大学

数学系

自学丛书

常微分方程

CHANGWEIFEN FANGCHENG

大学数学系自学丛书

常微分方程

东北师范大学

任永泰　史希福　主编

辽 宁 人 民 出 版 社

一九八四年·沈阳

常 微 分 方 程

Changweifen Fangcheng

任永泰　史希福　主编

辽宁人民出版社出版　辽宁省新华书店发行

（沈阳市南京街6段1里2号）沈阳市第一印刷厂印刷

字数：450,000　开本：850×1168 1/32　印张：21 1/4　插页：2

印数：1—13,000

1984年10月第1版　1984年10月第1次印刷

责任编辑：俞晓群　王越男　插　图：孙丽华

封面设计：安今生

统一书号：7090·291　定价：2.80元

出 版 说 明

为了适应广大在职人员和社会青年自学成才的需要，根据国家建立高等教育自学考试制度的精神，以满足学员自学教材的要求，由辽宁人民出版社出版一套大学数学系自学丛书。

本丛书是由东北师范大学数学系，根据教育部规定的普通高等院校本科必修课现行教学计划和教学大纲编写的。教材内容系统，数据充实，条理清晰，深入浅出；每章均有学习指导和习题解答，便于自学。经过刻苦自学，即可无师自通，达到本科毕业水平。

本丛书有：空间解析几何、高等代数、数学分析、高等几何、常微分方程、复变函数论、近世代数、实变函数论、微分几何、计算机与算法语言 BASIC、概率论与数理统计、计算方法等。本丛书既可供自学应试之用，也可供大专院校的本科在校生和函授生及业余大学学生使用。

本丛书由于水平所限，不当之处在所难免，我们热诚希望广大自学读者批评指正。

AAI 94/25

目 录

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第一部分　常微分方程

第一章　初等积分法

微分方程的古典内容主要是求方程的解. 用积分的方法求微分方程的解,叫作初等积分法. 在微分方程中,可用积分法求解的类型叫作可积类型.

本章分为九节，其中第一节为基本概念，第二节到第六节研究一阶微分方程中，几种可积类型的初等积分法. 第八节和第九节则分别研究高阶微分方程,和微分方程组的初等积分法.

§1·1　微分方程和解

1　微分方程　什么是微分方程？它是怎样产生的？这是首先要解决的两个问题. 为此，我们从代数方程讲起.

在代数中我们研究过解高次方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

在数学分析中也研究过由隐式

$$F(x,y) = 0$$

确定隐函数　$y = \varphi(x)$的问题.

上面两个问题都是求方程的解,它们的区别只是方程不同. 前一个方程是由数和未知量x 组成的等式，它的解是数. 而后一个方程是由自变量 x　和函数 y　组成的等式，它的解是函

数.

无论求高次方程的解或求隐函数，都是我们熟悉的解方程问题. 以后我们把这种方程叫作有限方程.

如果在方程中，含有自变量、未知函数以及未知函数的导数，如

$$F(x, y, y') = 0$$

这种方程就是我们要研究的微分方程. 这种方程从性质和解法上，与前述有限方程都完全不同. 这种方程和实际联系非常密切. 下面我们将通过几何、化学和力学三个方面，来谈它和实际的联系.

（1）一个几何问题 在 xoy 平面上，求其有以下性质的曲线：它上面任一点 $P(x,y)$ 的切线均与坐标原点到该点 P 的直线垂直.

为了求出具有上述性质的曲线，我们可以根据曲线所具有的性质建立起一个等式.

设所求曲线为

$$y = y(x)$$

如图 1.1，过点 P (x, y) 曲线的切线斜率为 $\frac{dy}{dx}$，又 OP 的斜率为 $\frac{y}{x}$，因为二者垂直，则有

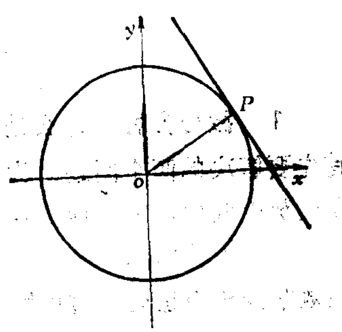

图1·1

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{y}{x} = -1$$

或

$$y' = -\frac{x}{y}$$

等式中含有自变量 x，未知函数 y 以及 y'，这就是微分方

程．解出满足等式的函数，就得到所求的曲线．

（2）**放射性元素的衰变** 镭和铀等放射性元素，因其不断地放射各种射线，从而减少其质量．由实验知道，衰变速度与剩余物的质量成正比，试求质量与时间的函数关系．

设 t 时刻元素的质量为 x，即

$$x=x(t)$$

t 时刻的衰变速度，即质量 x 关于时间 t 的变化率为 $\frac{dx}{dt}$，由于衰变速度与剩余质量成正比，于是有

$$\frac{dx}{dt}=-kx \qquad (k>0 \text{ 比例系数})$$

因放射性元素在衰变过程中质量逐渐减少，质量变化率为负，故在上式右端加一个负号．

这样就列出了放射性元素衰变的微分方程．

（3）**单摆振动** 设有质量为 m 的摆锤，用长为 l 的细线悬挂在 O 点（如图 1·2），让它在重力作用下，于铅直平面内，沿一圆弧左右摆动，试求摆锤的运动方程．

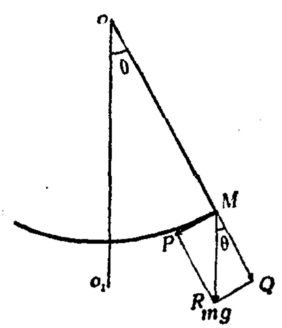

图1·2

如图 1·2，过点 O 作铅垂线 OO_1，把这一方向取为零度，摆线在其右侧与它所成的角规定为正角，在其左侧与它所成的角规定为负角．

摆在振动过程中，摆线与铅垂线 OO_1 所成的角度 θ 是时间 t 的函数 $\theta=\theta(t)$．

设在时刻 t 角度为 θ，摆锤沿圆弧运动时的切向速度 $v=l\frac{d\theta}{dt}$．将作用在摆锤上 M 点处的重力 $\overrightarrow{MR}$，沿摆线方向和圆

弧上M点处的切线方向分解，分别得到矢量$\overrightarrow{MQ}$及$\overrightarrow{MP}$，其中$\overrightarrow{MP}$使摆锤沿圆弧摆动.

由于在摆锤的运动过程中，作用在摆锤上的力$\overrightarrow{MP}$，总是使摆锤向平衡位置运动，也就是当角θ为正时，向θ的减小方向运动；当角θ为负时，向θ的增大方向运动. 所以$\overrightarrow{MP}$的数值为$-mg\sin\theta$.

由牛顿(Newton)第二定律，有

$$m\frac{dv}{dt}=-mg\sin\theta$$

因为

$$v=l\frac{d\theta}{dt}$$

所以

$$\frac{dv}{dt}=l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

于是有

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\sin\theta$$

即

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

于是列出了单摆振动的微分方程.

从上面的三个例子可以看出，在实际中有许多事物不能直接找出量之间的相依规律，但是却容易找到这些量与其导数（或微分）之间的关系式，这种关系式就是微分方程. 求出这种微分方程的解，或对方程进行定性研究，就能得到事物的变化规律.

几个基本概念

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

微分方程 含有未知函数的导数（或微分）的等式。

例如

(1) $\dfrac{dx}{dt}=x^2+t^2$ (2) $\dfrac{d^2y}{dt^2}=a^2y$

(3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ (4) $xdy+y^2dx=0$

常微分方程 未知函数是一个变元的函数，由这样的函数及其导数构成的等式。

例如

(5) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ (6) $m\dfrac{d^2x}{dt^2}+k\dfrac{dx}{dt}+nx=0$

(7) $a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x)$

偏微分方程 未知函数是两个或两个以上变元的函数，由这样的未知函数及其偏导数构成的等式。

例如

(8) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ (9) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

微分方程的阶 在微分方程中，未知函数最高阶导数的阶数，称为方程的阶。

如（1），（4），（5）为一阶常微分方程；（2），（6）为二阶常微分方程；（7）为 n 阶常微分方程；（8）为一阶偏微分方程；（3），（9）为二阶偏微分方程。

2 微分方程的解

微分方程的解 一个函数代入微分方程中去，使得它成为关于自变量的恒等式，称此函数为微分方程的解。

由于微分方程的解是函数，这个函数代入方程，是经过微分运算使等式成立的，因此，微分方程的解有无穷多个。

以最简单微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x) \tag{1·1·1}$$

为例，由于积分后得

$$y=\int f(x)\,dx+c \tag{1·1·2}$$

显然函数(1·1·2)是方程(1·1·1)的解．因为解中含有任意常数 c,所以方程(1·1·1)有无穷多个解．

通解 n 阶方程，其解中含有 n 个（独立的）任意常数，此解称为方程的通解．由隐式表出的通解称为通积分．

特解 给通解中的任意常数以定值，所得到的解称为特解．由隐式表出的特解称为特积分．

例 1 已知方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \tag{1·1·3}$$

因函数 $y=cx$（c 为任意常数）代入方程(1·1·3) 后，使两端恒等，并且此解中含有一个任意常数，所以它是方程(1·1·3)的通解．

例 2 考虑方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \tag{1·1·4}$$

由方程

$$x^2+y^2=c\ （c\ 为任意常数） \tag{1·1·5}$$

所确定的隐函数为方程(1·1·4) 的解．为了考察这点，把 y 看作 x 的函数，对等式(1·1·5)两端关于 x 求导数，得

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0 \quad 或 \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

由此知(1·1·5)是方程(1·1·4)的通积分．

通过微分方程研究实际问题时，因为要求的是具体问题的变化规律．因此，在求解过程中，要对所求的解加以限定条件

(或附加条件)。比如，在上面提到的放射性物质衰变问题，当我们要求的是 t_0 时刻质量为 m_0 的放射性物质衰变规律时，则对于解应加条件

$$t = t_0, \quad x = m_0, \quad 或 \quad x(t_0) = m \qquad (1\cdot1\cdot6)$$

此时把求方程 $\frac{dx}{dt} = -kx$ 满足条件 (1·1·6) 的解称为初值问题。

一阶微分方程初值问题的提法是：求方程

$$F(x, y, y') = 0$$

满足条件

$$x = x_0, \quad y = y_0 \quad (x_0, y_0 \text{ 为常数}) \qquad (1\cdot1\cdot7)$$

的解 $y = y(x)$。

常数 x_0, y_0 称为初始值，条件 (1·1·7) 称为**初始条件**。

初值问题解 微分方程满足给定初始条件的解。

如在例 1 中求方程满足初始条件

$$y(2) = 4$$

的解。将初始值 $x = 2$, $y = 4$ 代入通解 $y = cx$ 中，得

$$4 = 2c \quad 即 \quad c = 2$$

于是解

$$y = 2x$$

即为满足给定初始条件的解。

综上所述，可以得到初值问题解的求法：将初始值代入通解中去，确定通解中的任意常数的值，然后将通解中的任意常数换成所确定的值，如此即得所求的初值问题解。

3 解的几何解释 例 1 和例 2 两个一阶方程的通解（或通积分），分别为

$$y = cx \quad 和 \quad x^2 + y^2 = c$$

它们表示直线族（图1·3）和圆族（图1·4）。

微分方程的解所表示的曲线叫**积分曲线**。

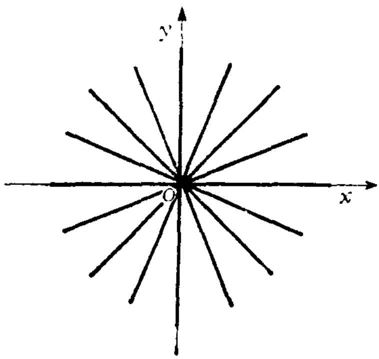

图1·3

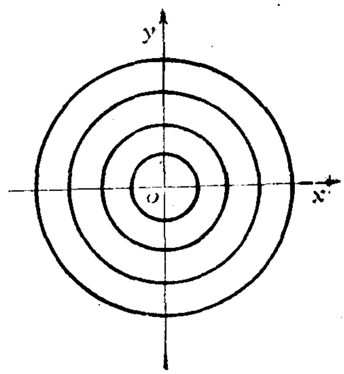

图1·4

在代数方程中，方程 $f(x)=0$ 的根 x_0，从几何上来看，是曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴交点的坐标．正如我们所了解的那样，方程式的根有了这种直观的几何解释之后，在方程式的研究中有很大的好处．和代数方程类似，微分方程的解所表示的曲线(积分曲线)，在微分方程所确定的方向场中有几何解释．它在微分方程研究中，也起着重要作用．下面我们介绍方向场概念．

方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

所确定的方向场：如果 $f(x,y)$ 在 xoy 平面的某个区域 D 上有定义，过区域 D 上任一点 $M(x_0, y_0)$，以此点的函数值 $f(x_0, y_0)$ 为斜率作一个方向（直线段），在区域 D 的每个点上都如此，此时我们称区域 D 联同它在各点处的方向，为已知方程在 D 上的方向场．

积分曲线在方向场中的性质：方程 $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ 的积分曲线，在其上每点的切线方向，均与方程所确定的方向场在该点

的方向相同.

实际上，方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$的积分曲线 $y=\varphi(x)$，在其上任一点 $M(x,\varphi(x))$ 的切线斜率为$\frac{d\varphi(x)}{dx}=f(x,\varphi(x))$， 而方向场在点$M(x,\varphi(x))$的方向斜率，按方向场的规定也是$f(x,\varphi(x))$. 因此，过这点曲线的斜率和这点方向场的方向斜率相同，所以积分曲线在点 $M(x,\varphi(x))$ 处与方向场该点的方向相切.

反之，如果在区域D上有一曲线 $y=\varphi(x)$，它在各点处的切线均与该点方向场的方向一致，则 $y=\varphi(x)$ 是已知方程的积分曲线.

实际上，$\frac{d\varphi(x)}{dt}$表示曲线 $y=\varphi(x)$在 x 点处切线斜率，$f(x,\varphi(x))$ 表示方向场在点$(x,\varphi(x))$处所对应的方向的斜率，由于二者相等，即$\frac{d\varphi(x)}{dx}=f(x,\varphi(x))$，且对于 $y=\varphi(x)$上任一x 皆成立，故有恒等式

$$\frac{d\varphi(x)}{dt}\equiv f(x,\varphi(x))$$

于是曲线$y=\varphi(x)$是已知方程的解曲线（积分曲线）.

在例 1 中，方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

的方向场由函数$\frac{y}{x}$确定，因此在 xoy 平面上，除原点以外，每一点都可以确定一个方向，此方向恰好和由原点到此点向径的方向一致（如图 1·5）.

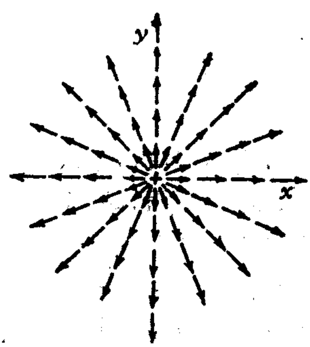

图1·5

方程的通解 $y=cx$，所确定的积分曲线族，如图1·5，为过

原点的线束．很明显，除原点外积分曲线在各点上均与方向场在该点的方向相切．

在例 2 中，方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

的方向场由函数 $-\frac{x}{y}$ 确定，由于

$$\frac{y}{x}\cdot\left(-\frac{x}{y}\right)=-1$$

可知此方向场在各点上的方向恰与前一个方向场的方向垂直(如图 1·6)．所以已知方程的积分曲线为以原点为中心的圆族．其上每一点恰好与方向场在该点的方向相切．

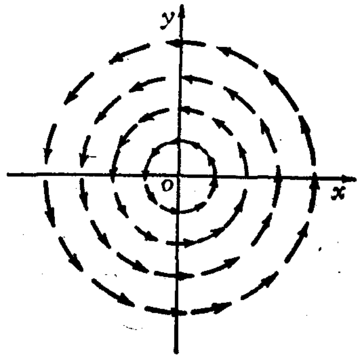

图1·6

积分曲线的这种性质，给我们提供了确定积分曲线的几何依据，方便了对解的研究．在方程无法求解的情况下，我们可以通过在方向场画积分曲线的方法找出近似解来．

例 3 方程

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{x^2+y^2}$$

这个方程不能用初等积分法求解，也就是说不能象例 1 、例 2 那样，把通解用解析式表出．为了研究方程的解，我们可以在方向场中，把积分曲线的走向大致描绘出来．

为了作出方程的方向场，抓住具有规律性的东西，我们可先找出方向场中有相同方向的点的轨迹，这样的曲线我们叫作等倾线．例如斜率为k的等倾线为

$$\sqrt{x^2+y^2}=k \quad 或 \quad x^2+y^2=k^2$$

它们是从原点为中心，以k为半径的圆，在圆上所有点方向场的方向都相同，斜率都是 k(如图1·7)．用这种方法画出方向场之

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com