贝塞尔函数

Bessel Functions

● 奚定平

CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

贝塞尔函数

Bessel Functions

奚定平

高等教育出版社　　施普林格出版社

（京）112 号

图书在版编目（CIP）数据

贝塞尔函数/奚定平．－北京：高等教育出版社；
德国：施普林格出版社。1998.5
ISBN 7-04-006774-9
Ⅰ．贝… Ⅱ．奚… Ⅲ．贝塞尔函数 Ⅳ．0174.61

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 10305 号

*

高等教育出版社
施普林格出版社 出版
北京沙滩后街 55 号
邮政编码：100009 传真：64014048 电话：64054588
新华书店总店北京发行所发行
北京外文印刷厂印装

*

开本 880×1230 1/32 印张 7.25 字数 200 000
1998 年 5 月第 1 版 1998 年 5 月第 1 次印刷
定价 19．80 元

序　　言

Bessel 函数是特殊函数中应用最广泛的一种函数，不仅在理论物理研究中，而且在力学、应用数学、大气科学、海洋科学、环境科学等学科以及电工、无线电等工程技术领域中都被广泛的应用。

国内有关特殊函数的专著仅有王竹溪和郭敦仁先生编著的《特殊函数概论》、刘式适和刘式达先生编著的《特殊函数》，这两本书都对 Bessel 函数作了比较深入地讨论。还有一些教材，如梁昆淼先生编著的《数学物理方法》，潘忠诚先生编著的《数学物理方法教程》等也都较详细的介绍了 Bessel 函数。但是在工作中，也常感到需要一本更为广泛和详细的，可供各种专业人士查阅的有关 Bessel 函数的著作，以满足各学科在教学科研中的需要，也为初学入门者提供较全面的资料，这就是本书编著的目的。本书在写作上，力求清晰和有条理，易为读者理解和接受。

考虑到 Bessel 函数的应用极其广泛，因而本书对 Bessel 函数的应用实例均未加以收集，而集中在整理与 Bessel 函数有关的基本资料。读者可根据自己的研究领域和兴趣找到许多 Bessel 函数的应用实例。

本书收集了相当数量的习题，较难的习题作了提示。一方面为读者提供大量的选择习题的余地；另一方面，许多习题也可作为公式查阅或在许多场合引用。

本书还列举了主要参考书目，以供读者参考。其中王竹溪和郭敦仁先生编著的《特殊函数概论》对本书的编写有极大帮助。在附录中，还列出超几何函数，Bessel 函数数值计算的多项式近似等材料，供查阅方便。在英语普及的条件下，采用英文人名更为方便和有利学

术交流。在最后，本书列出英汉人名对照，仅供参考。

本书包括了作者从事教学和科研中与 Bessel 函数有关系的内容。由于内容广泛，加之本人水平有限，难免有错误和不当之处，希望读者给予指正。

奚定平

1998 年 2 月于深圳大学

目 录

第一章　Bessel 函数(柱函数)

§1.1　Bessel 方程

Bessel 函数是下述 Bessel 方程的解：

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(x^2-\nu^2)y=0 \tag{1.1}$$

此方程或写成

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)y+(x^2-\nu^2)y=0 \tag{1.1}$$

其中 ν 是常数，称为方程的阶或 Bessel 函数的阶，可以是任何实数或复数。

Bessel 方程常在解偏微分方程的边值问题时见到。例如，在圆柱坐标下，用分离变量法求解波动方程

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right]=0$$

设 $u(\rho,\varphi,z,t)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，则可得以下一组常微分方程

$$Z''-s^2Z=0 \tag{1.2}$$

$$\Phi''+m^2\Phi=0 \tag{1.3}$$

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+(\alpha^2\rho^2-m^2)R=0 \tag{1.4}$$

其中 s 和 m 是任意常数，并且有 $\alpha^2=k^2+s^2,k^2=\omega^2/c^2$。

若令 $\alpha\rho=x,R=y$，则 (1.4) 式变成 Bessel 函数的标准形式 (1.1)式 。

又例如在球极坐标中解波动方程

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{1}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right.$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\Bigg]=0 \tag{1.5}$$

设 $u(r,\theta,\varphi,t)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}=R(r)S(\theta,\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$,分离变量法将式(1.5)分解成

$$\nabla_1^2 S(\theta,\varphi)+l(l+1)S(\theta,\varphi)=0 \tag{1.6}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0 \tag{1.7}$$

其中

$$\nabla_1^2=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{1.8}$$

和 $l=0,1,2,\cdots;k=\frac{\omega}{c}$。若令 $\xi=kr$,并作变换 $R(r)=\xi^{-\frac{1}{2}}y(\xi)$,则式(1.7)化为 Bessel 函数的标准形式

$$\xi^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\xi^2}+\xi\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}+\left[\xi^2-\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\right]y(\xi)=0 \tag{1.9}$$

这是半奇数阶$\left(l+\frac{1}{2}\right)$的 Bessel 方程。

此外,热传导方程和 Laplace 方程等,在分离变量时也会出现 Bessel 方程。

§1.2 用 Frobenius 法求 Bessel 方程的解

Bessel 方程(1.1)又写成

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0 \tag{1.10}$$

令

$$p(x)=\frac{1}{x},q(x)=1-\frac{\nu^2}{x^2}$$

显然,$x=0$ 是方程(1.10)的正则奇点,$x=\infty$是方程(1.10)的非正则奇点。这是因为

$$x\to 0,xp(x)\to 1,x^2q(x)=x^2-\nu^2\to-\nu^2$$

$$x \to \infty, xp(x) \to 1, x^2 q(x) = x^2 - \nu^2 \to \infty$$

根据线性微分方程的理论,Bessel 方程有两个独立的解,并可表示为

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{\rho+k} \qquad (c_0 \neq 0) \tag{1.11}$$

方程(1.1)可改写成

$$\vartheta^2 y + (x^2 - \nu^2) y = 0 \tag{1.12}$$

其中 $\vartheta = x \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$,注意到 $\vartheta x^m = m x^m$,则有

$$\vartheta^2 y + (x^2 - \nu^2) y = \sum_{k=0}^{\infty} [(\rho + k)^2 - \nu^2] c_k x^{\rho+k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{\rho+k+2} \tag{1.13}$$

(1.13) 式右边第一项可以改写为

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(\rho + k)^2 - \nu^2] c_k x^k = (\rho^2 - \nu^2) c_0 + [(\rho + 1)^2 - \nu^2] c_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} [(\rho + k)^2 - \nu^2] c_k x^k$$

(1.13) 式右边第二项可以改写为

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2} = \sum_{k=2}^{\infty} C_{k-2} x^k$$

于是,要求 (1.13) 式等于零,有:

$$(\rho^2 - \nu^2) c_0 + [(\rho + 1)^2 - \nu^2] c_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} \{[(\rho + k)^2 - \nu^2] c_k + c_{k-2}\} x^k = 0 \tag{1.14}$$

首先,由 x^0 项的系数为零,得

$$(\rho^2 - \nu^2) c_0 = 0$$

要求 $c_0 \neq 0$,则得到指标方程

$$\rho^2 - \nu^2 = 0 \tag{1.15}$$

由此求出指标

$$\rho_1 = \nu, \quad \rho_2 = -\nu$$

其次,依次令含 $x^k(k=1,2,\cdots)$项的系数为零,得

$$[(\rho+1)^2-\nu^2]c_1=0 \tag{1.16}$$

$$[(\rho+k)^2-\nu^2]c_k+c_{k-2}=0 \quad (k=2,3,\cdots)$$

(1.16)式是系数间的递推公式。

下面分别按 $\rho_1=\nu$ 和 $\rho_2=-\nu$ 讨论。

(1)$\rho_1=\nu$ 的情况,由 (1.11) 式得相应的解为

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{\nu+k} \qquad (c_0\neq 0)$$

则(1.16)式变为

$$[(\nu+1)^2-\nu^2]c_1=0$$

$$[(\nu+k)^2-\nu^2]c_k+c_{k-2}=0 \quad (k=2,3,\cdots)$$

或

$$(2\nu+1)c_1=0, \quad k(2\nu+k)c_k+c_{k-2}=0$$

由此求得

$$c_1=0, \quad c_k=-\frac{1}{k(2\nu+k)}c_{k-2} \quad (k=2,3,\cdots)$$

由递推公式得出

$$c_3=c_5=\cdots=c_{2k+1}=0 \quad (k=1,2,\cdots)$$

$$c_2=-\frac{1}{2(2\nu+2)}c_0=-\frac{1}{2^2(\nu+1)}c_0$$

$$c_4=-\frac{1}{4(2\nu+4)}c_2=\left(-\frac{1}{2^2\cdot 2(\nu+2)}\right)\left(-\frac{1}{2^2(\nu+1)}c_0\right)$$

$$=\frac{(-1)^2}{2^4 2!(\nu+2)(\nu+1)}c_0$$

$$c_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{2k}k!(\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+2)(\nu+1)}c_0 \tag{1.17}$$

取

$$c_0=\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)} \tag{1.18}$$

其中 $\Gamma(x)$ 是 Γ 函数(附录Ⅱ),利用 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$,得

$$c_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{\nu+2k}k!\Gamma(\nu+k+1)}\quad(k=0,1,2,\cdots)\tag{1.19}$$

所以,求得 Bessel 方程(1.10)的一个正则解为

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k}x^{\nu+2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$$

它称为 ν 阶的第一类 Bessel 函数,记为 $\mathrm{J}_\nu(x)$,即

$$\mathrm{J}_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}\tag{1.20}$$

(2)$\rho_2=-\nu$ 的情况,用类似的方法求得

$$y_2=\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k}x^{-\nu+2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}\tag{1.21}$$

它是 y_1 中 ν 换为 $-\nu$ 得到的,它也称为 $-\nu$ 阶的第一类 Bessel 函数,记为 $\mathrm{J}_{-\nu}(x)$,即

$$\mathrm{J}_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}\tag{1.22}$$

利用(1.17)式,可以确定级数(1.20)式的收敛半径

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{2k}}{c_{2k-2}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|-\frac{1}{k(2\nu+k)}\right|=0$$

可知,$\mathrm{J}_\nu(x)$ 的收敛半径是 ∞,即当 $|x|<\infty$ 时,$\mathrm{J}_\nu(x)$ 将很快收敛。同样,$\mathrm{J}_{-\nu}(x)$ 的收敛半径也是 ∞。但是,$\mathrm{J}_{-\nu}(x)$ 包含 x 的负幂项,如其第一项为 $\frac{1}{\Gamma(-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}$,只要 ν 是不包含零的正数,它在 $x=0$ 变为无穷大,即 $\mathrm{J}_{-\nu}(x)$ 在 $0<|x|<\infty$ 收敛。

当 $\nu\neq n\,(n=0,1,2,\cdots)$ 时,在 $x\to0$ 时,由(1.20)式和(1.22)式可知,

$$\mathrm{J}_\nu(x)\sim\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\to0\qquad\mathrm{J}_{-\nu}(x)\to\infty$$

因此,$\mathrm{J}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{J}_{-\nu}(x)$ 是线性无关的。

如果 $\nu=0$,则(1.20)式和(1.22)式是相同的;如果 ν 是正整数,

$\nu=n$,则 y_1 与 y_2 线性相关。由(1.22)式,有

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} \\ &\quad + \sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} \end{aligned}$$

当 $k<n$ 时,$\Gamma(-n+k+1)=\infty$。因而,上式右边第一项为零。而第二项中,令 $l=-n+k$,得

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+l}}{(n+l)!\Gamma(l+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2l} \\ &= (-1)^n\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!(n+l)!}\left(\frac{(x)}{2}\right)^{n+2l} \end{aligned} \tag{1.24}$$

与(1.20)式比较知

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \tag{1.25}$$

因此,$J_n(x)$与 $J_{-n}(x)$线性相关。只需讨论 ν 是正整数的情况,$J_n(x)$是 Bessel 方程的一个解,还应找到第二个独立解。

下面分两种情况讨论。

(1)$\nu=0$ 的情况。令(1.13)式中的 $\nu=0,\rho=\nu$,并令其中除 x^ν 项外各项系数都等于零,得到

$$c_1 = c_3 = c_5 = c_7 = \cdots = 0$$

和

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k c_0}{(\nu+2)^2(\nu+4)^2\cdots(\nu+2k)^2} \quad (k=1,2,3,\cdots)$$

代入(1.11)式,有

$$\begin{aligned} y = c_0 x^\nu\Big[1 &- \frac{x^2}{(\nu+2)^2} + \frac{x^4}{(\nu+2)^2(\nu+4)^2} \\ &- \frac{x^6}{(\nu+2)^2(\nu+4)^2(\nu+6)^2} + \cdots\Big] \end{aligned} \tag{1.26}$$

而(1.26)式满足的方程则成为:

$$\vartheta^2 y + x^2 y = c_0 \nu^2 x^\nu \tag{1.27}$$

将(1.27)式对 ν 求导数,则有:

$$\vartheta^2\left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right) + x^2\left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right) = c_0(2\nu + \nu^2 \ln x)x^\nu$$

则$\dfrac{\partial y}{\partial \nu}$是方程

$$\vartheta^2 y + x^2 y = c_0 \nu x^\nu (2 + \nu \ln x) \tag{1.28}$$

的解。如果令 (1.27) 式和 (1.28) 式中的 $\nu = 0$,则两式均为零阶 Bessel 方程(1.29)式

$$\vartheta^2 y + x^2 y = 0 \tag{1.29}$$

的一个解。第一个解可由(1.26)式求得:

$$y_1 = (y)_{\nu=0} = c_0\left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots\right) \tag{1.30}$$

其中,c_0 可令为等于 1($c_0 = 1$)。而方程(1.29)的第二个独立解为:

$$y_2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)_{\nu=0^+} \tag{1.31}$$

当 $\nu \geqslant 0$ 时,则 (1.26) 式各项可以对 ν 求导数,并且是绝对收敛的。结果是

$$y_2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)_{\nu=0^+} = c_0 y_1 \ln x + c_0\left\{\frac{x^2}{2^2}\frac{1}{1} - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \frac{(-1)^{k-1} x^{2k}}{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2k)^2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right) + \cdots\right\}$$

为了和后面定义方法得到的解相一致,将上式中加上一项,$c_0 y_1(\gamma - \ln 2)$,并令 $c_0 = \dfrac{2}{\pi}$,其中 γ 是 Euler 常数,最后得到第二个独立的解为

$$y_2 = \frac{2}{\pi} y_1\left(\ln\frac{1}{2} + \gamma\right)$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \tag{1.32}$$

(2)ν 等于非零正整数情况，$\nu=n(n=1,2,\cdots)$。同样，在(1.13)式中，令，$\nu=n,\rho=\nu$ 和 $c_0=c(\nu+n)$，并令(1.13)式中除含 x^ν 项的各项系数等于零，得

$$y=c(\nu+n)x^\nu$$
$$\times\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(\nu-n+2)(\nu-n+4)\cdots(\nu-n+2k)(\nu+n+2)\cdots(\nu+n+2k)}\right\}$$

上式再改写为

$$y=c(\nu+n)x^\nu$$
$$\times\left\{1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(\nu-n+2)(\nu-n+4)\cdots(\nu-n+2k)(\nu+n+2)\cdots(\nu+n+2k)}\right\}$$
$$+c\frac{(-1)^n x^{\nu+2n}}{(\nu-n+2)(\nu-n+4)\cdots(\nu+n-2)(\nu+n+2)(\nu+n+4)\cdots(\nu+3n)}$$
$$\times\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(\nu+n+2)\cdots(\nu+n+2k)(\nu+3n+2)\cdots(\nu+3n+2k)}\right\} \tag{1.33}$$

(1.33)式满足的 Bessel 方程(1.13)式成为

$$\vartheta^2 y+(x^2-n^2)y=c(\nu+n)(\nu^2-n^2)x^\nu \tag{1.34}$$

(1.34)式再对 ν 求导数，有

$$\vartheta^2\left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)+(x^2-n^2)\frac{\partial y}{\partial \nu}=c(\nu+n)\{3\nu-n+(\nu^2-n^2)\ln x\}x^\nu \tag{1.35}$$

同时令等式(1.34)和(1.35)式中 $\nu=-n$，则两式都成为 Bessel 方程。和 $\nu=0$ 情况一样，$y|_{\nu=-n}$和$\left.\frac{\partial y}{\partial \nu}\right|_{\nu=-n}$是 Bessel 方程的两个独立解。

$$y_1=(y)_{\nu=-n}=c\frac{(-1)^n x^n}{(-2n+2)(-2n+4)\cdots(-2)\cdot 2\cdot 4\cdots(2n)}$$
$$\times\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{2\cdot 4\cdots(2k)(2n+2k)(2n+4)\cdots(2n+2k)}\right\} \tag{1.36}$$

令 $c=(-2n+2)(-2n+4)\cdots(-2)$，则 y_1 和(1.24)式相同。

Bessel 方程的另一个解则为：

$$y_2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)_{\nu=-n}$$

具体的计算:由(1.33)式先计算$\frac{\partial y}{\partial \nu}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial \nu} &= y\ln x + c(\nu+n)x^{\nu} \\
&\times \frac{\partial}{\partial \nu}\left\{1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k}}{\nu-n+2)\cdots(\nu-n+2k)(\nu+n+2)\cdots(\nu+n+2k)}\right\} \\
&+ cx^{\nu}\left\{1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(\nu-n+2)\cdots(\nu-n+2k)(\nu+n+2)\cdots(\nu+n+2k)}\right\} \\
&+ c\frac{(-1)^n x^{\nu+2n}}{(\nu-n+2)\cdots(\nu+n-2)(\nu+n+2)\cdots(\nu+3n)} \\
&\quad \times \left[\sum_{p=1}^{n-1} \frac{-1}{\nu-n+2p} + \sum_{p=1}^{n} \frac{-1}{\nu+n+2p}\right. \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(\nu+n+2)\cdots(\nu+n+2k)(\nu+3n+2)\cdots(\nu+3n+2k)} \\
&\quad \times \left\{\sum_{p=1}^{n-1} \frac{-1}{\nu-n+2p} + \sum_{p=1}^{n} \frac{-1}{\nu+n+2p}\right. \\
&+ \left.\left.\sum_{p=1}^{k} \frac{-1}{\nu+n+2p} + \sum_{p=1}^{k} \frac{-1}{\nu+3n+2p}\right\}\right]
\end{aligned}$$

再令 $\nu=-n$,上式第二项等于零,第四项中花括号内有

$$\sum_{p=1}^{n-1} \frac{-1}{-2n+2p} + \sum_{p=1}^{n} \frac{-1}{2p} = -\frac{1}{2n}$$

最后有

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1 \ln x \\
&+ cx^{-n}\left\{1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^{2k}}{2\cdot 4\cdots(2k)(2n-2)(2n-4)\cdots(2n-2k)}\right\} \\
&+ \frac{c}{2}\frac{x^n}{2\cdot 4\cdots(2n)\cdot 2\cdot 4\cdots(2n-2)} \\
&\quad \times \left[\frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2\cdot 4\cdots(2k)(2n+2)(2n+4)\cdots(2n+2k)}\right.
\end{aligned}$$