章潜五　编

随机信号分析

西北电讯工程学院出版社

内 容 简 介

本书讨论随机信号的基本概念和随机信号的分析计算方法。全书共五章，分别介绍随机过程的基本知识、随机过程的线性变换、窄带随机过程、随机过程的非线性变换、信号检测的基本原理。

本书用作高等院校工科电子类专业的专业基础课（“随机信号分析”或“统计无线电技术”）教材。亦可供其它有关专业的大专院校师生和科技人员自学参考。

随机信号分析

章潜五 编

西北电讯工程学院出版社出版

西北电讯工程学院印刷厂印刷

陕西省新华书店发行 各地新华书店經售

开本 787×1092 1/16 印张 17 10/16 字数 430 千字

1986年1月第一版 1986年1月第一次印刷 印数 1-5,000

统一书号：15322·32 定价：3.50 元

前　言

随着雷达、通信、自动控制等无线电技术的不断发展，信号检测、参量估值、最优化、自适应等理论的应用日渐广泛。作为电子工程、无线电技术等专业的工科院校学生，不仅应该熟悉确知信号，还应熟悉随机信号(随机过程)。“随机信号分析”(或称“统计无线电技术”)就是为此而设的一门专业基础课，主要介绍随机信号的分析和变换，为学习“统计信号处理”(即“信号检测”、“参量估值”）等后续课程奠定坚实的基础。在学习本课之前，应该熟悉“高等数学”、“概率论”、“线性代数”、“信号与系统”(“线性系统分析”、“信号与网络”)等有关课程。

本书共五章。第一章介绍随机过程的基本知识，第二章介绍随机过程的线性变换，第三章介绍窄带随机过程，第四章介绍随机过程的非线性变换，第五章介绍信号检测的基本原理。本书的选材适当宽于教学大纲要求，超大纲要求的章节，在标题上用符号“*”注明，供学习时参考。学完本书的主要内容，约需60学时。

为了方便读者学习，本书在内容编排上力求由浅入深，加强物理概念说明。书中列有较多的例题和习题，以便通过作业进一步加深理解。本书的内容理论性较强，但本课并非数学课程，故在数学推导方面，力求准确，而不过分强求数学上的严密。为使理论联系实际，在编写中注意了理论分析与工程实际相结合，注重于工程实用的分析计算方法，并介绍了有关随机信号的测量问题。

书末附有定积分、级数等一些公式，以便学习时查找运用。鉴于“概率论”是本课的主要先修基础课，因而书末附有一些概率论习题，供作复习该课的检验。为了有助于读者阅读本书的英文参考文献，书末还附有英汉术语对照。

本书系经四届、多个班级教学之后编写而成。编写时吸取了兄弟院校教材的经验，并经教研室多次讨论后定稿。任课教师吕胜尚、范启岭、司鑫才、刘应南同志提出了宝贵意见，保铮、戴树荪、梁传甲同志详细审阅了全书。初稿本经过了教学试用，并征求北京工业学院、成都电讯工程学院、北京航空学院等院校教师的意见，作了少量修改。由于编者水平有限，书中会有错误和不足之处，恳请读者批评指正。

编者　1984年8月

目　录

第一章　随机过程

第二章　随机过程的线性变换

第三章　窄带随机过程

第四章　随机过程的非线性变换

第五章 信号检测

第一章 随机过程

内容摘要

本章是后续各章的基础。首先介绍随机过程的定义、概率分布、矩函数、特征函数等基本概念。然后重点介绍常见的平稳随机过程、正态随机过程和白噪声，详细分析它们的统计特性和频谱特性，尤其是相关函数和功率谱密度。最后简单介绍无线电设备中的起伏过程及其测量。

§1.1 随机过程的基本概念

一、随机过程的定义

自然界中的事物变化过程可以分成两大类——确知过程和随机过程，前者具有确定的变化规律，后者则无确定的变化规律。若每次试验所得的变化过程相同，都是时间 t 的同一个函数，则为确知过程。若每次试验所得的变化过程不同，是时间 t 的不同函数，则为随机过程。电信号是电压或电流随时间而变化的过程，它就是据此分成两类——确知信号和随机信号。下面先来看几个例子：

例1.1-1 正弦(型)确知信号

$$s(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0) \tag{1.1-1}$$

式中：振幅 A、角频率 ω_0、相位 φ_0 都是已知的常量。

每次对高频振荡器作定相激励时，其稳态部分就是这种信号。每次激励相当于一次试验，由于每次试验时，信号 $s(t)$都相同地随时间 t 按上式所示确知函数而变化，因而这种信号是确知过程。 ┘

例1.1-2 正弦(型)随机初相信号

$$X(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi) \tag{1.1-2}$$

式中：振幅 A、角频率 ω_0 都是常量，而相位 φ 是在区间$(0,2\pi)$上均匀分布的随机变量。

由于相位 φ 是连续随机变量，在区间$(0,2\pi)$上有无数个取值，即可取$(0,2\pi)$中的任一值 φ_i，$0<\varphi_i<2\pi$。这时相应有不同的函数式：

$$x_i(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi_i) \qquad \varphi_i\in(0,2\pi) \tag{1.1-3}$$

可见 (1.1-2) 式实际上表示一族不同的时间函数，见图 1-1 所示（图中只画出其中的三条函数曲线。显然这种信号是随机过程。

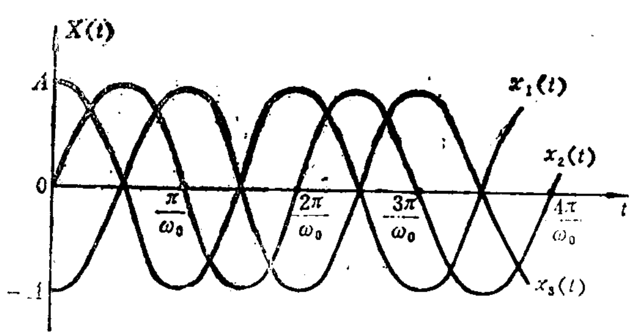

图 1-1 随机初相的正弦信号

对没有采用定相措施的一般高频振荡器作开机激励时，其稳态部分就是这种信号。每次开机作激励时，由于振荡器的起振相位受偶然因素影响而每次有所不同，因而高频振荡信号的相位作随机变化，这是最常遇见的一种随机信号。同理，在信号

$$s(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \tag{1.1-4}$$

的式中，若仅振幅 A 是随机变量，则为随机振幅信号。若仅角频率 ω 是随机变量，则为随机频率信号。 ┘

例1.1-3　接收机噪声

设有多部相同的接收机，输出端各接一个记录器，记录输出的电压(或电流)波形，如图 1-2 所示。

当各部接收机都不加入信号（例如将输入端短路）时，由于接收机中的元件(如电阻)和器件（如晶体管、电子管)会产生噪声，因而经放大输出后，各个记录器都会记录有相应接收机的噪声波形，如图 1-3 所示。

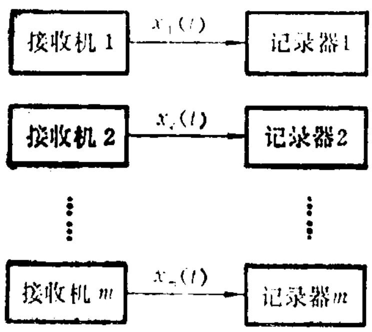

图 1-2　接收机噪声的记录

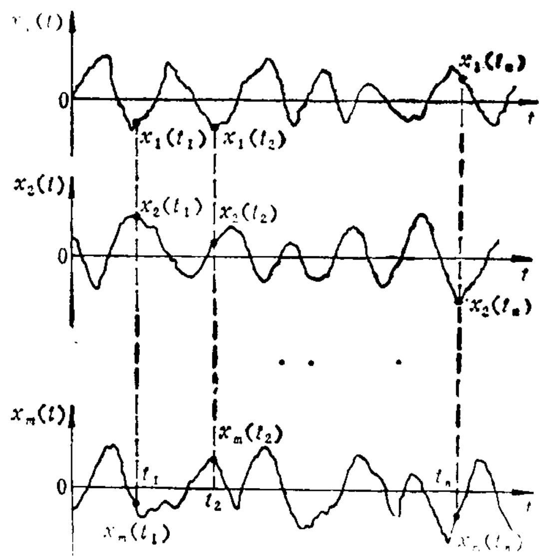

图 1-3　接收机的噪声波形

图中表明，各个噪声波形 $x_1(t)$、$x_2(t)$、……、$x_m(t)$杂乱无章，而且相互不同，显然每个噪声波形都是一个确定的时间函数，只是无法预知它。可见接收机噪声也是随机过程。这种噪声会对有用信号的接收起干扰作用，是我们要着重研究的一种随机过程。 ┘

在上两例中，或例 1.1-2 中对每次开机作观测，或例 1.1-3 中对某部接收机的噪声作记录，都相当于作一次随机试验。每次试验所得的观测、记录结果 $x_i(t)$都是一个确定的时间函数，称为样本函数，简称样本或实现。所有这些样本函数的总体或集合就构成随机过程 $X(t)$。在每次试验之前，我们无法确知这次试验的结果应该选取这个集合中的哪一个样本，只有在大量观测后才能知道它们的统计规律性，即究竟以多大的概率实现某一样本。

至此，可对随机过程作出定义。

定义 1：设随机试验 E 的样本空间为 $S=\{e\}$，对其每个元素e，依照某个规则确定出一个样本函数 $X(e,t)$，由全部元素 e 所确定的一族样本函数 $X(e,t)$ 称为随机过程。通常按惯例省写随机因素 e，把$X(e,t)$简记为$X(t)$。

这种定义是把随机过程理解为以随机方式(具有一定的概率)选取某个特定的样本函数。

下面，结合图 1-3 再来看一下随机过程 $X(e,t)$在各种情况下的意义：

(1) 若 e 固定为e_i，仅时间 t 变化，则得一个特定的时间函数 $X(e_i,t)$，它是一个确定的样本函数，即某次观测所得的记录曲线(实现)，例如图 1-3 中的$x_1(t)$、$x_2(t)$、……、$x_m(t)$就是各次试验 ($i=1,2,\cdots,m$) 时所得的不同特定样本。为防止混淆，随机过程通常用大写字母表示，如 $X(t)$、$Y(t)$，而样本则用小写字母表示，如$x(t)$、$y(t)$。

(2) 若 t 固定为t_j，仅随机因素 e 变化，则$X(e,t_j)$蜕化为一个随机变量，简记为$X(t_j)$，

例如 $X(t_1)$、$X(t_2)$、……、$X(t_n)$就是当时间分别为 $t_j=t_1$、t_2、…、t_n 时所得的各个随机变量。随机变量 $X(t_j)$又称为随机过程 $X(t)$在 $t=t_j$ 时的状态。

(3) 若 e 固定为 e_i，且 t 固定为 t_j，则$X(e_i,t_j)$为一个确定值，简记为 $x_i(t_j)$，例如图 1-3 中的$x_m(t_1)$、$x_2(t_2)$、…、$x_1(t_n)$都是在特定样本上再取特定时刻的值。

(4) 若 e 和 t 均为变量，则 $\{X(e,t)\}$ 为所有样本的集合或所有随机变量的总体。这才是随机过程 $X(t)$。

定义 1 是根据上述情况(1)作定义的，显然也可根据上述情况(2)来作定义。

定义 2：若对于每个固定的时刻 $t_j(j=1,2,\cdots)$，$X(t_j)$都是随机变量，则称$X(t)$为随机过程。

这种定义是把随机过程理解为随时间而变化的一族随机变量。

上述两种不同定义是用不同方法描述同一事物，从不同角度来理解随机过程，因而两种定义实质上一致，相互起补充作用。通过两种不同的定义描述，可以更全面地理解随机过程的意义。

作实际观测时通常采用定义 1，据此定义用实验方法观测各个样本。若观测次数 m 越大，所得样本数目越多，则越能掌握该随机过程的统计规律性。

作理论分析时通常采用定义 2，据此定义可把随机过程看成是随机变量的推广（是 n 维随机变量）。若时间分割越细，即维数 n 越大，则越能掌握该随机过程的统计规律性。《概率论》中已对随机变量作了详细介绍，其中有关多维随机变量的概念是分析随机过程的重要理论基础。

应该指出，在一般随机试验的过程中，随机变量将随某个参变量(如时间 t 或高度 h 等）而变化。例如研究大气层中的空气温度时，它是随高度而变化的随机变量，这时参变量是高度 h。通常，把随某个参变量而变化的随机变量统称为随机函数，其中参变量为时间 t 的随机函数才称为随机过程。

最后，简单介绍一下随机过程的常用分类。随机过程 $X(t)$可以按其状态的不同，分成连续型和离散型。也可按其时间参量 t 的不同，分成连续参量随机过程(简称随机过程)和离散参量随机过程(简称随机序列)。因此，合起来可以分成下述四类，见图 1-4 所示（图中仅示出其一个样本，且为按常用的等间隔取样画出)。

(1) 连续型随机过程：其状态 $X(t_j)$和时间 t 都连续，例如图 (a)所示。例 1.1-2、例 1.1-3均属此类。

(2) 离散型随机过程：其状态 $X(t_j)$离散，而时间 t 连续，例如图(b)所示。对连续型随机过程进行随机取样，并经量化后保持各取样值，即得这类随机过程。

(3) 连续随机序列：其状态 $X(t_j)$连续，而时间 t 离散，例如图 (c) 所示。对连续型随机过程进行等间隔取样，即得这类随机过程。

(4) 离散随机序列——实为数字序列(数字信号)：其状态 $X(t_j)$和时间 t 都离散，例如图(d)所示。对连续型随机过程进行等间隔取样，并将取样值量化成若干个固定的离散值，例如二进位制中的0、1，或十进位制中的0、1、2、…、9，即得这类随机过程。

由上可知，最基本的是连续型随机过程，其它三类只是对它作离散处理而得，因此本书主要介绍连续型随机过程。

随机过程根据其分布函数或概率密度进行本质分类，可以分成独立随机过程、马尔可夫

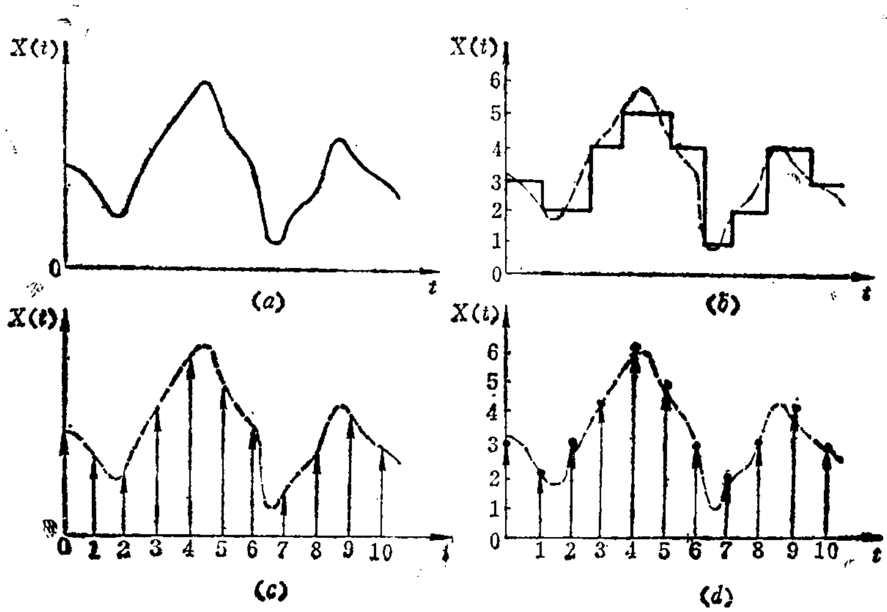

图 1-4 随机过程的常用分类

(Markov)过程㊀、独立增量过程、正态(Normal)随机过程、瑞利(Rayleigh)随机过程等。此外，根据随机过程的功率谱特性，可以分成宽带的或窄带的，白色的或有色的。

在工程技术中，还可根据随机过程有无平稳性，分成平稳的和非平稳的。

二、随机过程的概率分布

既然随机过程能够看成是随时间 t 而变化的一族随机变量，故可将随机变量的概率分布概念推广用于随机过程，求得随机过程的概率分布。

1．一维概率分布

随机过程 $X(t)$在任一特定时刻 t_1 的取值为一维随机变量$X(t_1)$。概率$P\{X(t_1)\leqslant x_1\}$是取值x_1 和时刻 t_1 的函数，记

$$F_1(x_1,\ t_1)=P\{X(t_1)\leqslant x_1\} \tag{1.1-5}$$

称为过程 $X(t)$的一维分布函数。

若它对 x_1 的一阶偏导数存在，则定义

$$p_1(x_1,t_1)=\frac{\partial F_1(x_1,t_1)}{\partial x_1} \tag{1.1-6}$$

为过程 $X(t)$的一维概率密度，一般省写其脚注而简记为 $p(x,t)$。

一维概率分布只能描述随机过程在任一孤立时刻的取值统计特性，不能反映随机过程在各个时刻的取值之间关联。

2．二维概率分布

随机过程 $X(t)$在任两时刻 t_1、t_2 的取值 $X(t_1)$、$X(t_2)$构成二维随机变量$[X(t_1),X(t_2)]$。记

$$F_2(x_1,x_2;\ t_1,\ t_2)=P\{X(t_1)\leqslant x_1,\ X(t_2)\leqslant x_2\} \tag{1.1-7}$$

称为过程 $X(t)$的二维分布函数。

㊀ 详见[2]第三册第二章，或[13]第15章。

若它对 x_1 和 x_2 有二阶混合偏导数存在，则定义

$$p_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=\frac{\partial^2 F_2(x_1,x_2;t_1,t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{1.1-8}$$

为过程 $X(t)$ 的二维概率密度。

二维概率分布可以描述随机过程在任两时刻的取值之间关联，且通过积分可以求得两个一维概率密度 $p(x_1,\ t_1)$ 和 $p(x_2,\ t_2)$，可见二维概率分布比其一维概率分布含有较多的统计特性信息，对随机过程的描述要细致些，但它还不能反映随机过程在两个以上时刻的取值之间关联。

3. n 维概率分布

随机过程 $X(t)$ 在任意 n 个时刻 t_1、t_2、…、t_n 的取值 $X(t_1)$、$X(t_2)$、…、$X(t_n)$ 构成 n 维随机变量 $[X(t_1),\ X(t_2),\ \cdots,\ X(t_n)]$，即 n 维空间中的随机矢量 $\boldsymbol{X}$。同上可得过程 $X(t)$ 的 n 维分布函数为

$$F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=P\{X(t_1)\leqslant x_1,X(t_2)\leqslant x_2,\cdots,X(t_n)\leqslant x_n\} \tag{1.1-9}$$

过程 $X(t)$ 的 n 维概率密度为

$$p_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=\frac{\partial^n F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} \tag{1.1-10}$$

n 维概率分布可以描述任意 n 个时刻的取值之间关联，比其低维概率分布含有更多的统计特性信息，对随机过程的描述更细微些。故若随机过程的观测时刻点数取得越多(即维数 n 越大)，则随机过程的统计特性可以描述得越细致。从理论上来说，要完全描述一个随机过程的统计特性，需要维数 $n\to\infty$，但对工程实际来说，在许多场合仅取二维即可。

根据《概率论》中多维随机变量的概率分布可知，随机过程 $X(t)$ 的 n 维概率分布具有下列主要性质：

(1) $F_n(x_1,x_2,\cdots,-\infty,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_i,\cdots,t_n)=0$ (1.1-11)

(2) $F_n(\infty,\infty,\cdots,\infty;t_1,t_2,\cdots,t_n)=1$ (1.1-12)

(3) $p_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)\geqslant 0$ (1.1-13)

(4) $\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{n\text{重}} p_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)dx_1dx_2\cdots dx_n=1$ (1.1-14)

(5) $\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{(n-m)\text{重}} p_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots t_n)dx_{m+1}dx_{m+2}\cdots dx_n$

$=p_m(x_1,x_2,\cdots,x_m;t_1,t_2,\cdots,t_m)$ (1.1-15)

(6) 若 $X(t_1)$、$X(t_2)$、…、$X(t_n)$ 统计独立，则得

$$p_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=p(x_1,t_1)p(x_2,t_2)\cdots p(x_n,t_n) \tag{1.1-16}$$

例1.1-4 设随机振幅信号

$$X(t)=X\cos\omega_0 t \tag{1.1-17}$$

式中：ω_0 为常量，X 为标准正态随机变量。试求时刻 $t=0$、$\pi/3\omega_0$、$\pi/2\omega_0$ 时 $X(t)$ 的一维概率密度。

解： 标准正态随机变量 X 的一维概率密度为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] \qquad -\infty<x<\infty$$

$X(t)$在任一时刻t的取值为

$$x_t = x\cos\omega_0 t$$

由随机变量的概率密度变换，可以求得$X(t)$的一维概率密度为

$$p(x_t,t)=p(x,t)\left|\frac{dx}{dx_t}\right|=p\left(\frac{x_t}{\cos\omega_0 t},\ t\right)\left|\frac{1}{\cos\omega_0 t}\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{|\cos\omega_0 t|}\exp\left[-\frac{x_t^2}{2\cos^2\omega_0 t}\right]\qquad -\infty<x_t<\infty$$

故得

$$t=t_1=0\text{时}\qquad p(x_1,t_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{x_1^2}{2}\right]$$

$$t=t_2=\frac{\pi}{3\omega_0}\text{时，}\ p(x_2,t_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{0.5}\exp[-2x_2^2]$$

$$t=t_3=\frac{\pi}{2\omega_0}\text{时，}\ p(x_3,t_3)=\lim_{t\to t_3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,|\cos\omega_0 t|}\exp\left[-\frac{x_3^2}{2\cos^2\omega_0 t}\right]=\delta(x_3)$$

上述结果示于图1-5。由图或式可知，随机过程$X(t)$的一维概率密度随时间t而变化，

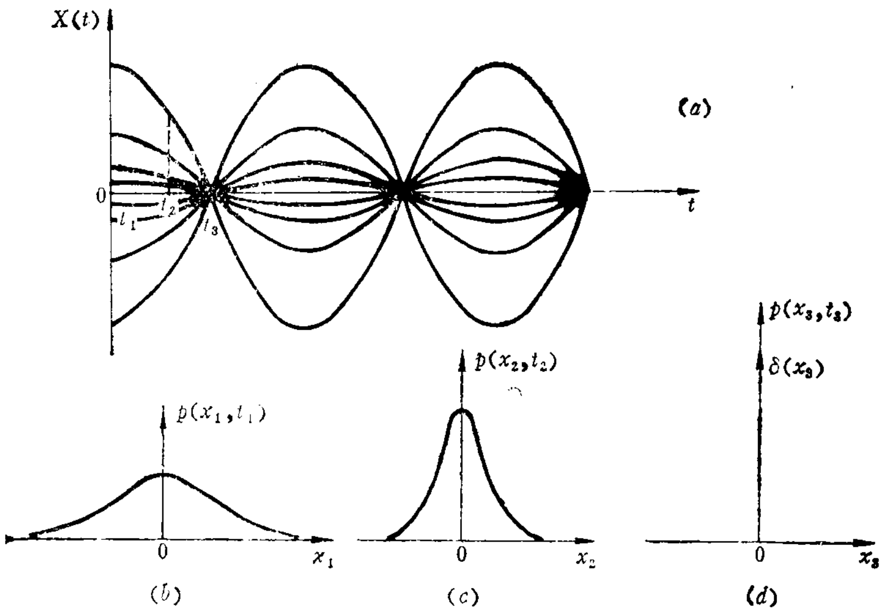

图 1-5 随机振幅信号及其概率密度

任一时刻的取值都是正态分布，但各个时刻的方差有所不同，t_1时最大，t_2时变小，而t_3时最小(趋于零)，这时概率密度变为δ函数。

例1.1-5 试写出例1.1-1所示确知信号$s(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$的一维概率密度。

解： 从分类来说，确知信号$s(t)$不是随机过程，但可看成是一种特殊的随机过程$X(t)$，对于任一时刻t，过程$X(t)$的取值只能是$s(t)$，因而确知信号$s(t)$的一维概率密度可以写为

$$p(x,t)=\delta[x-s(t)]\tag{1.1-18}$$

三、随机过程的矩函数[⊖]

《概率论》中已经介绍过，描述随机变量的平均统计参量是数学期望、方差、协方差、相

⊖ 本章只讨论常见的实随机过程的矩函数，至于复随机过程的矩函数见§3.3。

关矩等数字特征，最一般的数字特征为矩。随机过程可看成是随时间而变化的一族随机变量，故将随机变量的数字特征概念推广用于随机过程，即可得到描述随机过程的平均统计函数(不再是确定的数，而是确定的时间函数)，统称它们为矩函数。随机过程的分布函数和概率密度是一般统计特性，它们能够对随机过程作完整地描述，但却不够简明，而且常常难以求得。在工程技术中，一般只需采用描述随机过程主要平均统计特性的几个矩函数（数学期望、方差、相关函数等)就够了。下面来介绍这些矩函数。显然，它们的定义和意义只是随机变量矩的推广。

1．数学期望

随机过程 $X(t)$在某一特定时刻 t_1 的取值为一维随机变量 $X(t_1)$，其数学期望是一个确定值。随机过程$X(t)$在任一时刻 t 的取值仍为一维随机变量$X(t)$[注意此处 t 已固定，故$X(t)$已非随机过程]，将其任一取值 $x(t)$简记为 x，根据随机变量的数学期望定义，可得

$$E[X(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} xp(x,t)dx=m_X(t) \tag{1.1-19}$$

它是时间 t 的确定函数，是过程 $X(t)$在任一时刻 t 的数学期望或统计均值，称为随机过程 $X(t)$的(瞬时)数学期望或统计均值，常以专用符号 $m_X(t)$记之(脚注X 在不致混淆时可以省去不写)。

统计均值是对随机过程 $X(t)$ 中的所有样本在任一时刻 t 的取值进行平均，因而统计均值又称集合均值(在不致混淆时可以简称均值)。

随机过程$X(t)$的数学期望 $m_X(t)$见图 1-6中的粗实线所示，它表示随机过程中的所有样本(以细线表明)在任一时刻 t 的取值(随机变量)之分布中心。

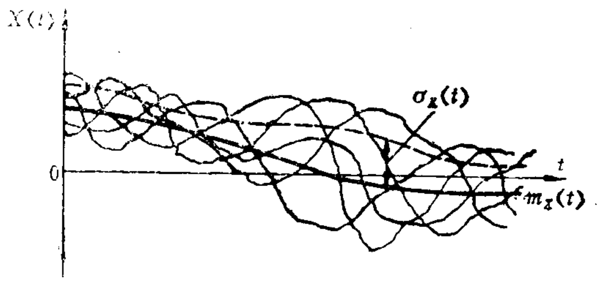

图 1-6 随机过程的数学期望

2．方差

随机过程 $X(t)$的数学期望 $m_X(t)$是确定的时间函数，因而 $\mathring{X}(t)=X(t)-m_X(t)$ 仍为随机过程，称为中心化随机过程，简称为过程 $X(t)$的起伏。起伏$\mathring{X}(t)$ 在任一时刻 t 的取值仍为一维随机变量，故按随机变量的方差定义，可得

$$\begin{aligned}D[X(t)]&=E\{[\mathring{X}(t)]^2\}=E\{[X(t)-m_X(t)]^2\}\\&=\int_{-\infty}^{\infty}[x-m_X(t)]^2p(x,t)dx=\sigma_X^2(t)\end{aligned} \tag{1.1-20}$$

它也是时间 t 的确定函数，称为随机过程 $X(t)$的方差，常以专用符号 $\sigma_X^2(t)$记之。

方差$\sigma_X^2(t)$必为非负函数，其平方根$\sigma_X(t)$称为随机过程 $X(t)$的标准差或方差根，在图1-6中以虚线表明。

方差$\sigma_X^2(t)$表示随机过程 $X(t)$中的所有样本在任一时刻 t 的取值(随机变量)对其分布中心的平均离散程度。

3．自相关函数

数学期望和方差分别为一维随机变量的一阶原点矩和二阶中心矩，它们只能表示随机过

程在各个孤立时刻的平均统计特性，不能反映随机过程在任两时刻的取值之间关联。例如图1-7所示的两个随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$，具有近似相同的数学期望和方差，但两者的内部结构却显然不同，$X(t)$ 的起伏缓慢，任两时刻的取值之间关联较强，而 $Y(t)$ 的起伏急剧，任两时刻的取值之间关联较弱。为了表示随机过程在任两时刻的取值之间的关联程度，需用二维随机变量的二阶原点矩或中心矩，这就是随机过程的自相关函数和中心化自相关函数。

随机过程 $X(t)$ 在任两时刻 t_1、t_2 的取值构成二维随机变量，今将变量 $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$

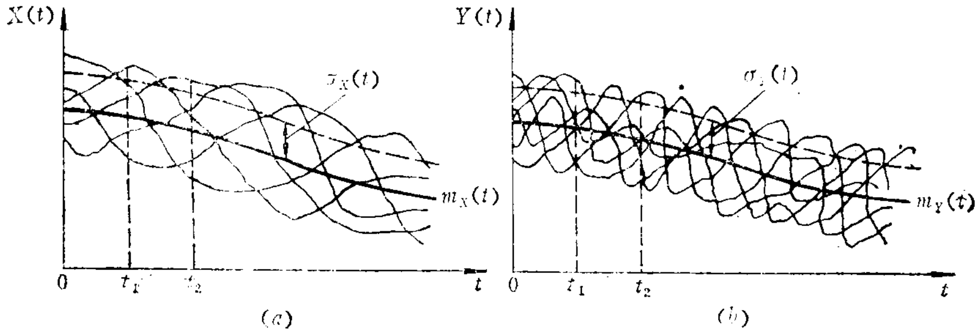

图1-7　具有相同数学期望和方差的两个随机过程

在任两时刻的取值 $x(t_1)$ 和 $x(t_2)$ 简记为 x_1 和 x_2，记二阶混合原点矩为⊖

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2p_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2 \quad (1.1\text{-}21)$$

称为随机过程 $X(t)$ 的自相关函数，在不致混淆时可以简称相关函数。它表示过程 $X(t)$ 在任两时刻的取值之间的平均关联程度。例如图 1-7(a)所示过程 $X(t)$ 的起伏缓慢，知其某一时刻 t_1 的取值后，即可大致估计出 t_1 后某一时刻 t_2 的取值，它显著偏离前值的可能性很小，说明两个取值之间的关联较强。

同理，记变量 $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 的二阶混合中心矩为

$$C_X(t_1,\ t_2)=E[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)]=E\{[X(t_1)-m_X(t_1)][X(t_2)-m_X(t_2)]\}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x_1-m_X(t_1)][x_2-m_X(t_2)]p_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2 \quad (1.1\text{-}22)$$

称为随机过程 $X(t)$ 的中心化自相关函数或自协方差函数，简称协方差函数。它表示过程 $X(t)$ 在任两时刻的起伏值之间的平均关联程度。

这两种自相关函数之间具有下述关系：

$$C_X(t_1,\ t_2)=E\{[X(t_1)-m_X(t_1)][X(t_2)-m_X(t_2)]\}$$
$$=E\{X(t_1)X(t_2)-m_X(t_1)X(t_2)-m_X(t_2)X(t_1)+m_X(t_1)m_X(t_2)\}$$
$$=R_X(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_X(t_2) \quad (1.1\text{-}23)$$

因为当 $t_1=t_2=t$ 时，有

$$R_X(t,t)=E[X(t)X(t)]=E[X^2(t)] \quad (1.1\text{-}24)$$

和

$$C_X(t,t)=E\{[X(t)-m_X(t)]^2\}=\sigma_X^2(t) \quad (1.1\text{-}25)$$

故由(1.1-23)式可得

⊖有不少书采用双脚注，如 $R_{XX}(t_1,t_2)$。

$$\sigma_X^2(t)=E[X^2(t)]-m_X^2(t) \tag{1.1-26}$$

可见当 $t_1=t_2=t$ 时，自协方差函数即方差，而相关函数即一维随机变量的二阶原点矩 $E[X^2(t)]$，称为随机过程 $X(t)$的均方值。

还可以说明高阶矩的情况，但因其定义与随机变量时类似，且实际应用不多，常用的只是一、二阶矩，因而不再介绍。可见在随机过程的所有矩函数中，最主要的矩函数实际上只有两个(数学期望和相关函数)，其它矩函数(协方差函数、方差、均方值)都可间接求得。

数学期望和相关函数虽然不能详细表征随机过程的全部统计特性，但它们已经表征出随机过程的主要平均统计特性，远比有穷维的概率分布易于观测和计算，故在工程技术问题中占有重要地位。尤其对于最常见的正态随机过程，只要已知数学期望和相关函数，则其 n 维概率分布就能完全确定(详见 §1.4)。这种只研究随机过程一、二阶矩函数(以数学期望和相关函数为主)的统计理论，称为相关理论，它是随机过程理论中的一个重要分支。

例1.1-6 设随机振幅信号

$$X(t)=X\cos\omega_0 t$$

式中：ω_0 为常量，X 为标准正态随机变量。求随机过程 $X(t)$的数学期望、方差、相关函数、协方差函数。

解：因为 X 是标准正态随机变量，故其数学期望 $E[X]=0$，方差 $D[X]=1$，从而均方值

$$E[X^2]=D[X]+E^2[X]=1$$

根据随机过程的矩函数定义，并利用数字特征的性质，求得

$$\begin{aligned}m_X(t)&=E[X(t)]=E[X\cos\omega_0 t]\\&=\cos\omega_0 t\cdot E[X]=0\\\sigma_X^2(t)&=D[X(t)]=D[X\cos\omega_0 t]\\&=\cos^2\omega_0 t\cdot D[X(t)]=\cos^2\omega_0 t\\R_X(t_1,t_2)&=E[X(t_1)X(t_2)]=E[X^2\cos\omega_0 t_1\cos\omega_0 t_2]\\&=\cos\omega_0 t_1\cos\omega_0 t_2\cdot E[X^2]=\cos\omega_0 t_1\cos\omega_0 t_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_X(t_1,t_2)&=E[\mathring{X}(t_1)\mathring{X}(t_2)]=E\{[X(t_1)-m_X(t_1)][X(t_2)-m_X(t_2)]\}\\&=E\{X(t_1)X(t_2)\}=R_X(t_1,t_2)=\cos\omega_0 t_1\cos\omega_0 t_2\end{aligned}$$

此例表明，过程 $X(t)$的数学期望和方差只是某一时刻的特征，仅与一个时刻 t 有关，而相关函数和协方差函数则涉及两个时刻的取值关联，它与两个时刻 t_1、t_2 有关。

四、随机过程的特征函数

我们知道，随机变量的概率密度与特征函数是一对傅里叶(Fourier)变换，且随机变量的矩唯一地被特征函数所决定㊀，因此求正态分布等随机变量的概率密度和数字特征时，利用特征函数能够显著简化运算。同样，求随机过程的概率密度和矩函数时，利用特征函数也是如此。

随机过程 $X(t)$的一维特征函数被定义为

㊀可参阅[2]第一册第四章 §4.

$$\Phi_X(\lambda, t)=E[e^{j\lambda X(t)}]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\lambda x}p(x,t)dx \tag{1.1-27}$$

式中：$x=X(t)$，为随机变量 $X(t)$的取值，$p(x,t)$是过程 $X(t)$的一维概率密度，它与一维特征函数 $\Phi_X(\lambda,t)$构成一对傅里叶变换，即有

$$p(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_X(\lambda,t)e^{-j\lambda x}d\lambda \tag{1.1-28}$$

将(1.1-27)式两端各对变量 λ 求偏导 n 次，得

$$\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\Phi_X(\lambda,t)=j^n\int_{-\infty}^{\infty}x^n e^{j\lambda x}p(x,t)dx \tag{1.1-29}$$

因而过程 $X(t)$的 n 阶原点矩函数为

$$E[X^n(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x^n p(x,t)dx=j^{-n}\left[\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\Phi_X(\lambda,t)\right]_{\lambda=0} \tag{1.1-30}$$

利用此式即可求得随机过程的数学期望和均方值。

随机过程 $X(t)$的二维特征函数被定义为

$$\begin{aligned}\Phi_X(\lambda_1,\lambda_2;t_1,t_2)&=E[e^{j\lambda_1 X(t_1)+j\lambda_2 X(t_2)}]\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\lambda_1 x_1+j\lambda_2 x_2}p_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2\end{aligned} \tag{1.1-31}$$

式中：$x_1=X(t_1)$，$x_2=X(t_2)$，$p_2(x_1,x_2,t_1,t_2)$ 是过程 $X(t)$ 的二维概率密度，它与 $\Phi_X(\lambda_1,\lambda_2;t_1,t_2)$构成二重傅里叶变换对，即有

$$p_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_X(\lambda_1,\lambda_2;t_1,t_2)e^{-j\lambda_1 x_1-j\lambda_2 x_2}d\lambda_1 d\lambda_2 \tag{1.1-32}$$

将(1.1-31)式的两端各对变量 λ_1 和 λ_2 求一次偏导，得

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}\Phi_X(\lambda_1,\lambda_2;t_1,t_2)=-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2e^{j\lambda_1x_1+j\lambda_2x_2}p_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2 \tag{1.1-33}$$

因而过程 $X(t)$的相关函数为

$$\begin{aligned}R_X(t_1,t_2)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2p_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2\\&=-\left[\frac{\partial^2}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}\Phi_X(\lambda_1,\lambda_2;t_1,t_2)\right]_{\lambda_1=\lambda_2=0}\end{aligned} \tag{1.1-34}$$

利用特征函数的性质，还可求得过程 $X(t)$的方差和协方差函数分别为

$$D[X(t)]=-\left\{\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}e^{-j\lambda E[X(t)]}\Phi_X(\lambda,t)\right\}_{\lambda=0} \tag{1.1-35}$$

$$C_X(t_1,t_2)=-\left\{\frac{\partial^2}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}e^{-j\lambda_1E[X(t_1)]-j\lambda_2E[X(t_2)]}\Phi_X(\lambda_1,\lambda_2;t_1,t_2)\right\}_{\lambda_1=\lambda_2=0} \tag{1.1-36}$$

例1.1-7 已知随机过程 $X(t)$在 t 时刻的取值服从正态分布，其一维概率密度为

$$p(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

试求这时随机过程 $X(t)$ 的特征函数，并求此时的数学期望、方差、均方值。

解：由(1.1-27)式得一维特征函数为

$$\Phi_X(\lambda,t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\lambda x}p(x,t)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[j\lambda x-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]dx$$

作变量代换 $\qquad y=\dfrac{x-m}{\sigma}$，得

$$\Phi_X(\lambda,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{j\lambda m}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{y^2}{2}+j\lambda\sigma y\right]dy=\exp\left[j\lambda m-\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2\right]$$

由(1.1-30)式求得数学期望和均方值分别为

$$E[X(t)]=j^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\Phi_X(\lambda,t)\right]_{\lambda=0}=m$$

$$E[X^2(t)]=j^{-2}\left[\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\Phi_X(\lambda,t)\right]_{\lambda=0}=\sigma^2+m^2$$

因而方差为

$$D[X(t)]=E[X^2(t)]-E^2[X(t)]=\sigma^2$$

§1.2 平稳随机过程

§1.1已经介绍了任意分布时随机过程的概率分布和矩函数。随机过程可以分成平稳和非平稳两大类，严格地说，所有随机过程都是非平稳的，但平稳随机过程的分析要容易得多，而无线电技术中通常遇见的随机过程，大多接近于平稳。为此，我们将以平稳随机过程作为讨论的重点。

一、特点和分类

平稳随机过程的主要特点是其统计特性不随时间的平移而变化，即其概率分布或矩函数与观测的计时起点无关，可以任意选择观测的计时起点。

若随机过程不具有上述平稳性，则为非平稳随机过程，如例1.1-4或例1.1-6。怎样判别一个随机过程是平稳的或非平稳的呢？一般来说，可以根据产生此随机过程的主要物理条件在时间进程中是否改变来作判别。例如对于接收机噪声，当接收机刚加电工作的一段时间内，机内元、器件的温度在逐渐上升，噪声强度随时间而增大，在这期间内的输出噪声为非平稳的。而过了一段时间后，温度已经稳定，噪声强度不再变化(严格地说，还是时间缓变的，但因变化极其缓慢，在一段不太长的时间里近似看作不变是合理的)，这时输出噪声就变成平稳的。又如平稳随机过程通过含有惰性元件的电路，由于存在暂态历程，在电路开关接通或断开的一段时间内，输出随机过程为非平稳的，其后才是平稳的。平稳本身是对整个时域而言，这里的“其后”等等均为工程上的近似。掌握平稳性的这种判别方法，有助于对随机过程的测量和分析。

根据对平稳性条件的要求程度不同，一般把平稳随机过程分成两类：严格平稳（又称狭义平稳）；广义平稳(又称宽平稳)。

1. 严格平稳过程

若随机过程 $X(t)$ 的任意 n 维概率分布不随计时起点的选择不同而变化，即当时间平移任一常数 ε 时，其 n 维概率密度(或分布函数)不变化，则称 $X(t)$ 为严格平稳过程，即应满足下述关系式：

$$p_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=p_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1+\varepsilon,t_2+\varepsilon,\cdots,t_n+\varepsilon) \quad (1.2\text{-}1)$$

下面来看严格平稳过程的一、二维概率密度和矩函数有些什么特点。

将上式用于一维时，令 $\varepsilon=-t_1$，则得

$$p_1(x_1,t_1)=p_1(x_1,0) \quad (1.2\text{-}2)$$

这表明一维概率密度与时间 t 无关，故可简记为 $p(x)$。由此可得数学期望和方差也都是与时间无关的常量，即有

$$E[X(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x,t)dx=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx=m_X \quad (1.2\text{-}3)$$

$$D[X(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}[x-m_X(t)]^2p(x,t)dx=\int_{-\infty}^{\infty}[x-m_X]^2p(x)dx=\sigma_X^2 \quad (1.2\text{-}4)$$

将(1.2-1)式用于二维时，令 $\varepsilon=-t_1$，并记 $\tau=t_2-t_1$，得

$$p_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=p_2(x_1,x_2;0,\tau) \quad (1.2\text{-}5)$$

这表明二维概率密度仅与时刻间隔 $\tau=t_2-t_1$ 有关，而与时刻 t_1 或 t_2 无关，故可简记为 $p_2(x_1,x_2;\tau)$。由此可得相关函数仅为单变量 τ 的函数，即

$$R_X(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2p_2(x_1,x_2;\tau)dx_1dx_2=R_X(\tau) \quad (1.2\text{-}6)$$

同理可得协方差函数

$$C_X(t_1,t_2)=C_X(\tau)=R_X(\tau)-m_X^2 \quad (1.2\text{-}7)$$

故当 $t_1=t_2=t$，即 $\tau=0$ 时，有

$$\sigma_X^2=R_X(0)-m_X^2 \quad (1.2\text{-}8)$$

2．广义平稳过程

若随机过程 $X(t)$ 的数学期望是与时间 t 无关的常量，相关函数仅与时刻时隔 $\tau=t_2-t_1$ 有关，即

$$\left.\begin{aligned}&E[X(t)]=m_X\\&R_X(t_1,t_2)=R_X(\tau)\end{aligned}\right\} \quad (1.2\text{-}9)$$

则称 $X(t)$ 为广义平稳过程。

从上面讨论严格平稳过程的矩函数可知，广义平稳过程只是严格平稳过程在平稳性条件放宽要求时的一个特例，因而广义平稳过程不一定是严格平稳的。为何要用矩函数另外定义这类宽平稳性呢？这是因为广义平稳过程只涉及一、二阶矩函数的相关理论，而目前工程上，经常只用到一、二阶矩的知识。此外，对于最常见的正态随机过程来说，其广义平稳与严格平稳是等价的(见§1.4)。

比较两种平稳性条件可知，若狭义平稳，其二阶矩存在，则必然广义平稳。反之，若广义平稳，则不一定狭义平稳。

在无线电技术问题中，一般只研究适于工程运用的广义平稳过程。因此，除非有特别的声明，下面凡是谈到平稳过程，均指广义平稳过程(通常简称平稳过程)。

例1.2-1 设随机初相信号 $X(t)=A\cos(\omega_0t+\varphi)$，其中 A 和 ω_0 都是常量，φ 是在 $(0,2\pi)$ 上均匀分布的随机变量。试问 $X(t)$ 是否平稳过程。