

贝塞尔函数

Bessel Functions

● 奚定平



CHEP

高等教育出版社



Springer

施普林格出版社

贝塞尔函数

Bessel Functions

奚定平

高等教育出版社 施普林格出版社

(京) 112 号

图书在版编目 (CIP) 数据

贝塞尔函数/奚定平. —北京: 高等教育出版社;
德国: 施普林格出版社. 1998.5

ISBN 7-04-006774-9

I. 贝… II. 奚… III. 贝塞尔函数 IV. 0174.61

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第 10305 号

*

高等教育出版社 出版
施普林格出版社

北京沙滩后街 55 号

邮政编码: 100009 传真: 64014048 电话: 64054588

新华书店总店北京发行所发行

北京外文印刷厂印装

*

开本 880×1230 1/32 印张 7.25 字数 200 000

1998 年 5 月第 1 版 1998 年 5 月第 1 次印刷

定价 19.80 元

© China Higher Education Press Beijing and
Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1998

版权所有, 不得翻印

序 言

Bessel 函数是特殊函数中应用最广泛的一种函数，不仅在理论物理研究中，而且在力学、应用数学、大气科学、海洋科学、环境科学等学科以及电工、无线电等工程技术领域中都被广泛的应用。

国内有关特殊函数的专著仅有王竹溪和郭敦仁先生编著的《特殊函数概论》、刘式适和刘式达先生编著的《特殊函数》，这两本书都对 Bessel 函数作了比较深入地讨论。还有一些教材，如梁昆森先生编著的《数学物理方法》，潘忠诚先生编著的《数学物理方法教程》等也都较详细的介绍了 Bessel 函数。但是在工作中，也常感到需要一本更为广泛和详细的，可供各种专业人士查阅的有关 Bessel 函数的著作，以满足各学科在教学科研中的需要，也为初学入门者提供较全面的资料，这就是本书编著的目的。本书在写作上，力求清晰和有条理，易为读者理解和接受。

考虑到 Bessel 函数的应用极其广泛，因而本书对 Bessel 函数的应用实例均未加以收集，而集中在整理与 Bessel 函数有关的基本资料。读者可根据自己的研究领域和兴趣找到许多 Bessel 函数的应用实例。

本书收集了相当数量的习题，较难的习题作了提示。一方面为读者提供大量的选择习题的余地；另一方面，许多习题也可作为公式查阅或在许多场合引用。

本书还列举了主要参考书目，以供读者参考。其中王竹溪和郭敦仁先生编著的《特殊函数概论》对本书的编写有极大帮助。在附录中，还列出超几何函数，Bessel 函数数值计算的多项式近似等材料，供查阅方便。在英语普及的条件下，采用英文人名更为方便和有利学

2A45/67

术交流。在最后，本书列出英汉人名对照，仅供参考。

本书包括了作者从事教学和科研中与 Bessel 函数有关系的内容。由于内容广泛，加之本人水平有限，难免有错误和不当之处，希望读者给予指正。

奚定平

1998 年 2 月于深圳大学

目 录

第一章 Bessel 函数(柱函数)	(1)
§ 1.1 Bessel 方程	(1)
§ 1.2 用 Frobenius 法求 Bessel 方程的解	(2)
§ 1.3 Bessel 函数的定义	(10)
§ 1.4 Bessel 函数的递推公式	(14)
§ 1.5 Bessel 函数的其它性质	(15)
§ 1.6 半奇数阶 Bessel 函数	(20)
习题 1	(25)
第二章 其它形式的 Bessel 函数	(29)
§ 2.1 变形 Bessel 函数	(29)
§ 2.2 变形 Bessel 函数的其它性质	(33)
§ 2.3 球 Bessel 函数	(34)
§ 2.4 球 Bessel 函数的其它性质	(37)
§ 2.5 可转化为 Bessel 方程的方程	(38)
§ 2.6 Airy 方程	(39)
§ 2.7 Kelvin(Thomson)方程	(40)
§ 2.8 Riccati-Bessel 方程	(42)
§ 2.9 Wronski 公式	(43)
§ 2.10 Bessel 函数大正数阶一致性展开	(45)
习题 2	(53)
第三章 整数阶 Bessel 函数	(62)

§ 3.1	Bessel 函数的母函数	(62)
§ 3.2	x^n 用 Bessel 函数展开	(66)
§ 3.3	$\sum_{p=0}^{\infty} a_p x^{n+p}$ 用 Bessel 函数展开	(68)
§ 3.4	加法公式	(71)
§ 3.5	广义加法公式	(73)
§ 3.6	Neumann 多项式和 Neumann 展开	(78)
§ 3.7	Schlömilch 展开	(82)
习题 3		(86)
第四章	Bessel 函数的积分表示	(93)
§ 4.1	Bessel 函数的积分表示	(93)
§ 4.2	Bessel 函数的围道积分表示	(96)
§ 4.3	$J_\nu(x)$ 和 $I_\nu(x)$ 的积分表示	(98)
§ 4.4	$J_{-\nu}(z)$ 和 $I_{-\nu}(z)$ 的积分表示	(101)
§ 4.5	$K_\nu(z)$ 的积分表示	(105)
§ 4.6	$F_\nu(z) = z^{-\nu/2} J_\nu(2\sqrt{z})$	(108)
§ 4.7	$H_\nu^{(1)}(z)$ 和 $H_\nu^{(2)}(z)$ 的积分表示	(111)
§ 4.8	$ z \rightarrow \infty$ 时 Bessel 函数的渐近展开	(115)
§ 4.9	Sommerfeld 积分表示	(122)
§ 4.10	Graf 加法公式	(123)
§ 4.11	Gegenbauer 加法公式	(124)
习题 4		(132)
第五章	含 Bessel 函数的积分	(144)
§ 5.1	含 Bessel 函数的 Lommel 积分公式	(144)
§ 5.2	有限积分公式	(146)
§ 5.3	无穷积分—Hankel 积分公式	(149)
§ 5.4	$\int_0^\infty t^{\mu-1} J_\nu(bt) dt$ 积分	(152)

§ 5.5 Struve 和 Schafheitlin 积分公式	(154)
§ 5.6 Weber 积分公式	(161)
§ 5.7 Sonine-Gegenbauer 积分公式	(165)
习题 5	(167)
第六章 Fourier-Bessel 展开	(181)
§ 6.1 Bessel 函数的零点定理	(181)
§ 6.2 Stokes 方法计算 $J_\nu(x)$ 的零点	(184)
§ 6.3 Fourier-Bessel 展开	(187)
§ 6.4 Fourier-Bessel 展开完备性证明	(188)
§ 6.5 Fourier-Bessel 积分	(191)
习题 6	(195)
第七章 Bessel 函数与合流超几何函数的关系	(198)
§ 7.1 Bessel 函数与合流超几何函数的关系	(198)
§ 7.2 变形 Bessel 函数与合流超几何函数的关系	(201)
§ 7.3 Bessel 函数和连带 Legendre 函数的关系	(202)
附 录	(204)
附录 I 复变函数	(204)
附录 II Γ 函数 (第二类 Euler 积分)	(205)
附录 III B 函数 (第一类 Euler 积分)	(208)
附录 IV 超几何多项式	(210)
附录 V 超几何函数 $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$	(213)
附录 VI 合流超几何函数 (Kummer 函数)	(215)
附录 VII Bessel 函数的多项式近似	(217)
参考文献	(221)
英汉人名对照	(222)

第一章 Bessel 函数(柱函数)

§ 1.1 Bessel 方程

Bessel 函数是下述 Bessel 方程的解:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (1.1)$$

此方程或写成

$$x \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} \right) y + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (1.1)$$

其中 ν 是常数,称为方程的阶或 Bessel 函数的阶,可以是任何实数或复数。

Bessel 方程常在解偏微分方程的边值问题时见到。例如,在圆柱坐标下,用分离变量法求解波动方程

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = 0$$

设 $u(\rho, \varphi, z, t) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)e^{i\alpha t}$, 则可得以下一组常微分方程

$$Z'' - s^2 Z = 0 \quad (1.2)$$

$$\Phi'' + m^2 \Phi = 0 \quad (1.3)$$

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + (\alpha^2 \rho^2 - m^2)R = 0 \quad (1.4)$$

其中 s 和 m 是任意常数,并且有 $\alpha^2 = k^2 + s^2, k^2 = \omega^2/c^2$ 。

若令 $\alpha\rho = x, R = y$, 则 (1.4) 式变成 Bessel 函数的标准形式 (1.1) 式。

又例如在球极坐标中解波动方程

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right]$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \Big] = 0 \quad (1.5)$$

设 $u(r, \theta, \varphi, t) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)e^{i\omega t} = R(r)S(\theta, \varphi)e^{i\omega t}$, 分离变量法将式(1.5)分解成

$$\nabla_1^2 S(\theta, \varphi) + l(l+1)S(\theta, \varphi) = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0 \quad (1.7)$$

其中

$$\nabla_1^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (1.8)$$

和 $l=0, 1, 2, \dots; k = \frac{\omega}{c}$ 。若令 $\xi = kr$, 并作变换 $R(r) = \xi^{-\frac{1}{2}} y(\xi)$, 则式(1.7)化为 Bessel 函数的标准形式

$$\xi^2 \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \xi \frac{dy}{d\xi} + \left[\xi^2 - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right] y(\xi) = 0 \quad (1.9)$$

这是半奇数阶 $\left(l + \frac{1}{2} \right)$ 的 Bessel 方程。

此外, 热传导方程和 Laplace 方程等, 在分离变量时也会出现 Bessel 方程。

§ 1.2 用 Frobenius 法求 Bessel 方程的解

Bessel 方程(1.1)又写成

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0 \quad (1.10)$$

令

$$p(x) = \frac{1}{x}, q(x) = 1 - \frac{\nu^2}{x^2}$$

显然, $x=0$ 是方程(1.10)的正则奇点, $x=\infty$ 是方程(1.10)的非正则奇点。这是因为

$$x \rightarrow 0, xp(x) \rightarrow 1, x^2 q(x) = x^2 - \nu^2 \rightarrow -\nu^2$$

$$x \rightarrow \infty, xp(x) \rightarrow 1, x^2 q(x) = x^2 - \nu^2 \rightarrow \infty$$

根据线性微分方程的理论, Bessel 方程有两个独立的解, 并可表示为

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{\rho+k} \quad (c_0 \neq 0) \quad (1.11)$$

方程(1.1)可改写成

$$\vartheta^2 y + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (1.12)$$

其中 $\vartheta = x \frac{d}{dx}$, 注意到 $\vartheta x^m = mx^m$, 则有

$$\vartheta^2 y + (x^2 - \nu^2)y = \sum_{k=0}^{\infty} [(\rho+k)^2 - \nu^2] c_k x^{\rho+k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{\rho+k+2} \quad (1.13)$$

(1.13) 式右边第一项可以改写为

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} [(\rho+k)^2 - \nu^2] c_k x^k &= (\rho^2 - \nu^2)c_0 + [(\rho+1)^2 - \nu^2]c_1 x \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} [(\rho+k)^2 - \nu^2] c_k x^k \end{aligned}$$

(1.13) 式右边第二项可以改写为

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2} = \sum_{k=2}^{\infty} C_{k-2} x^k$$

于是, 要求 (1.13) 式等于零, 有:

$$\begin{aligned} &(\rho^2 - \nu^2)c_0 + [(\rho+1)^2 - \nu^2]c_1 x \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} \{[(\rho+k)^2 - \nu^2]c_k + c_{k-2}\} x^k = 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

首先, 由 x^0 项的系数为零, 得

$$(\rho^2 - \nu^2)c_0 = 0$$

要求 $c_0 \neq 0$, 则得到指标方程

$$\rho^2 - \nu^2 = 0 \quad (1.15)$$

由此求出指标

$$\rho_1 = \nu, \quad \rho_2 = -\nu$$

其次,依次令含 $x^k (k=1,2,\cdots)$ 项的系数为零,得

$$[(\rho+1)^2 - \nu^2]c_1 = 0 \quad (1.16)$$

$$[(\rho+k)^2 - \nu^2]c_k + c_{k-2} = 0 \quad (k=2,3,\cdots)$$

(1.16)式是系数间的递推公式。

下面分别按 $\rho_1 = \nu$ 和 $\rho_2 = -\nu$ 讨论。

(1) $\rho_1 = \nu$ 的情况,由 (1.11) 式得相应的解为

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{\nu+k} \quad (c_0 \neq 0)$$

则(1.16)式变为

$$[(\nu+1)^2 - \nu^2]c_1 = 0$$

$$[(\nu+k)^2 - \nu^2]c_k + c_{k-2} = 0 \quad (k=2,3,\cdots)$$

或

$$(2\nu+1)c_1 = 0, \quad k(2\nu+k)c_k + c_{k-2} = 0$$

由此求得

$$c_1 = 0, \quad c_k = -\frac{1}{k(2\nu+k)}c_{k-2} \quad (k=2,3,\cdots)$$

由递推公式得出

$$c_3 = c_5 = \cdots = c_{2k+1} = 0 \quad (k=1,2,\cdots)$$

$$c_2 = -\frac{1}{2(2\nu+2)}c_0 = -\frac{1}{2^2(\nu+1)}c_0$$

$$c_4 = -\frac{1}{4(2\nu+4)}c_2 = \left(-\frac{1}{2^2 \cdot 2(\nu+2)}\right)\left(-\frac{1}{2^2(\nu+1)}c_0\right)$$

$$= \frac{(-1)^2}{2^4 2!(\nu+2)(\nu+1)}c_0$$

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! (\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+2)(\nu+1)}c_0 \quad (1.17)$$

取

$$c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \quad (1.18)$$

其中 $\Gamma(x)$ 是 Γ 函数(附录 II), 利用 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, 得

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{\nu+2k} k! \Gamma(\nu+k+1)} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (1.19)$$

所以, 求得 Bessel 方程(1.10)的一个正则解为

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} x^{\nu+2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$$

它称为 ν 阶的第一类 Bessel 函数, 记为 $J_\nu(x)$, 即

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \quad (1.20)$$

(2) $\rho_2 = -\nu$ 的情况, 用类似的方法求得

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} x^{-\nu+2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k} \quad (1.21)$$

它是 y_1 中 ν 换为 $-\nu$ 得到的, 它也称为 $-\nu$ 阶的第一类 Bessel 函数, 记为 $J_{-\nu}(x)$, 即

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k} \quad (1.22)$$

利用(1.17)式, 可以确定级数(1.20)式的收敛半径

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{2k}}{c_{2k-2}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| -\frac{1}{k(2\nu+k)} \right| = 0$$

可知, $J_\nu(x)$ 的收敛半径是 ∞ , 即当 $|x| < \infty$ 时, $J_\nu(x)$ 将很快收敛。同样, $J_{-\nu}(x)$ 的收敛半径也是 ∞ 。但是, $J_{-\nu}(x)$ 包含 x 的负幂项, 如其第一项为 $\frac{1}{\Gamma(-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}$, 只要 ν 是不包含零的正数, 它在 $x=0$ 变为无穷大, 即 $J_{-\nu}(x)$ 在 $0 < |x| < \infty$ 收敛。

当 $\nu \neq n$ ($n=0, 1, 2, \dots$) 时, 在 $x \rightarrow 0$ 时, 由(1.20)式和(1.22)式可知,

$$J_\nu(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \rightarrow 0 \quad J_{-\nu}(x) \rightarrow \infty$$

因此, $J_\nu(x)$ 和 $J_{-\nu}(x)$ 是线性无关的。

如果 $\nu=0$, 则(1.20)式和(1.22)式是相同的; 如果 ν 是正整数,

$\nu = n$, 则 y_1 与 y_2 线性相关。由(1.22)式, 有

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} \\ &\quad + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} \end{aligned}$$

当 $k < n$ 时, $\Gamma(-n+k+1) = \infty$ 。因而, 上式右边第一项为零。而第二项中, 令 $l = -n+k$, 得

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+l}}{(n+l)! \Gamma(l+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2l} \\ &= (-1)^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l! (n+l)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2l} \end{aligned} \quad (1.24)$$

与(1.20)式比较知

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (1.25)$$

因此, $J_n(x)$ 与 $J_{-n}(x)$ 线性相关。只需讨论 ν 是正整数的情况, $J_n(x)$ 是 Bessel 方程的一个解, 还应找到第二个独立解。

下面分两种情况讨论。

(1) $\nu=0$ 的情况。令(1.13)式中的 $\nu=0, \rho=\nu$, 并令其中除 x^ν 项外各项系数都等于零, 得到

$$c_1 = c_3 = c_5 = c_7 = \cdots = 0$$

和

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k c_0}{(\nu+2)^2(\nu+4)^2 \cdots (\nu+2k)^2} \quad (k=1, 2, 3, \cdots)$$

代入(1.11)式, 有

$$\begin{aligned} y &= c_0 x^\nu \left[1 - \frac{x^2}{(\nu+2)^2} + \frac{x^4}{(\nu+2)^2(\nu+4)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{x^6}{(\nu+2)^2(\nu+4)^2(\nu+6)^2} + \cdots \right] \end{aligned} \quad (1.26)$$

而(1.26)式满足的方程则成为:

$$\vartheta^2 y + x^2 y = c_0 \nu^2 x^\nu \quad (1.27)$$

将(1.27)式对 ν 求导数,则有:

$$\vartheta^2 \left(\frac{\partial y}{\partial \nu} \right) + x^2 \left(\frac{\partial y}{\partial \nu} \right) = c_0 (2\nu + \nu^2 \ln x) x^\nu$$

则 $\frac{\partial y}{\partial \nu}$ 是方程

$$\vartheta^2 y + x^2 y = c_0 \nu x^\nu (2 + \nu \ln x) \quad (1.28)$$

的解。如果令 (1.27) 式和 (1.28) 式中的 $\nu = 0$, 则两式均为零阶 Bessel 方程(1.29)式

$$\vartheta^2 y + x^2 y = 0 \quad (1.29)$$

的一个解。第一个解可由(1.26)式求得:

$$y_1 = (y)_{\nu=0} = c_0 \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots \right) \quad (1.30)$$

其中, c_0 可令为等于 1 ($c_0 = 1$)。而方程(1.29)的第二个独立解为:

$$y_2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \nu} \right)_{\nu=0^+} \quad (1.31)$$

当 $\nu \geq 0$ 时, 则 (1.26) 式各项可以对 ν 求导数, 并且是绝对收敛的。结果是

$$\begin{aligned} y_2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \nu} \right)_{\nu=0^+} &= c_0 y_1 \ln x + c_0 \left\{ \frac{x^2}{2^2} \frac{1}{1} - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{(-1)^{k-1} x^{2k}}{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2k)^2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} \right) + \cdots \right\} \end{aligned}$$

为了和后面定义方法得到的解相一致, 将上式中加上一项, $c_0 y_1 (\gamma - \ln 2)$, 并令 $c_0 = \frac{2}{\pi}$, 其中 γ 是 Euler 常数, 最后得到第二个独立的解为

$$y_2 = \frac{2}{\pi} y_1 \left(\ln \frac{1}{2} + \gamma \right)$$

$$- \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} \right) \left(\frac{x}{2} \right)^{2k} \quad (1.32)$$

(2) ν 等于非零正整数情况, $\nu = n$ ($n = 1, 2, \cdots$)。同样, 在(1.13)式中, 令, $\nu = n$, $\rho = \nu$ 和 $c_0 = c(\nu + n)$, 并令(1.13)式中除含 x^ν 项的各项系数等于零, 得

$$y = c(\nu + n)x^\nu$$

$$\times \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(\nu - n + 2)(\nu - n + 4) \cdots (\nu - n + 2k)(\nu + n + 2) \cdots (\nu + n + 2k)} \right\}$$

上式再改写为

$$y = c(\nu + n)x^\nu$$

$$\times \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(\nu - n + 2)(\nu - n + 4) \cdots (\nu - n + 2k)(\nu + n + 2) \cdots (\nu + n + 2k)} \right\}$$

$$+ c \frac{(-1)^n x^{\nu+2n}}{(\nu - n + 2)(\nu - n + 4) \cdots (\nu + n - 2)(\nu + n + 2)(\nu + n + 4) \cdots (\nu + 3n)}$$

$$\times \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(\nu + n + 2) \cdots (\nu + n + 2k)(\nu + 3n + 2) \cdots (\nu + 3n + 2k)} \right\} \quad (1.33)$$

(1.33)式满足的 Bessel 方程(1.13)式成为

$$x^2 y + (x^2 - n^2)y = c(\nu + n)(\nu^2 - n^2)x^\nu \quad (1.34)$$

(1.34)式再对 ν 求导数, 有

$$x^2 \left(\frac{\partial y}{\partial \nu} \right) + (x^2 - n^2) \frac{\partial y}{\partial \nu} = c(\nu + n) \{ 3\nu - n + (\nu^2 - n^2) \ln x \} x^\nu \quad (1.35)$$

同时令等式(1.34)和(1.35)式中 $\nu = -n$, 则两式都成为 Bessel 方程。

和 $\nu = 0$ 情况一样, $y|_{\nu=-n}$ 和 $\frac{\partial y}{\partial \nu} \Big|_{\nu=-n}$ 是 Bessel 方程的两个独立解。

$$y_1 = (y)_{\nu=-n} = c \frac{(-1)^n x^n}{(-2n+2)(-2n+4) \cdots (-2) \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2n)} \\ \times \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2 \cdot 4 \cdots (2k)(2n+2k)(2n+4) \cdots (2n+2k)} \right\} \quad (1.36)$$

令 $c = (-2n+2)(-2n+4) \cdots (-2)$, 则 y_1 和(1.24)式相同。

Bessel 方程的另一个解则为:

$$y_2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \nu} \right)_{\nu = -n}$$

具体的计算:由(1.33)式先计算 $\frac{\partial y}{\partial \nu}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \nu} &= y \ln x + c(\nu + n)x^\nu \\ &\times \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(\nu - n + 2) \cdots (\nu - n + 2k)(\nu + n + 2) \cdots (\nu + n + 2k)} \right\} \\ &+ cx^\nu \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(\nu - n + 2) \cdots (\nu - n + 2k)(\nu + n + 2) \cdots (\nu + n + 2k)} \right\} \\ &+ c \frac{(-1)^n x^{\nu+2n}}{(\nu - n + 2) \cdots (\nu + n - 2)(\nu + n + 2) \cdots (\nu + 3n)} \\ &\times \left[\sum_{p=1}^{n-1} \frac{-1}{\nu - n + 2p} + \sum_{p=1}^n \frac{-1}{\nu + n + 2p} \right. \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(\nu + n + 2) \cdots (\nu + n + 2k)(\nu + 3n + 2) \cdots (\nu + 3n + 2k)} \\ &\times \left\{ \sum_{p=1}^{n-1} \frac{-1}{\nu - n + 2p} + \sum_{p=1}^n \frac{-1}{\nu + n + 2p} \right. \\ &\left. \left. + \sum_{p=1}^k \frac{-1}{\nu + n + 2p} + \sum_{p=1}^k \frac{-1}{\nu + 3n + 2p} \right\} \right] \end{aligned}$$

再令 $\nu = -n$, 上式第二项等于零, 第四项中花括号内有

$$\sum_{p=1}^{n-1} \frac{-1}{-2n + 2p} + \sum_{p=1}^n \frac{-1}{2p} = -\frac{1}{2n}$$

最后有

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \ln x \\ &+ cx^{-n} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^{2k}}{2 \cdot 4 \cdots (2k)(2n - 2)(2n - 4) \cdots (2n - 2k)} \right\} \\ &+ \frac{c}{2} \frac{x^n}{2 \cdot 4 \cdots (2n) \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2n - 2)} \\ &\times \left[\frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2 \cdot 4 \cdots (2k)(2n + 2)(2n + 4) \cdots (2n + 2k)} \right] \end{aligned}$$