利润率之间函数关系。第六章论述了极大值与极小值的函数关系和最大利润率和边际收入与边际成本之间的函数关系，证实了了解数学理论对理解经济学问题的价值。

而第一章，没有“在经济上的应用”一节，本章着重讲述了“集合”的内容，但并不是说集合在经济上用不到，且恰恰相反，要想介绍集合在经济上的应用，所需的篇幅比此书还要多（关于集合对经济学的作用的内容，有兴趣的读者可参阅V·C·沃尔士的《现代微经济学介绍》一书）。我之所以把此章收入本书，因为正如沃尔士所写：“集合给其它数学技能提供了基础和框架。”又如A·C·chiang所述：“……集合的概念强调了现代数学的每一分枝(A·C·chiang著《经济数学的基本方法》一书)”。正是凭这种信念，用此章的观点作为后面几章讨论数学函数的基础。

为了符合学校的教学新发展，本书开始首先介绍了集合的概念。近十年在学校学过数学的人都熟悉集合，但经济学专业的一些旧数学书都没提及这个课题。许多论文也没提及它，这对“新数学”教育下的学生来说会觉得很奇怪。

集合当作数学课题作纯理论来介绍，这对开始学经济学

的数学系学生很不适应，因为他们不懂经济知识，也就不能用数学技能去处理经济问题。这些学生自然而然就不看“经济上的应用”，这些章节，而是等学了经济知识再看，但许多经济学学生学数学理论很勉强，因为他们看不到数学理论的重要性，所以这些学生更应很好地阅读“在经济上的应用”这些章节，使得他们很快地认识到数学理论的价值。除此之外，已学过一些经济学的学生也应很好地阅读此书。

最后，希望本书能对觉得掌握数学技能有困难的大学生或工学院学生有个帮助。本书收纳了数学的每一个课题，详尽清楚地解释了每一个观点，并以多数学生不吃力的速度向前发展，同时采用了图解和示例，提供了大量的练习，通过解决实际问题来巩固学到的知识。

最后感谢萨尔·福得大学的乔治·兹斯和米彻尔·萨姆纳教授；曼彻斯特大学的琼·斯特瓦特，没有他们的鼓励就没有这本书，没有他们的指点，也就不是一本好书。也感谢M·瓦德夫人，J·M·罗伯特森夫人和B·马斯特夫人为此书打字。最后感谢我的妻子帮助打字、校正、鼓励和安慰。

J·M·皮尔逊

目　　录

第一章 集 合

在本章中，我们为后面几章奠定最基本的数学基础。因篇幅限制，我们将不介绍集合理论在经济方面的应用实例。读者在后面几章的学习中，将会理解本章中的物质价值，而且，对集合理论在经济方面的应用感兴趣的读者还可以参考V·C·沃尔士(Walsh)所写的《现代微经济学介绍》(Introduction to contemporary Microeco-nomics)一书。

1.1 引 言

在日常语言中，我们都熟悉“集合”这个词，在此我们不妨对“集合”做一个正式定义。

定义 集合是同类物质的组合。

例如 一间房子中椅子的集合或超过65岁成年人的集合或在太阳系行星的集合或（我们最喜爱的人集合）蓝眼睛的女学生的集合。通常我们用大写字母A、B、S、Z等表示集合。

表示一个集合有两种方法：列举和描述。

如果我们假设A表示一周的一天集合，可以用列举法记作：

A＝{星期一、星期二、星期三、星期四、星期五、星期六、星期日}

就是把集合的全体成员列成表。

有时使用描述法表示一个集合更为方便，例如：

A＝{a|a是一周的一天}

小写a表示这周的一天，A是全体小写a的集合。

注意：那个"共有参数"，在垂线以后是集合所包含的元素。

例 如果P是太阳系行星集合，我们可以列举写为：

P＝{水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星、冥王星}，或描述为：

P＝{p|p是一个太阳系内的行星}

显然集合元素很多时用第二种方法有利，因为用一一列举的方法是不可能的。

例 集合M＝{m|m是一个生活在大不列颠的男人}描述很容易，不可能列举。

为了方便，给出另一种形式定义和记法。

定义 集合中的一个研究对象叫作集合的一个元素。

如对前面的集合：

M＝{m|m是一个生活在大不列颠男人}，约翰·布朗是M的一个元素，一般记为：

约翰·布朗$\in$M

我们还可以记珍尼·布朗$\notin$M，就是珍尼·布朗不属于M。

在下一步应用集合概念之前，有必要介绍一下叫作"实数系统的集合"。

1.2 实数系统

定义　我们称数字1、2、3、4，等等为正整数（它们也称自然数），数字-1、-2、-3、-4等等类似地，一般称负整数。

由全体正整数和负整数以及零组成的集合称为整数集合。

我们记整数集合为Z，可以写

$$Z=\{z|z\text{是一个整数}\}$$

和　$2\in Z$　　$-150\in Z$　　$0\in Z$

于是我们又有分数集合，例如$\frac{3}{4}$、$\frac{7}{8}$、$-\frac{1}{2}$等等。这样把这些连同整数合起来形成有理数集合，可以用字母Q表示

$$Q=\{q|q\text{是一个有理数}$$

和　$\frac{1}{2}\in Q$、$-\frac{111}{120}\in Q$、$2\in Q$

说明　所谓有理数，它们的构成规律是两个整数的比，数2可看成$\frac{2}{1}$。

那么，同样地也有一些数，例如$\sqrt{2}$和π不能表示成一个数与另一个数比，这些数称为无理数集。实际上无理数也很多，然而在这本书我们大量遇到地常常是有理数集合。

如果我们取全体有理数和无理数构成一个集合就可得到实数集合，用字母R表示实数集。于是有

$$R=\{r|r\text{是一个实数}\}$$

$$1 \in R、-7 \in R、\frac{1}{21} \in R、\sqrt{2} \in R、0 \in R$$

注意：这个集合用描述法提出，不能列举。它常常没有截止，包含着无限大数元素，就等于决无终止。

你也许想集合R就包含了一切可能的数，但事实上还有别的千万个数，在自然界是有的。数学家引进了虚数，它是存在的，我们在求一个负数的平方根时将遇到这个问题，留到第四章讨论。

1.3 集合知识的推广

至此，我们可以提出几个推广定义，扩展上面集合的概念。

定义　两个集合A和B如果它们包含着恰好是相等的元素，A与B是相等的。

这好象有点卖弄学问，然而我们发现用“哲学”概念确定的定义形式是标准的，以后几章将广泛使用。

例　如果A＝{1、2、4}和B＝{2、4、1}则A＝B

说明　这里只看集合元素是哪几个数组成，不考虑顺序。

例　如果A＝{a|a是虹的一种颜色}

B＝{b|b是一种原始颜色}

于是A≠B，因为例中橙色是A而不是B的元素，那么A和B就不是包含恰恰相等的元素。

定义　假定有两个集合X和Y，X称为Y的一个子集。如果X的每一个元素，也是Y的元素，就是如果X包含在Y内，

一般记成$X \subset Y$

例　如果$X=\{1、2、3\}$和$Y=\{1、2、3、4\}$ X是Y的一个子集，就有$X \subset Y$。

例　如果$A=\{a|a$是虹的一种颜色$\}$

$B=\{b|b$是一个原始颜色$\}$

于是B是A的一个子集，即$B \subset A$

例　如果$Z=\{z|z$是一个整数$\}$

$R=\{r|r$是一个实数$\}$

于是Z是R的一个子集，即$Z \subset R$

说明　如果恰好有一个X的元素，它不是Y的一个元素，则X不是Y的子集。事实上很容易证明，在集合X中能找到这样的元素，而它不属于Y。故X不是Y的子集。

例　$X=\{-1、1、2\}$

$Y=\{y|y$是一个正整数。X不是Y的子集。因为$-1 \in X$但$-1 \notin Y$。

说明　集合A是它本身的子集。

例　$Y=\{1、2、3、4\}$

Y是Y的一个子集。它符合我们的定义，即$Y \subset Y$。

为方便起见，这里我们提出一个相当奇怪的集合，就是空集。

定义　空集是这样的集合，它不包含元素，记作$\varnothing$。

空集被认为是任何一个其它集合的子集，就是$\varnothing \subset A$，A为任意集合（如果$\varnothing$不是A的子集，$\varnothing$中必有一个元素不属于A，而$\varnothing$没有元素，故找到一个元素是不可能的）。

说明　在这章我们可以看到，一般说空集将起实数系统零的作用，但是我们不能把空集与$\{0\}$混同，因为$\varnothing$不含元素，而$\{0\}$含有一个0元素。

1.4 集合的运算

已知任意两个数可以合并，它们得到第三个数，这是加法运算，还有减法、乘法和除法。

例如 已知5和8我们可以合并，把它们相加得到第三个数13，就是$5+8=13$。

我们还可用另一个不同的算法——乘法进行运算，得到一个不同的数$5\times8=40$

与前面有同样的想法，立刻可以定义集合的运算。就是用合并两个集合方法得到第三个集。对应上边的两种运算我们将有并集和交集。

定义 已知两个集合A和B，它们的并是一个集合，它包含的元素是A或B。二个集合中所有的元素。

如同5和8加法我们可以记$5+8$。类似地A和B的并记$A\cup B$。

例 如果$A=\{1、2、4、5、6\}$和$B=\{1、3、4、9\}$于是$A\cup B=\{1、2、3、4、5、6、9\}$。

说明 如果一个元素出现在A、B二者之中，在$A\cup B$中只出现一次。

例 如果$M=\{m|m$是生活在大不列颠的一个男人$\}$和$F=\{f|f$是生活在大不列颠的一个女人$\}$，于是$M\cup F=\{p|p$是一个生活在大不列颠的人$\}$。

例 如果A是任意集合，于是$A\cup A=A$。

例 如果A是任意集合，于是$A\cup\varnothing=A$。

第二种集合运算叫交集。

定义 已知两个集合A和B，他们的交集是一个集合，这

个集的元素只包括A和B二者共有的元素。我们记为$A\cap B$，交集包含的元素是二者共同的。

例　如果$A=\{1、2、4、5、6\}$和$B=\{1、3、4、9\}$于是$A\cap B=\{1、4\}$

例　对于任何集合A，$A\cap A=A$

例　对于任何集合A，$A\cap\varnothing=\varnothing$

例　如果M＝{m|m是生活在大不列颠的一个男人}

F＝{f|f是生活在大不列颠的一个女人}

于是$M\cap F=\varnothing$。就是没有一个元素为M和F上的共同元素。

定义　若两个集合A和B不具有共同元素，就是$A\cap B=\varnothing$我们说它们是互不相容或不相交的。

我们自然可以把合并运算推广到多个集合的情况，如同把数5和8合并按加（得13）再加一个数（4）得到17，就是（5＋8）＋4＝17。

数学上利用括号是告诉我们先将5和8合并再加4（我们总是把括号第一先作）。类似的，我们有（5×8）×4＝160（因为5×8＝40如果再4倍得160）这种想法同样可以应用于相应的集合。

例　如果$A=\{1、2、4、5、6\}$和$B=\{1、3、4、9\}$和$C=\{4、7、10\}$于是$A\cup B=\{1、2、3、4、5、6、9\}$和$(A\cup B)\cup C=\{1、2、3、4、5、6、7、9、10\}$

例　$A=\{a、b、c\}$；$B=\{b、e\}$；$C=\{d、e、g\}$于是$A\cap B=\{b\}$；$(A\cap B)\cap C=\varnothing$，因为$A\cap B$和C没有共同元素。

我们可以利用多个数运算的思路，（5＋8）＋4意味着先进行5＋8然后再加4得17。如果我们先8加4再加5，也得17。就是（5＋8）＋4＝17，5＋（8＋4）＝17即（5＋8）＋

$4=5+(8+4)$，即在这里括号有与没有不是实际需要的，恰恰可以写成$5+8+4=17$。类似地$(5\times8)\times4=160$和$5\times(8\times4)=160$这里括号也可不要，写成$5\times8\times4=160$。

如果我们把它们的正确性用到集合上来。发现也是正确的，就是$(A\cup B)\cup C$恰恰与集合$A\cup(B\cup C)$相同(读者可从上边例中看出来）。即我们可以不管括号，写成$A\cup B\cup C$。类似地，$(A\cap B)\cap C$与$A\cap(B\cap C)$相同，我们可以写成$A\cap B\cap C$（$A\cap B\cap C$是这样的集合，它包含三个集合的共同元素）。

我们可以把数的运算推广到集合上。假定我们按加法合并5和8得13，把这个数再按乘法合并4得52的推测就是混合运算，于是有$(8+5)\times4=52$。

这里我们不能对括号执行分配。因为它不同于$8+(5\times4)$就是$5\times4=20$，$20+8=28$ 即数学式是混合运算，必须执行原运算顺序，保留原括号提出的顺序要求。

例 $(4+3)\times2=14$

另一方面$4+(3\times2)=10$

注意 对于$4+3\times2$数学家们约定是：如果表达式包含加和乘运算，首先做乘法。除非有括号指出才不那样。即$4+3\times2$意味着是$4+(3\times2)$就是10。如果我们要让加法首先运算，就要用括号表示出来，写成$(4+3)\times2$。

事实上，数学家们有很多这样的约定。学生在没有充分熟练的技巧时是容易混淆的，如果你遇到的表达式表面是混合运算，可以借助一个充分可靠的顺序公式：B、E、D、M、A、S。即：括号、指数、除法、乘法、加法、减法。这个次序计算式值（指数是乘方，例如3^2或2^4）。看一个例子

$$(2+4)\times 3-\frac{12}{4}+2^2$$

$=6\times 3-\frac{12}{4}+4$ （先括号和乘方）

$=6\times 3-3+4$ （其次除）

$=18-3+4$ （乘）

$=22-3$ （加）

$=19$ （减）

现在我们返回到集合的运算，考虑一个类似的模式。

例　如果$A=\{1、2、3、5\}$，$B=\{1、6\}$，$C=\{1、2、4、6、7\}$，于是$A\cup B=\{1、2、3、5、6\}$和$(A\cup B)\cap C=\{1、2、6\}$。它不同于$A\cup(B\cap C)$，因为$(B\cap C)=\{1、6\}$，因而$A\cup(B\cap C)=\{1、2、3、5、6\}$这里的运算是同一类的全体，不是一个式子。这种运算执行的次序很重要，括号必须保留。

显然$(8+5)\times 4$是不同于$8+(5\times 4)$的，而它与$(8\times 4)+(5\times 4)$相同。因为$(8+5)\times 4=52$和$(8\times 4)+(5\times 4)=32+20=52$。

的确，对于任意三个数ab和c都有$(a+b)\times c=(a\times c)+(b\times c)$。

这是数的性质，也可以推广到集合中。我们可以导出对任意三个集合：

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$$

也可有

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

在这里对这两个性质只陈述不证明。

例　如果$A=\{1、2、3、$