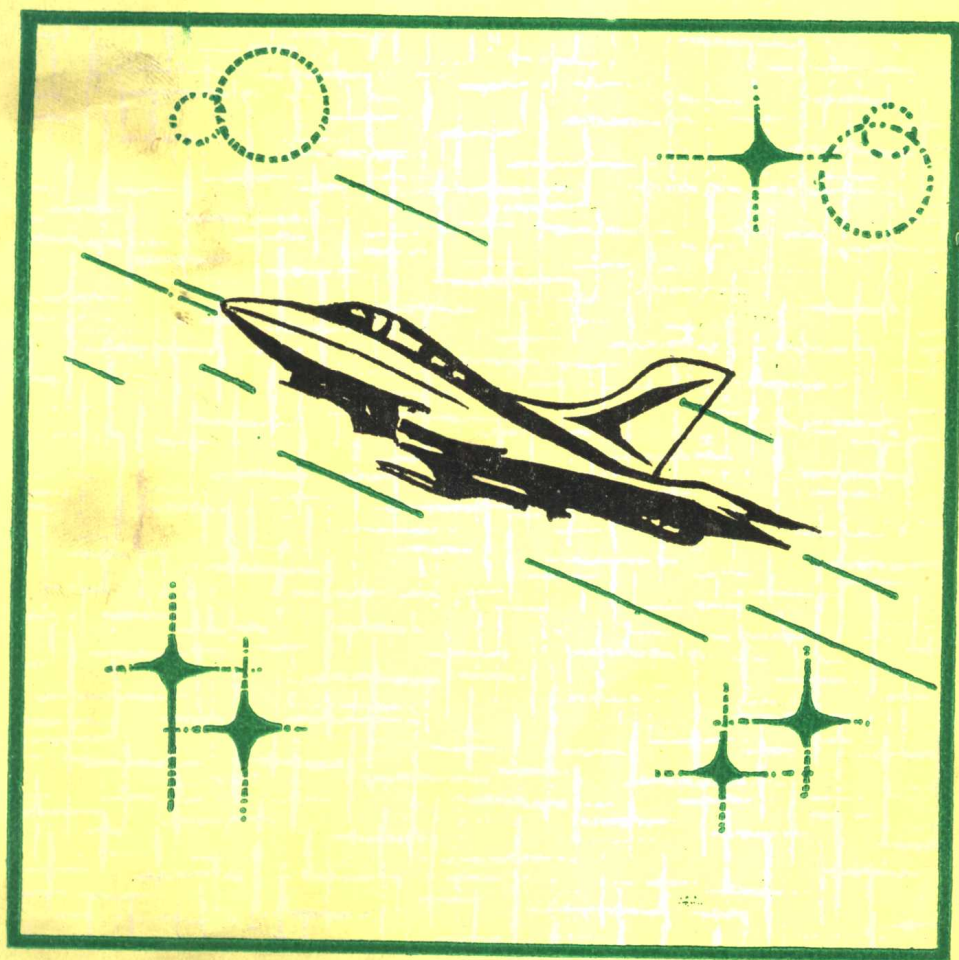


《复合材料科学与工程》之三

# 复合材料结构设计

陆关兴 王耀先 编著



华东化工学院出版社

《复合材料科学与工程》之三

# 复合材料结构设计

陆关兴 王耀先 编著



华东化工学院出版社

## 内 容 简 介

本书是高等工业院校复合材料专业教材，是编者在经多年使用的教学讲义的基础上，根据修订后的教学大纲和编者从事本学科领域的科学研究成果及设计工作经验编写而成的。

全书分为两部分。第一部分为复合材料力学基础理论，包括单层板和层合板的刚度与强度、细观力学；第二部分为复合材料产品设计，介绍比较典型的实用的构件和产品设计方法，包括设计概要、连接设计以及贮罐、内容器、管道和叶片的设计。

本书除用作教材外，还可供有关专业师生和从事材料科学和工程的研究人员与技术人员参考。

**责任编辑** 袁明辉

**责任校对** 金慧娟

### 复 合 材 料 结 构 设 计

Fuhe Cailiao Jiegou Sheji

陆关兴 王耀先 编著

华东化工学院出版社出版

(上海市梅陇路130号)

新华书店上海发行所发行

江苏省大丰印刷二厂印刷

开本787×1092 1/16 印张15.75 字数380千字

1991年4月第1版 1991年4月第1次印刷

印数1-3000册

ISBN 7-5628-0136-3/TQ·18 定价4.15元

# 前 言

近 30 年来，复合材料在航空、航天、建筑、化工、汽车和造船等部门的应用日益广泛，研究工作十分活跃。复合材料是非均质的各向异性材料，具有许多优良特性。复合材料最主要的优点之一是材料的可设计性，这是复合材料区别于金属材料的主要特征。随着复合材料的迅速发展和广泛应用，许多金属材料结构设计人员需要学习和掌握复合材料结构设计，而材料科学与工程方面新技术人材的培养更需要这方面的知识。本书是在编者多年从事复合材料教学、科研和设计工作的基础上，根据华东化工学院复合材料专业的教学讲义和教学大纲的要求编写而成的。

本书共分九章，包括两大部分内容。前三章扼要地介绍复合材料力学的基础理论，后六章分别介绍了一些比较成熟而且比较实用的典型结构件和产品的设计方法，重点是介绍结构设计的基本思想，以便使大多数读者可以用本书介绍的理论和解决方法解决工程中的实际问题。在叙述时，本书力求将基本概念阐述清楚，尽量采用材料力学概念和方法去开拓复合材料力学概念。因此，阅读本书只需具备材料力学和线性代数的基础知识。

本书可作为工科大学的教材，亦可供从事玻璃钢结构设计及材料科学与工程的有关科技人员参考。

本书 0，1，2，3，6 章由王耀先编写；4，5，7，8，9 章由陆关兴编写。

限于编者水平，本书难免会有不少错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

作者

DAG 73/402

# 目 录

0 概论	1
1 单层板的刚度与强度	2
1.1 引言	2
1.1.1 单层板及其主方向	2
1.1.2 应力	3
1.1.3 应变	3
1.2 单层板的正轴刚度	4
1.2.1 单层板的正轴应力-应变关系	4
1.2.2 模量与柔量的对称性	8
1.2.3 几种典型复合材料单层的正轴刚度参数	10
1.3 单层板的偏轴刚度	11
1.3.1 应力转换与应变转换	11
1.3.2 单层板的偏轴模量	16
1.3.3 单层板的偏轴柔量	19
1.3.4 单层板的偏轴工程弹性常数	22
1.4 单层板的强度	31
1.4.1 单层板强度的概念	31
1.4.2 最大应力准则和最大应变准则	32
1.4.3 蔡-希尔 (Tsai-Hill) 强度准则	33
1.4.4 蔡-吴 (Tsai-Wu) 张量多项式准则	34
1.4.5 单层板强度的方向性及各种强度准则的比较	40
1.4.6 单层板的强度比方程	42
2 单层板的细观力学分析	45
2.1 引言	45
2.2 复合材料的密度及各相的含量	46
2.3 用材料力学方法预测单向单层板的弹性常数	47
2.3.1 串联模型的弹性常数	48
2.3.2 并联模型的弹性常数	51
2.3.3 植村-山脇的经验公式	53
2.4 用半经验公式法预测单向单层板的弹性常数	54
2.4.1 韩 (Hahn) 的半经验公式	54
2.4.2 哈尔平-蔡 (Halpin-Tsai) 的半经验公式	57
2.5 复合材料单层基本强度的预测	58

2.5.1	纵向拉伸强度 $X_t$ .....	58
2.5.2	纵向压缩强度 $X_c$ .....	60
2.6	织物复合材料力学性能的预测 .....	61
2.7	短纤维复合材料的细观力学分析 .....	62
2.7.1	应力传递理论 .....	63
2.7.2	单向短纤维复合材料的弹性模量和强度 .....	64
2.7.3	平面随机取向短纤维复合材料的弹性模量和强度 .....	66
<b>3</b>	<b>层合板的刚度与强度</b> .....	<b>68</b>
3.1	引言 .....	68
3.2	对称层合板的面内刚度 .....	70
3.2.1	面内力-面内应变关系 .....	70
3.2.2	对称层合板的面内工程弹性常数 .....	72
3.2.3	面内模量的计算 .....	73
3.2.4	几种典型对称层合板的面内模量 .....	74
3.3	一般层合板的刚度 .....	82
3.3.1	一般层合板的内力-应变关系 .....	82
3.3.2	对称层合板的弯曲刚度 .....	88
3.3.3	一般层合板的模量计算 .....	91
3.3.4	几种典型层合板的刚度 .....	94
3.3.5	平行移轴定理 .....	101
3.4	层合板的强度 .....	102
3.4.1	层合板各单层的应力计算及强度校核 .....	102
3.4.2	层合板的强度 .....	105
<b>4</b>	<b>复合材料产品设计概要</b> .....	<b>109</b>
4.1	设计程序 .....	109
4.2	设计方法 .....	110
4.3	设计基础 .....	111
4.3.1	纤维增强塑料的材料特性 .....	111
4.3.2	外载荷基准 .....	113
4.4	设计标准 .....	119
4.4.1	设计标准制定的目的 .....	119
4.4.2	设计标准的概念 .....	120
4.4.3	极限强度 .....	120
4.4.4	安全系数 .....	123
4.4.5	许用应力 .....	125
4.5	简单构件的设计 .....	127
4.5.1	承拉构件 .....	127

4.5.2	承压构件	128
4.5.3	承弯杆件——梁	131
<b>5</b>	<b>复合材料的连接</b>	<b>138</b>
5.1	机械连接	138
5.1.1	机械连接的形式	138
5.1.2	接点的强度校核	138
5.2	胶接连接	141
5.2.1	胶接接头的形式	142
5.2.2	搭接接头承载力的分析	142
5.2.3	搭接接头的强度条件	148
<b>6</b>	<b>纤维增强塑料容器和贮罐设计</b>	<b>149</b>
6.1	引言	149
6.2	层合结构设计	151
6.2.1	容器器壁和贮罐罐壁的层合结构	151
6.2.2	层合结构设计及厚度计算	152
6.3	卧式容器和贮罐设计	156
6.3.1	鞍座最佳位置	157
6.3.2	卧式容器和贮罐受力分析	158
6.3.3	筒体强度设计与校核	162
6.3.4	鞍座设计	165
6.3.5	封头设计	165
6.3.6	设计实例	167
6.4	立式容器和贮罐设计	171
6.4.1	立式容器和贮罐内力分析	172
6.4.2	立式圆筒形贮罐的罐顶和平底	172
6.4.3	立式设备支座	174
6.4.4	装配式纤维增强塑料贮罐	176
6.5	容器和贮罐的零部件设计	177
6.5.1	容器和贮罐的开孔与补强	177
6.5.2	进出口管和人孔	181
<b>7</b>	<b>纤维缠绕内压容器</b>	<b>184</b>
7.1	钢制内压薄壁容器	184
7.2	网格理论	188
7.2.1	网格理论的基本假设	188
7.2.2	等张力结构的基本概念	188
7.3	纤维缠绕内压容器筒体的强度设计	188

7.3.1	单螺旋纤维缠绕内压容器的强度设计	188
7.3.2	双向纤维缠绕内压力容器筒体的强度设计	190
7.4	纤维缠绕内压力容器封头的强度设计	191
7.4.1	等张力封头强度问题	191
7.4.2	等张力封头曲线	193
7.4.3	其他类型的封头曲线	195
7.5	金属内衬的设计	196
7.5.1	金属内衬的设计	196
7.5.2	金属内衬复合容器的纤维缠绕张力	198
7.6	纤维缠绕内压力容器设计实例	201
7.6.1	设计条件	201
7.6.2	强度设计	202
7.6.3	缠绕张力计算	204
<b>8</b>	<b>玻璃钢管道</b>	<b>205</b>
8.1	玻璃钢管道的概况	205
8.1.1	玻璃钢管道的应用	205
8.1.2	玻璃钢管道的特点和分类	205
8.2	玻璃钢管道的设计	209
8.2.1	设计基础	209
8.2.2	结构计算	210
8.2.3	性能检验	211
8.3	管道的连接及管件	212
8.3.1	不可拆卸连接	214
8.3.2	可拆卸连接	215
8.3.3	玻璃钢管件	216
8.4	复合管道	216
8.4.1	玻璃钢/聚氯乙烯复合管道	216
8.4.2	玻璃钢/树脂混凝土管	219
8.5	玻璃钢管道的设计和生	221
<b>9</b>	<b>玻璃钢叶片</b>	<b>223</b>
9.1	叶片的结构设计	224
9.1.1	叶片截面设计	224
9.1.2	叶根设计	225
9.1.3	叶片表面防护层	227
9.1.4	铺层设计	227
9.2	叶片的强度和刚度计算	229
9.2.1	坐标的选取	229



9.2.2	叶片离心力计算	229
9.2.3	气动弯矩和扭矩的计算	232
9.2.4	应力计算及强度校核	232
9.2.5	变形计算及刚度校核	234
9.3	D8000型风机叶片	235
9.3.1	技术数据和技术要求	236
9.3.2	结构设计和制造工艺	237
9.3.3	强度、刚度计算	238

# 0 概 论

对于复合材料，与其说是材料，倒不如说是结构更为确切。从固体力学的角度分析，通常可把复合材料分为三个结构层次，我们分别称它们为一次结构、二次结构和三次结构。如图 0-1(a) 所示的纤维缠绕压力容器，可以称为三次结构，也就是通常所说的产品结构或工程构件。图 0-1(b) 所示为从容器壁上切取的壳元，可以称为二次结构，它是由若干具有不同纤维方向的单层材料按一定顺序叠合而成的层合板，层合板是结构的基本单元。图 0-1(c) 所示为层合板的一个个铺层，可以称为一次结构，又称单层，可见，单层是复合材料的基本单元。单层的力学性能取决于各组分材料（包括界面）的力学性能、各组分的含量以及各相之间的几何关系。层合板的力学性能取决于各单层的力学性能、各单层的厚度、铺设方向及叠层顺序。产品结构或工程构件的力学性能取决于层合板的力学性能和结构的几何形状与尺寸。

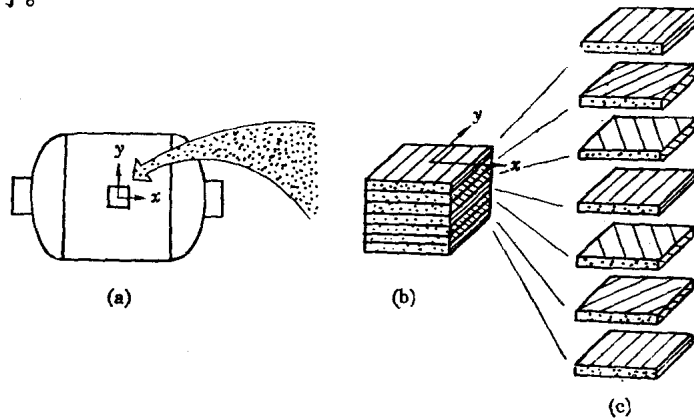


图 0-1 复合材料的三个结构层次

与上述三个结构层次的概念相对应，也可以将设计分为三个层次，即单层材料设计、层合板设计和结构设计。单层材料设计包括正确选用增强材料和基体，确定它们的体积含量。层合板设计就是根据单层的性能确定层合板中单层的取向、各单层的铺设顺序以及各定向单层的层数，层合板设计通常又称为铺层设计。结构设计则是根据层合板的力学性能来分析构件力学特性，并最终确定产品结构的形状和尺寸。由于人为划分的三个层次的结构其实是在同一个工艺流程中形成的，因此，这三个设计层次互为前提、互相影响，设计人员必须把材料性能和结构性能一起考虑，材料设计和结构设计必须同时进行。

上述多层次性为复合材料及其结构的设计带来了巨大的灵活性。复合材料和常规材料的显著区别在于它是一种非均质的、各向异性的、性能可设计的材料，因而它赋予设计者的自由度要大得多。为了获得优化的材料与结构，应该使复合材料的特点得到充分发挥。

# 1 单层板的刚度与强度

## 1.1 引言

本章从粗观力学角度讨论单层的刚度与强度。所谓“粗观力学”，是在研究复合材料力学性能时，假定材料是均质的，而将组分材料的作用仅作为复合材料的平均表现性能来考虑。在粗观力学中，各类材料参数只能靠宏观试验获得。

与均质材料所制成的结构不同，复合材料层合结构的分析必须立足于对每一单层的分析。由于存在不同的组分层，决定了层合结构的厚度方向具有宏观非均质性。为了得到层合结构的刚度特性，必须弄清楚各单层的刚度特性；为了对层合结构的强度作出判断，必须首先对各单层的强度作出判断。因此，单层的粗观力学分析是层合结构分析的基础。

### 1.1.1 单层板及其主方向

所谓“单层”，是指单向纤维或编织纤维（亦称织物）在基体中呈扁平状的层片。作为粗观力学的专用术语，它表示了层合结构的组分层的概念。按单层所含纤维方向，一般分为单向单层与双向单层。图 1-1(a) 所示为单向单层，又称无纬单层（简称单向板）；图

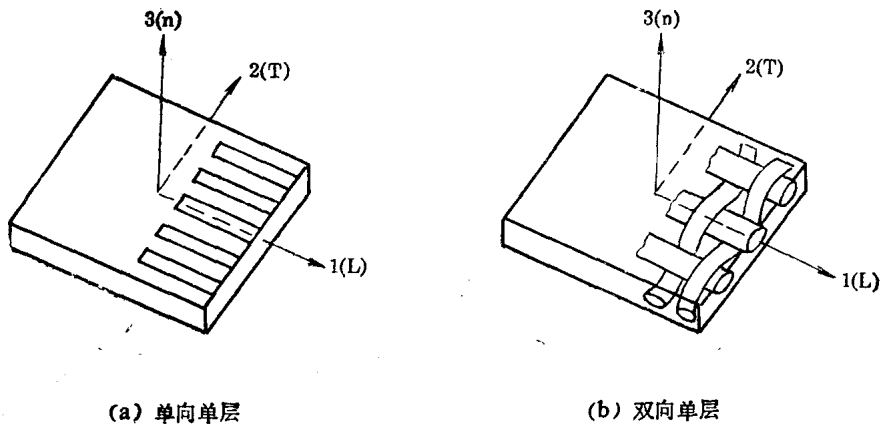


图 1-1 单层的两种类型

1-1(b)所示为编织纤维的单层，又称双向单层（简称双向板）。这种单层存在着两个特殊的互相垂直的平面。在此平面的对称方向上的力学性能相同，这样的材料称为正交异性材料。材料对称面的交线称为材料正轴。两个材料正轴方向分别用 1（或 L）和 2（或 T）表示。显然，正轴 1 与纤维方向（或编织纤维的经向）平行，正轴 2 在板的平面内与 1 方向垂直。当考虑三维问题时，另一个正轴 3（或 n）垂直于板平面。由于单层厚度与平面内长、宽相比很小，故一般按平面应力状态分析，即只考虑单层内应力，而不计单层法线方向的应力。事实上，纤维增强复合材料大多是板状结构，因而该假定与实际符合。

应当说明，双向单层可以简化为基体含量相同而厚度按经纬向纤维量来分配的两个互

相垂直的单向单层的层合，因此，单向单层更具有一般性。在以后的叙述中，单层均指单向单层。

为了便于后面的研究，本节先对复合材料的应力和应变的概念及符号作简要的说明。

### 1.1.2 应力

应力和应变是描述材料力学性能的基本变量。根据材料的应力-应变关系，可以确定材料的刚度、强度、变形及失效等有关性能与状态。

应力是分布内力的集度。应力与截面上点的位置有关，同一截面上不同的点处一般有不同的应力。然而在复合材料力学中，往往是指某一具体范围内的平均应力，即该范围内各点应力的平均值。将一个单层板厚度范围内得出的应力平均值称为单层板应力，而将沿层合板厚度范围内得出的应力平均值称为层合板应力。本章讨论单层板。在单层板面内的外力作用下，用  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ （或  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ ）表示正应力分量，用  $\tau_{12}$ （或  $\tau_{xy}$ ）表示剪应力分量（见图 1-2）。这里下角标 1 和 2 分别表示材料的两个主方向（或称正轴向）， $x$  和  $y$  分别表示两个任意的坐标轴方向（称为偏轴向）。相应地，1 轴和 2 轴称为正轴，所用坐标系 1-2 称为正轴坐标系； $x$  轴和  $y$  轴称为偏轴，所用坐标系  $x$ - $y$  称为偏轴坐标系。图 1-2(b) 单元体外法线方向  $x$  与材料主方向 1 之间的夹角为  $\theta$ ， $\theta$  角称为单层的方向角。

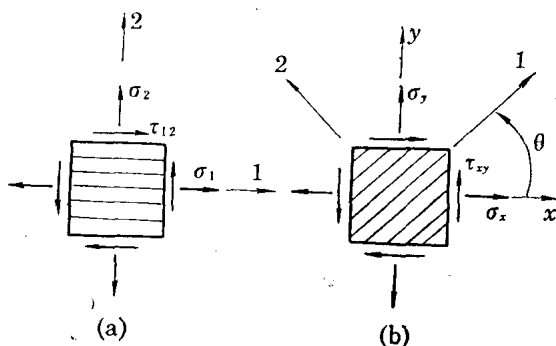


图 1-2 单层板的坐标系和相应的应力分量

正应力的符号：规定拉为正，压为负。剪应力的符号：规定正面正向或负面负向为正，否则为负。所谓正面是指截面外法线方向与坐标轴方向一致的面，否则称为负面；所谓正向是指应力方向与坐标方向一致的方向，相反时为负向。图 1-2 给出的正应力和剪应力都是正的。按照这一符号规则，可见正应力的符号规则与材料力学中的规定是一致的，而剪应力的符号规则与一般材料力学中的规定（剪应力企图使单元体顺时针向转时为正，逆时针向转时为负）不同。

### 1.1.3 应变

应变是对弹性体变形的度量。任何物体在外力作用下处于平衡状态时，其物体内部各点之间的距离将发生变化，这就形成了物体的变形。弹性体内任一点  $P$ ，沿  $x$  轴和  $y$  轴方向取两个微小线段  $\overline{PA} = dx$  和  $\overline{PB} = dy$ （图 1-3），假定弹性体受力后， $P$ 、 $A$ 、 $B$  三点分别移动至  $P'$ 、 $A'$ 、 $B'$ 。设  $P$  点在  $x$  方向的位移分量是  $u$ ， $P$  点在  $y$  方向的位移分量为  $v$ ，则  $A$  点在  $x$  方向的位移分量将是  $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ 。故线段  $\overline{PA}$  在  $x$  轴方向的线应变是

$$\epsilon_x = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

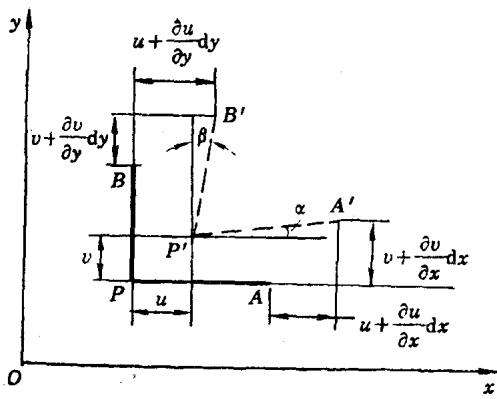


图 1-3 微体的变形

这里，由于位移极小， $y$  方向位移  $v$  引起  $\overline{PA}$  的伸缩为高阶微量，略去不计。

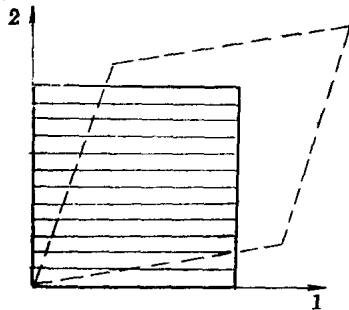
同理可得线段  $\overline{PB}$  的正应变是  $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$

$\overline{PA}$  与  $\overline{PB}$  所夹直角的改变定义为剪应变  $\gamma_{xy}$ 。由图 1-3 可知  $\gamma_{xy} = \alpha + \beta$ 。  
 $\overline{PA}$  线段的转角为

$$\alpha \approx \text{tg}\alpha = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) - v}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

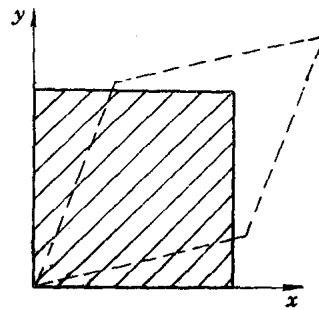
$\overline{PB}$  线段的转角为  $\beta = \frac{\partial u}{\partial y}$ ,

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$



(a)

(a) 产生  $\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma_{12}$



(b)

(b) 产生  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$

图 1-4 应变与坐标系的关系

对于单层板，在单层板面内的外力作用下，用  $\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma_{12}$  表示材料主方向（正轴向）相应的三个应变分量，如图 1-4(a) 所示；用  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$  表示两个任意坐标轴方向对应的三个应变分量，如图 1-4(b) 所示。

应变符号：正应变规定伸长为正，缩短为负。剪应变规定与坐标方向一致的直角减小为正，增大为负。即应变的符号规则与应力相对应，正值的应力对应于正值的应变。图 1-4 表示的应变均为正值。

## 1.2 单层板的正轴刚度

### 1.2.1 单层板的正轴应力-应变关系

单层板是正交各向异性材料，在其主方向上（正轴向）某一点处的正应变  $\epsilon_1, \epsilon_2$  只与该点处的正应力  $\sigma_1, \sigma_2$  有关，而与剪应力  $\tau_{12}$  无关。同时，该点处剪应变  $\gamma_{12}$  也仅与剪应

力  $\tau_{11}$  有关而与正应力无关。通常考虑复合材料处于线弹性、小变形情况，故叠加原理仍能适用，所以，全部应力分量引起某一方向的应变分量，等于各应力分量引起该方向应变分量的代数和。因而我们可以把组合应力看成单轴应力的简单叠加，利用单轴试验的结果建立正轴的应力-应变关系。

### A 纵向单轴试验

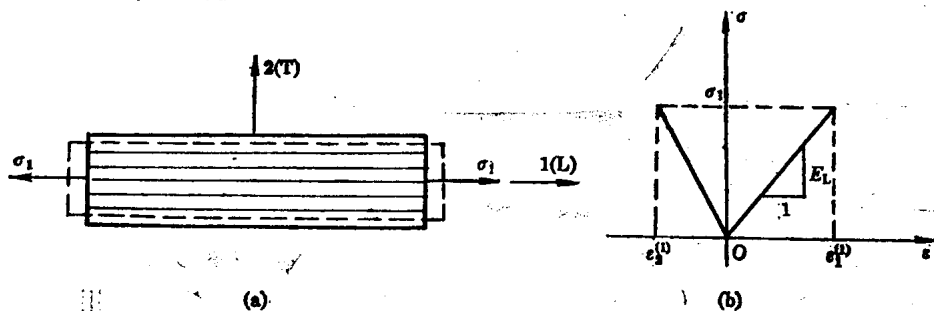


图 1-5 纵向单轴实验

图 1-5(a) 表示在纤维方向即材料主方向 1 承受单轴应力  $\sigma_1$ ，由此将引起双轴应变。在线弹性情况下试验的应力-应变曲线如图 1-5(b) 所示。由此可建立如下的应变-应力关系：

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1^{(1)} &= \frac{1}{E_L} \sigma_1, \\ \epsilon_2^{(1)} &= -\nu_{TL} \epsilon_1^{(1)} = -\frac{\nu_{TL}}{E_L} \sigma_1. \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

式中  $E_L$ ——纵向弹性模量；

$\nu_{TL}$ ——纵向泊松比，即  $\nu_{TL} = -\frac{\epsilon_2^{(1)}}{\epsilon_1^{(1)}}$ ；

$\epsilon_1^{(1)}$ ——由  $\sigma_1$  引起的纵向应变；

$\epsilon_2^{(1)}$ ——由  $\sigma_1$  引起的横向应变。

由试验得到的纵向弹性模量，反映了单层板纵向的刚度特性。在相同的  $\sigma_1$  作用下， $E_L$  越大， $\epsilon_1^{(1)}$  越小。纵向泊松比  $\nu_{TL}$  是单层板由纵向单轴应力引起的横向线应变与纵向线应变之比值。由于纵向伸长引起横向缩短，故置以负号。

### B 横向单轴试验

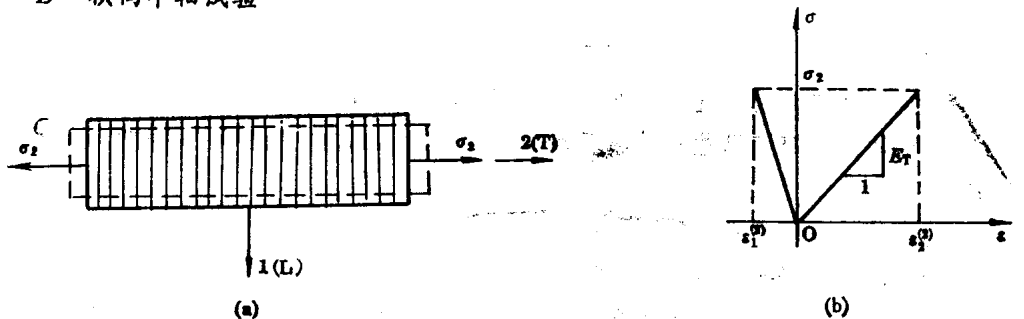


图 1-6 横向单轴实验

图 1-6(a) 表示在垂直于纤维方向即材料的另一主方向 2 承受单轴应力  $\sigma_2$ ，则由此也将引起双轴应变。其应力-应变曲线如图 1-6(b) 所示。由此即可建立如下的应变-应力关系：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_2^{(2)} &= \frac{1}{E_T} \sigma_2, \\ \varepsilon_1^{(2)} &= -\nu_{LT} \varepsilon_2^{(2)} = -\frac{\nu_{LT}}{E_T} \sigma_2. \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

式中  $\varepsilon_1^{(2)}$ ——由  $\sigma_2$  引起的纵向应变；

$\varepsilon_2^{(2)}$ ——由  $\sigma_2$  引起的横向应变；

$E_T$ ——横向弹性模量；

$\nu_{LT}$ ——横向泊松比，即  $\nu_{LT} = -\frac{\varepsilon_1^{(2)}}{\varepsilon_2^{(2)}}$ 。

试验得到的横向弹性模量反映了单层板横向的刚度特性。在相同的  $\sigma_2$  作用下， $E_T$  越大， $\varepsilon_2^{(2)}$  越小。横向泊松比  $\nu_{LT}$  是单层板由横向单轴应力引起的纵向线应变与横向线应变之比。由于横向伸长引起纵向缩短，故置以负号，使泊松比为正值。

### C 面内剪切实验

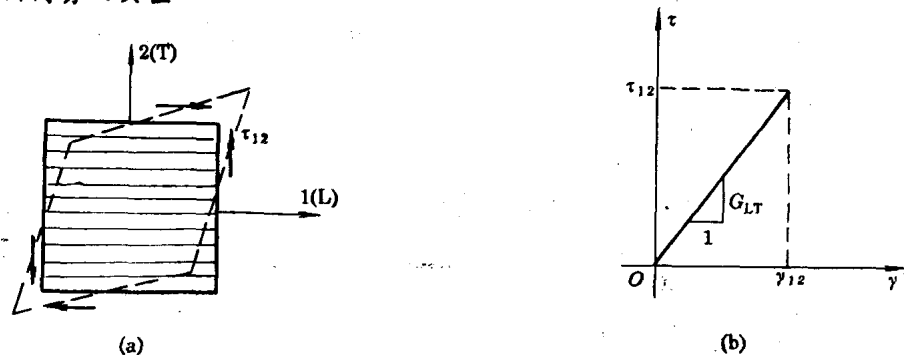


图 1-7 面内剪切试验

图 1-7(a) 表示单向板在材料的两个主方向上（即两个正轴向）处于纯剪应力状态。这纯剪应力状态可利用薄壁圆管的扭转试验等方法来实现。在纯剪应力状态下的应力-应变曲线如图 1-7(b) 所示。由  $\tau_{12}$  引起的剪应变为

$$\gamma_{12} = \frac{1}{G_{LT}} \tau_{12} \quad (1-3)$$

式中  $G_{LT}$  为面内剪切弹性模量（亦称纵横向剪切弹性模量）。

由试验测得的面内剪切弹性模量，反映了单层板在其面内的抗剪刚度特性。在相同的  $\tau_{12}$  作用下， $G_{LT}$  越大， $\gamma_{12}$  越小。

### D 单层板的正轴应力-应变关系

在线弹性范围内，图 1-2(a) 所示单层板主方向的复杂应力状态，可以化为由图 1-5(a)、图 1-6(a) 和图 1-7(a) 所示单层板主方向单向应力状态相叠加，其相应的应变状态也可以叠加。

当  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$  和  $\tau_{12}$  共同作用时，

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_1^{(1)} + \varepsilon_1^{(2)} = \frac{1}{E_L} \sigma_1 - \frac{\nu_{LT}}{E_T} \sigma_2, \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_2^{(2)} + \varepsilon_2^{(1)} = \frac{1}{E_T} \sigma_2 - \frac{\nu_{TL}}{E_L} \sigma_1, \\ \gamma_{12} &= \frac{1}{G_{LT}} \tau_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

式(1-4)是单层板在正轴向的应变-应力关系,也称为广义虎克定律。与通常金属材料的广义虎克定律是相类似的,只是材料的工程弹性常数不同。这里有五个工程弹性常数:  $E_L$ 、 $E_T$ 、 $\nu_{TL}$ 、 $\nu_{LT}$ 和 $G_{LT}$ 。由后面介绍的式(1-17)可知,其独立的工程弹性常数为四个。单层板的工程弹性常数很容易从材料的简单实验中测定,有时也可用分析的方法估算,其估算公式见3(第三章)。

单层板正轴向的应变-应力关系式(1-4)可以写成如下的矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{LT}}{E_T} & 0 \\ -\frac{\nu_{TL}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{pmatrix}. \quad (1-5)$$

式(1-5)中联系应变-应力关系的各个系数可以简单地记成:

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_L}, \quad S_{22} = \frac{1}{E_T}, \quad S_{66} = \frac{1}{G_{LT}}, \quad S_{12} = -\frac{\nu_{LT}}{E_T}, \\ S_{21} &= -\frac{\nu_{TL}}{E_L}, \quad S_{16} = S_{61} = S_{26} = S_{62} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

这些量称为柔量分量(或柔度分量),则式(1-5)可以写成

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{26} \\ S_{61} & S_{62} & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{pmatrix}. \quad (1-7)$$

缩写为  $\{\varepsilon_i\} = [S]\{\sigma_i\}$ 。

柔量分量与工程弹性常数的关系也可以写成如下形式:

$$\left. \begin{aligned} E_L &= \frac{1}{S_{11}}, \quad E_T = \frac{1}{S_{22}}, \quad G_{LT} = \frac{1}{S_{66}}, \\ \nu_{LT} &= -\frac{S_{12}}{S_{22}}, \quad \nu_{TL} = -\frac{S_{21}}{S_{11}}. \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

由式(1-4)解出 $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 和 $\tau_{12}$ ,可得到以应变为已知量,应力为未知量的应力-应变关系式:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= M E_L \varepsilon_1 + M \nu_{LT} E_L \varepsilon_2, \\ \sigma_2 &= M \nu_{TL} E_T \varepsilon_1 + M E_T \varepsilon_2, \\ \tau_{12} &= G_{LT} \gamma_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$



式中

$$M = \frac{1}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} \quad (1-10)$$

式(1-9)中应变项的各系数也可简单地记成:

$$\left. \begin{aligned} Q_{11} &= ME_L, & Q_{22} &= ME_T, & Q_{66} &= G_{LT}, \\ Q_{12} &= M\nu_{LT}E_L, & Q_{21} &= M\nu_{TL}E_T, \\ Q_{16} &= Q_{61} = Q_{26} = Q_{62} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

这些量称为模量分量(或刚度分量)。因此,式(1-9)也可写成以模量分量表示的应力-应变关系式:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (1-12)$$

缩写为  $\{\sigma_1\} = [Q]\{\varepsilon_1\}$ .

模量分量与工程弹性常数的关系也可以写成下述形式:

$$\left. \begin{aligned} E_L &= \frac{Q_{11}}{M}, & E_T &= \frac{Q_{22}}{M}, & G_{LT} &= Q_{66}, \\ \nu_{LT} &= \frac{Q_{12}}{Q_{11}}, & \nu_{TL} &= \frac{Q_{21}}{Q_{22}}. \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

模量矩阵与柔量矩阵互为逆矩阵。现证明如下:

因  $\{\sigma_1\} = [Q]\{\varepsilon_1\}$ ,  
 等式两端左乘  $[Q]^{-1}$ , 得  $[Q]^{-1}\{\sigma_1\} = [Q]^{-1}[Q]\{\varepsilon_1\}$ .  
 而  $[Q]^{-1}[Q] = [I]$ ,  $[I]\{\varepsilon_1\} = \{\varepsilon_1\}$ .

式中  $[I]$  是单位矩阵。

故  $\{\varepsilon_1\} = [Q]^{-1}\{\sigma_1\}$ .

比较式(1-7)可得

$$[Q]^{-1} = [S] \quad (1-14)$$

综上所述,单层板的正轴刚度可以用不同的三组材料常数来描述。这三组常数之间是可以互换的,而这三组材料常数又是各有用处的。工程弹性常数是由简单试验测得,它们在描述刚度性能的物理意义上是比较明确的。柔量分量用于从应力计算应变,它与工程弹性常数的互换非常简单。模量分量用于从应变求应力,它是计算层合板刚度的一组基本常数。

### 1.2.2 模量与柔量的对称性

由上述可知,用三组材料常数来描述单层板的正轴刚度都有五个量。我们将证明这五个量不是独立的,独立的只有四个,它们之间存在一个关系式,即模量或柔量都存在对称性: