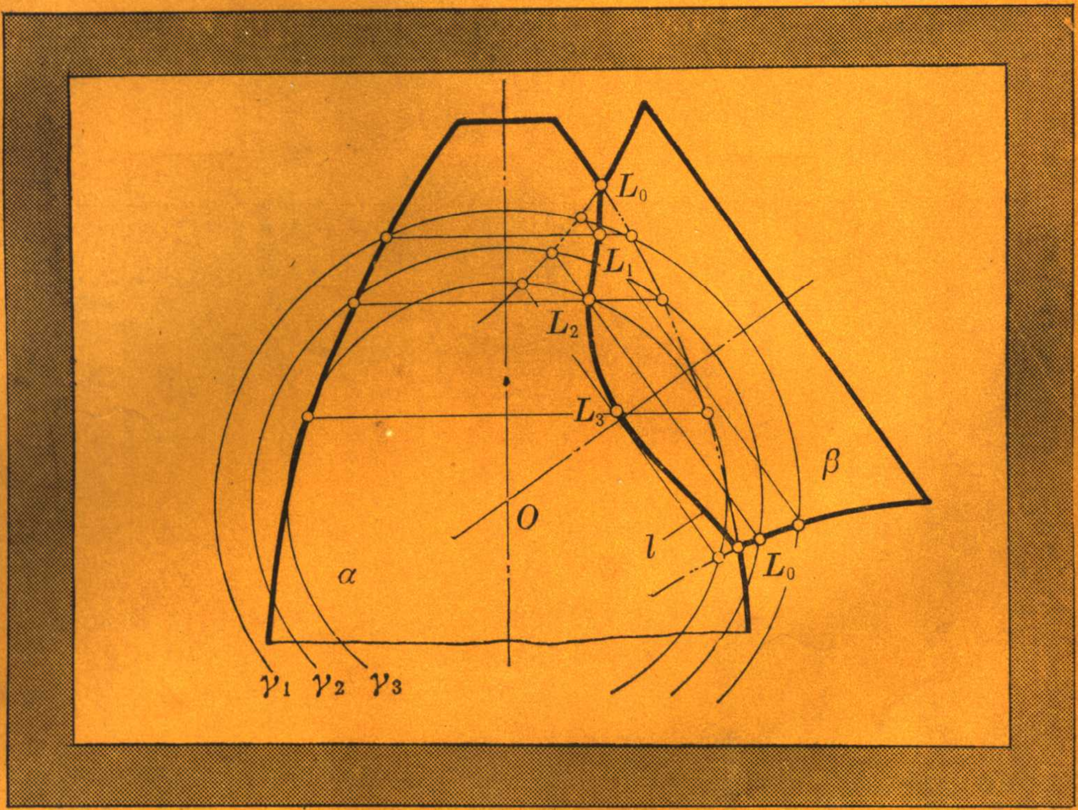
画法几何学

[苏] C. A. 弗罗洛夫 著
北京工业学院制图教研室 译



算 法

$(\forall L)(L \in l)[L_i = (\alpha \cap \gamma_i) \cap (\beta \cap \gamma_i)]$

流 程

$\mathrm{IX}b_1\ \mathrm{IX}b_2\ \mathrm{V}_3\ \mathrm{XII}b_4\ \mathrm{I}_5\ \mathrm{I}_6\ \mathrm{V}_7;\ \mathrm{XII}b_8\ \mathrm{I}_9\ \mathrm{I}_{10}\ \mathrm{V}_{11};\cdots$

n

高等教育出版社

画法几何学

[苏] C.A.弗罗洛夫 著
北京工业学院制图教研室 译

高等教育出版社

内容简介

本书系根据苏联 С. А. Фролов 所著《Начертательная геометрия》(1978 年版)译出，原书是按 1976 年苏联高等工业院校《画法几何学教学大纲(非土建类专业)》编写的教科书。该书在取材、立论、体系和风格上均不同于近年出版的同类教材。其特点是：对画法几何学的内容叙述顺序采取从一般到特殊的原则；用比较严密的定义、定理和算法揭示画法几何学的内在规律；用现代数学集合论和数理逻辑的概念描述图示、图解过程；介绍电子计算机技术在图解中的应用。

全书主要内容有：投影法，几何图形的正投影，正投影变换法，定位问题，度量问题，曲面展开，轴侧投影，数字电子计算机在图解中的应用。

本书末附有习题 232 个，系由与原书配套的《画法几何习题集》(С. А. Фролов, «Сборник задач по начертательной геометрии», Москва, Машиностроение, 1980)译出。

本书可供高等工业院校师生、中等专业学校教师以及有关科技人员阅读参考。

画法几何学

[苏] C.A.弗罗洛夫 著

北京工业学院制图教研室 译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

黑龙江省克山县印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 15.25 字数 350,000

1982 年 12 月第 1 版 1983 年 9 月第 1 次印刷

印数 1～11,500

书号 15010·0463 定价 1.95 元

译　序

本书原著是由C.A.弗罗洛夫(莫斯科鲍曼工学院)根据1976年苏联高等工业院校《画法几何学教学大纲》编写的教科书。该书在取材、立论、体系和风格上均有独到之处。其特点是采取从一般到特殊的原则讲述各章内容,使内容更显得系统完整,同时它用比较严密的定义、定理和算法揭示了画法几何学的内在规律,并用集合论的概念描述图示、图解过程,特别是介绍了计算机技术在图解问题中的应用,赋予画法几何以现代化的内容。此外,作者还概括叙述了透仿变换、拓扑变换、微分几何等学科的基本定义和概念,这对读者加深对本学科的理解很有好处。

另外,与原著配套的同一作者所著《画法几何习题集》中包括有基本概念、例题、问题、习题等内容。为避免重复,我们摘译了习题部分作为附录列于书后,便于读者参考。附录中习题的编排顺序,与正文基本一致,但个别地方有出入,请读者留意。

原书插图均用彩色,且每种颜色图线具有特定的含意。译本为单色图,图线规格不完全符合我国标准(GB126—74),望读者谅解。原著所列参考文献,凡已有中译本者,均译为中译本名。原文、原图中的错误,译本均作了更正,并标注“*”号,个别地方还附有译注说明。

本书可供高等工业院校师生及有关科技人员阅读参考。

限于水平,错误不当之处在所难免,诚望读者惠于指正。

参加本书翻译的有:丁泉初、王锦章、叶玉驹、狄蕾、陈笑琴、陈培泽、简召全等同志,由刁宝成、齐信民主译。附录部分由李肇荣同志翻译,王世娴同志校阅,在此表示感谢。

一九八二年十二月

前　言

画法几何的许多方面是以初等几何的概念、定义和定理为基础的。

由于近年来在普通中学的数学教学，特别是在几何教学中出现了一些极为重要的变化，以致迫切需要对画法几何教材内容作一些修正，才能使它与普通几何的最新内容相适应。

本教材的显著特点在于它在编写时考虑了中学几何教学大纲的变化：

a）我们在阐述概念和定义时，正如现代几何那样，是从几何图形的集合概念出发的。

b）用几何语言来表示几何图形与它们之间的关系，并书写命题和算法，这些几何语言都是由中学数学新教材和大学高等数学中所采用的符号和标记组成的。

本教材内容完全符合高等工业学校画法几何新的(1976 年)教学大纲（土木工程和建筑专业除外）。

在内容的叙述方面，作者力图使本书的篇幅符合画法几何最新教学计划所规定的学时数。

采取如下原则改变教材的系统结构从而缩减了篇幅：

a）在内容的叙述方面采用从一般到特殊，而不是象大多数画法几何教材那样从特殊到一般；

b）单独列两章讨论求解几何图形的定位问题和度量问题，而不是象通常采用的那样分散到各章中去；

c）定理的证明，新的定义和命题的阐述，均以平行投影的不变性为基础。这样编排教材，可以保证避免重复，而更重要的是它能赋予教材更多的理论根据。

尽管篇幅缩减了，但诸如“线”和“面”（第二章），“正投影变换法”（第三章）等重要章节都比大多数现行教材叙述的更为详尽。此外，还增加了新的一章“电子数字计算机在图解中的应用”（第八章）。

目　录

绪　论

画法几何是几何学的一个分支，它是根据点、线、面的投影来研究由它们所构成的空间形体。

画法几何的基本任务之一是建立一种在平面上表达三维形体，并根据此形体的平面投影研究解答其定位问题和度量问题的方法。

就其内容和方法而言，画法几何在其它学科当中占有特殊的地位，它是发展人们空间想象力的最好手段，若没有这种空间想象力任何一个工程上的创造都是不可思议的。

画法几何是制图——人类思维独创性的发明——的理论基础。

图是一种独特的语言，借助于图，人们只需用点、线和有限数量的几何符号与数字就能把几何形体及其组合体（机器，仪器和工程建筑等等）表达在曲面特别是平面上。并且这种图示语言是国际性的，每个技术上的内行人员都能明白，而与他用什么语言讲话无关。

用画法几何的方法解题是借助于作图来完成的。确定两线的交点是解题过程中必须完成的最简单的几何运算。鉴于一切几何作图都只用直尺和圆规来完成，那么需要确定交点的线就是一些直线和圆。换言之，按照画法几何的定理和规则所确定的顺序画一些直线和圆弧（个别情况画部分非圆曲线）就可解决各科技领域的复杂问题。

把解题过程分解为简单的、同类型的运算，就可以使用迭代法解题。这就自然地并容易地应用计算机技术实现解题自动化。

在航空和汽车工业中，在建造船体、制造船舶推进器以及许多其它技术领域中，以预先给定的参数设计外形复杂的曲面时，使用画法几何的方法是唯一合理的。在研究多元系状态图和合金状态图时，其它方法已不再适用，而多维画法几何的研究成果却得到了应用。

在建筑学、工程建设、造型艺术方面画法几何的作用是众所周知的。

利用画法几何所研究的投影法，可以把设计的产品和成套设备形象地表示出来。

正因为有了画法几何，才有可能把复杂的地形、地貌表示在平面上，并且能用简单的图解法解决道路、河道、隧道的设计问题以及确定其土石方工作量。

当被研究的事物性质伴之以为人们易于理解的直观几何模型说明时，自然科学就更加繁荣。

因为图解法可以解决数学问题，所以画法几何的方法广泛应用于物理学、化学、力学、结晶学和其它许多学科中。

正如数学的其它分支一样，画法几何还能够发展人们的逻辑思维能力。

以上指出的还远非构成画法几何研究对象的全部内容，但毫无疑义，画法几何是组成基础工程教育的主要学科之一。

符号和标记

为表示几何图形及其投影，为反映几何图形之间的关系，以及为了简要描述几何命题、解题算法和定理证明，本教材中，采用了数学教材中(包括中学新的几何教材)使用的符号和标记组成的几何语言。

所有术语和标记以及它们之间的关系分为两类：

第Ⅰ类——**几何图形及其相互关系的符号；**

第Ⅱ类——**构成几何语言语法基础的逻辑运算符号。**

下面列出了本教材中使用的并在学校学过的数学符号全表。要特别注意那些标志几何图形投影的符号。

第Ⅰ类 表示几何图形及其相互关系的符号

A. 几何图形符号

1. 表示几何图形——Φ。

2. 用大写拉丁字母或阿拉伯数字表示空间的点：

$$A, B, C, D, \cdots, L, M, N, \cdots$$

$$1, 2, 3, 4, \cdots, 12, 13, 14, \cdots$$

3. 用小写拉丁字母表示对投影面为任意位置的线：

$$a, b, c, d, \cdots, l, m, n, \cdots$$

投影面平行线：

h——水平线；

v——正平线；

w——侧平线。

也可用下列符号表示直线：

(AB)——过点A和点B的直线；

$[AB)$——从起始点A所引的射线；

$[AB]$——由点A和点B限定的直线段。

4. 用小写希腊字母表示面：

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots, \zeta, \eta, \theta, \cdots$$

为了强调面的给定方法，有时标出确定该面的几何元素。

5. 角度表示为：

$\angle ABC$——以点 B 为顶的角；或$\angle\alpha^\circ$，$\angle\beta^\circ$，$\angle\gamma^\circ$，…，$\angle\varphi^\circ$…。

6. 用两个竖直的线段——| |表示空间元素间的距离。

例如：

$|AB|$——由点 A 到点 B 的距离（线段 AB 的长度）；

$|Aa|$——由点 A 到线 a 的距离；

$|A\alpha|$——由点 A 到面 α 的距离；

$|ab|$——线 a 和线 b 之间的距离；

$|\alpha\beta|$——面 α 和面 β 之间的距离。

7. 用符号∧置于角的上方表示角的大小（度数的量）：

$\widehat{ABC}$——表示$\angle ABC$大小；

$\widehat{\varphi}^\circ$——表示$\angle\varphi^\circ$大小。

用扇形圆弧内加一点表示直角。

8. 用下列符号表示坐标投影面：H, V, W。

H——水平投影面；

V——正立投影面；

W——侧立投影面。

变换投影面时，新投影面仍用原投影面字母，但在下角加注数字表示，如 $H_1, V_1, W_1, H_2, V_2, W_2$ 等。

9. 投影轴以 x, y, z 表示，

x——横坐标轴；

y——纵坐标轴；

z——高坐标轴；

k——蒙日图上的定直线。

投影轴的交点用字母 O 表示。

10. 任何几何图形的点、线、面的投影，仍用其原来的字母（或数字）并附以上标“$'$”、“$''$”、“$'''$”表示，所加上标与所在投影面上的投影一致：

$A', B', C', D', \cdots, L', M', N', \cdots$——点的水平投影；

$A'', B'', C'', D'', \cdots, L'', M'', N'', \cdots$——点的正面投影；

$A''', B''', C''', D''', \cdots, L''', M''', N''', \cdots$——点的侧面投影；

$a', b', c', d', \cdots, l', m', n', \cdots$——线的水平投影；

$a'', b'', c'', d'', \cdots, l'', m'', n'', \cdots$——线的正面投影；

$a''', b''', c''', d''', \cdots, l''', m''', n''', \cdots$——线的侧面投影；

$\alpha', \beta', \gamma', \delta', \cdots, \zeta', \eta', \theta', \cdots$——面的水平投影；

$\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta'', \cdots, \zeta'', \eta'', \theta'', \cdots$——面的正面投影；

$\alpha''', \beta''', \gamma''', \delta''', \cdots, \zeta''', \eta''', \theta''', \cdots$——面的侧面投影。

11. 面的迹线仍用代表该面的字母，并附以下标"H"、"V"、"W"表示，下标指出迹线所在的投影面。

如：α_H——面 α 的水平迹线；

α_V——面 α 的正面迹线；

α_W——面 α 的侧面迹线。

12. 直线的迹点仍用代表该直线的字母，并附以下标"H"、"V"、"W"表示，下标指出迹点所在的投影面。

如：a_H——直线 a 的水平迹点；

a_V——直线 a 的正面迹点；

a_W——直线 a 的侧面迹点。

13. 点、线（或其它任何图形）的序列附以下标"1"、"2"、"3"、…、"n"表示：

$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$;

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$;

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$;

$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \cdots, \Phi_n$ 等。

为了求几何图形的真实大小，由投影变换得到点的辅助投影，用代表该点的同一字母加下标"0"表示：

$A_0, B_0, C_0, D_0, \cdots$，等。

轴测投影

14. 点、线、面的轴测投影，用其原字母加上标"0"表示：

$A^0, B^0, C^0, D^0, \cdots$;

$1^0, 2^0, 3^0, 4^0, \cdots$;

$a^0, b^0, c^0, d^0, \cdots$;

$\alpha^0, \beta^0, \gamma^0, \delta^0, \cdots$。

15. 次投影加下标"1"表示：

$A_1^0, B_1^0, C_1^0, D_1^0, \cdots$;

$1_1^0, 2_1^0, 3_1^0, 4_1^0, \cdots$;

$a_1^0, b_1^0, c_1^0, d_1^0, \cdots$;

$\alpha_1^0, \beta_1^0, \gamma_1^0, \delta_1^0, \cdots$ 等等。

B. 几何图形相互关系的符号，标记

序号	符号	内　　容	标记书写举例
1	$=$	重合，相等，作用结果	$(AB)=(CD)$——过点 A 和 B 的直线与过点 C 和 D 的直线重合； $\lvert AB\rvert=\lvert CD\rvert$——线段 AB 与 CD 长度相等
2	$\cong$	全等	$\angle ABC\cong\angle MNK$——角 ABC 全等于角 MNK
3	$\backsim$	相似	$\triangle ABC\backsim\triangle MNK$——三角形 ABC 与 MNK 相似

（续）

序号	符号	内容	标记书写举例
4	//	平行	$\alpha // \beta$——平面α平行于平面β
5	$\perp$	垂直	$a \perp \alpha$——直线a垂直于平面α
6	$\dot{-}$	相错	$a \dot{-} b$——直线a与b相错
7	$\rightarrow$	映射	$\Phi_1 \rightarrow \Phi_2$——图形$\Phi_1$映射到图形$\Phi_2$
8	S	投影中心。若投影中心是非固有点，则字母附以表示无穷远的下标——S_∞，并应指出投影方向	
9	s	投射方向	
10	P	平行投影	P_s^α——以方向s向平面α作平行投影

C. 集合论符号

序号	符号	内容	标记书写举例	在几何学中标记书写举例
1	$A, B, C, \cdots$	集合		
2	$a, b, c, \cdots$	集合的元素		
3	$\{\cdots\}$	由…组成	$M\{a, b, c\}$ 集合M由(且仅由)元素a, b, c组成	
4	$\{x: R(x)\}$	具有性质$R(x)$的一切x组成的集合	$L=\{x: 2<x<3\}$ L——满足给定不等式的数x的集合	$c=\{x: \|Ox\|=R\}$ 圆周c是距点O等于R(圆半径)的点x的集合
5	$\varnothing$	空集	L——$\varnothing$ 集合L是空集(不包含元素)	
6	$\in$	属于，是…的元素	$2 \in N$ 数2属于集合N（N——自然数的集合） $N \ni 3$ 集合N包含数3	$A \in a$ 点A属于直线a(点A在直线a上) $b \ni M$ 直线b包含(通过)点M
7	$\subset$	包含于	$N \subset R$ 集合N是一切有理数集合R的一部分(子集) $N \supset A$ 自然数集合N包含偶数集合A	$a \subset \alpha$ 直线a包含于平面α（意思是：直线a的点集是平面α的点的子集） $\beta \supset a$ 平面β包含直线a(通过直线a)
8	$\cup$	并	$C = A \cup B$ 集合C是集合A和B的并，如：$\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$	$ABCD=[AB] \cup [BC] \cup [CD]$ 折线$ABCD$是线段$[AB]$、$[BC]$、$[CD]$的并
9	$\cap$	交	$M = K \cap L$ 集合M是集合K和L的交，即包含既属于集合K又属于集合L的元素，如：$\{4, 6, 8\} \cap \{2, 4, 6\} = \{4, 6\}$ $P \cap N = \varnothing$ 集合P和集合N的交是空集（集合P和N没有公共元素）	$a = \alpha \cap \beta$ 直线a是平面α和β的交 $a \cap b = \varnothing$* 直线a和b不相交(没有公共点)
10	$\setminus$	差	$M = K \setminus L$ 集合M由不包括集合L的集合K的元素组成	

第II类 逻辑运算符号，标记

序号	符号	内容	标记书写举例
1	$\wedge$	命题合取；相当于连接词“与”。当且仅当p和q两者均为真时，$(p\wedge q)$为真	$A\cap B=\{x:x\in A\wedge x\in B\}$ 集合A和B的交是由且仅由既属于A又属于B的一切元素x组成的集合
2	$\vee$	命题析取；相当于连接词“或”。命题p或q，其中至少有一个是真，即或p或q或两者均为真，则命题$(p\vee q)$为真	$A\cup B=\{x:x\in A\vee x\in B\}$ 集合A和B的并是由且仅由元素x的全部所组成的集合，x至少属于集合A或B中之一(或A或B或两者)
3	$\Rightarrow$	蕴涵——逻辑推论 $p\Rightarrow q$表示：“若p，则p”。可理解为“由p可推出q”	$(a\parallel c\wedge b\parallel c)\Rightarrow a\parallel b$ 若两直线平行于第三直线，则它们彼此平行
4	$\Leftrightarrow$	等价 $p\Leftrightarrow q$表示：“当且仅当q，则p”或“q的充分必要条件是p”，也可理解为“若p，则q；若q，则p”	$A\in\alpha\Leftrightarrow A\in l,\ l\subset\alpha$ 当且仅当(在且仅在那种情况下)点属于平面的某一直线，则它属于该平面
5	$\forall$	全称量词；所有的，一切的，任意的。$(\forall x)P(x)$——意思是：“对所有x都具有性质$P(x)$”	$(\forall\triangle ABC)(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ)$㊀ 对所有的(对任意的)三角形它的顶角之和等于180°
6	$\exists$	存在量词；$(\exists x)P(x)$——意思为存在着(至少存在一个)具有性质$P(x)$的x	$(\forall\alpha)(\exists a)[a\notin\alpha\wedge a\parallel\alpha]$ 对任意平面α总存在一个不属于该平面但平行于它的直线a
7	$\exists 1$	唯一存在量词；$(\exists 1x)P(x)$——存在着具有性质$P(x)$的唯一的x(仅有一个)	$(\forall A,B)(A\neq B)(\exists 1a)(a\ni A,B)$ 对任意两个不同的点A和B存在着过此两点的唯一直线a
8	$\overline{P(x)}$	命题$P(x)$的否定	$a\dot{-}b\Rightarrow(\overline{\exists\alpha})(\alpha\supset a,b)$ 若直线a和b相错，则不存在包含它们的平面α

㊀ 本行及以下有关行中，原文中$\forall(\triangle ABC)$、$\forall(x)$、$\exists(x)$、(Px)似应为$(\forall\triangle ABC)$、$(\forall x)$、$(\exists x)$、$P(x)$，并据此改译——译注。

第一章　投 影 法

§1　欧几里得空间的一些性质

按照集合论的观点，可以把几何图形看成是属于它的全部点的集合。或者换句话说，一切几何图形都是非空集。

几何图形在平面(或任何其它曲面)上的映象，可借助于投影法即把几何图形上的点投射到该平面(曲面)上的方法来实现。

在说明投影法的实质以前，先研究一下欧几里得空间①的一些性质。

众所周知，这些性质可以用命题-公理系统表达出来，这些命题-公理系统建立了空间元素之间的相互依赖关系，欧几里得空间的点、直线和平面存在着确定的相互关系，这种关系可以用“**属于**”或者“**关联**”这样的词表示。用术语“属于”来代替象“位于…上”“通过…”这样一些概念。今后我们还将常常使用“点 A 属于(关联)平面”、“点 B 属于(关联)直线”来代替“点位于平面上”、“直线通过点”。这些叙述可写为

$$A\in\alpha;\qquad B\in a$$

欧几里得空间各元素间的从属关系，可用下列命题描述：

1. 如果点 A 属于直线 a，而直线 a 属于平面 α，则点 A 必属于平面 α

$$\boxed{A\in a\subset\alpha\Longrightarrow A\in\alpha}$$

2. 两个不同的点 A 和 B 总属于且仅属于同一条直线 a，或一直线 a 至少包含有两个点 A 和 B

$$\boxed{(\forall A, B)(A\neq B)\Rightarrow(\exists 1a)(a\ni A, B)}$$

3. 不属于一条直线上的三个点 A、B 和 C 属于且仅属于同一个平面

$$\boxed{(\forall A, B, C)(A\neq B\neq C)\wedge(A, B, C\notin a)\Rightarrow(\exists 1\alpha)(\alpha\ni A, B, C)}\,*$$

4. 如果属于直线 a 的两个点 A 和 B 又属于平面 α，则直线 a 属于平面 α

$$\boxed{(\forall A, B)(A\neq B)(A, B\in a)\wedge(A, B\in\alpha)\Rightarrow(a\subset\alpha)}$$

---

① 公元前古希腊的几何学家们，对我们赖以生存的三维空间基本特性进行了研究。

伟大的几何学家欧几里得(Евклид)对三维空间几何作出了重要的贡献，他在《几何原本》(公元前 III 世纪)中叙述了他在这一方面的研究成果。因此，在初等几何学中所研究的几何空间是以《几何原本》作者的名字命名的，称为欧几里得空间。

此外，对欧几里得空间元素还可以用另一些从属关系的命题来说明。

属于这类的命题有：

5. 属于一个平面的两条直线，可以包含也可不包含一个公共点。

6. 两个平面可以包含也可不包含同一条直线。

7. 平面和不属于此平面的直线可以包含也可不包含一个公共点。

后三个命题实质上是套用了平行公理。

事实上，命题5断定在欧几里得平面上的两条直线或者相交(共有一个点)或者没有公共点——此时表明两条直线平行。

同样，命题6、7说的是，在欧几里得空间两平面或者相交（共有一条直线）或者平行（命题6)。不属于平面的直线或者与平面相交(直线与平面共有一个点)或者与平面平行(命题7)。

§2 欧几里得空间的改造

在以后的叙述中，我们会发觉运用欧几里得平行公理来讨论空间几何图形在平面上映象的投影法是有一定困难的。因为，欧几里得空间及位于其间的几何图形都具有不一致性。

事实确是这样，设已知两条属于平面 α 的直线 a 和 b (图 1)。

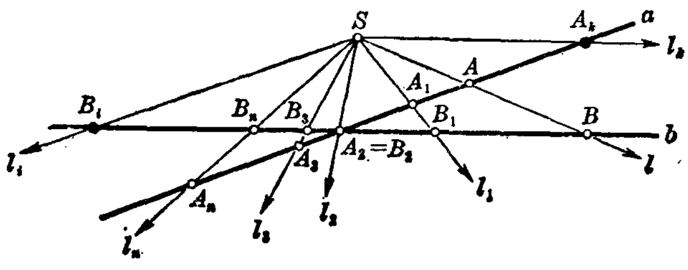


图 1

在平面 α 上取任意点 S $(S\bar{\in} a\wedge b)$*。过点 S 引任意直线 l，交直线 a 于点 A，交直线 b 于点 B。过点 S 引直线 l_1，交直线 a 于点 A_1，交直线 b 于点 B_1。同样，过点 S 引直线 l_2、l_3、…、l_n，交直线 a 和 b 于相应的点 A_2 和 B_2、A_3 和 B_3、…、A_n 和 B_n。

由以上作图可知，我们每次得到两个点，一个点在直线 a 上，而另一个点(与上一个点唯一对应）在直线 b 上。这样，以点 S 为中心作直线束，直到出现平行于直线 a 的直线 l_i 为止。直线 l_i 交直线 b 于点 B_i。由于直线 l_i 平行于直线 a，故 l_i 和 a 不相交，因而直线 a 上就没有与点 B_i 唯一对应的点 A_i，所以前面叙述过的由直线 a、b 所确定的平面场 α 上的点所具有的规律性（直线 a 上的每一点对应着直线 b 上的点或者相反)，由于出现了平行直线而遭到破坏。

除图1上的特殊点 B_i 外，还出现一个点 A_k $(A_k=l_k\cap a)$*，它和直线 a 上所有其它点不同。其区别在于直线 b 上没有与 A_k 相对应的点(因 $l_k /\!/ b$)。

图1表明了这样的事实：直线 a 和 b 的平行性是非一致的。每一条直线都包含着这样的点 $(A_k\in a$ 和 $B_i\in b)$，它们不同于直线 a 和 b 的任何其它点，正因为如此，所以由这二条直线所确定

的平面场α(欧几里得平面)是非一致的。

如果我们转而讨论三维欧几里得空间),那么在此空间出现了属于直线m和n的特殊的点集，直线m和n是平面β、α与平面δ、ε的交线,而属于平面δ、ε包含点S的直线束分别平行于平面α、β(图2)。

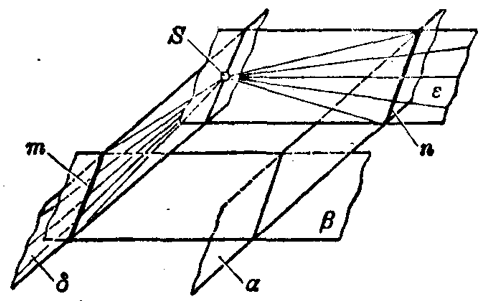


图 2

显然，利用包括平行公理在内的命题建立起来的三维空间模型,来研究投影的方法是不可能的。因此,我们面临如下两种选择：或者确信存在平行公理，其结果是承认我们周围的空间是非一致的，或者认为空间是一致的,而怀疑平行公理的存在。

为了避免上述缺点,只要把三维欧几里得空间模型加以改造就可以了。

由图1可见,如果把直线l_i和l_k看作同其余的直线l_1、l_2、l_3、…、l_n一样，与直线a和b分别相交,就可避免出现特殊点(B_i和A_k)。此时直线a上出现与点B_i对应的点A_i,而在直线b上出现与点A_k唯一对应的点B_k。

为了不违反在平行公理系统中所叙述过的欧几里得空间元素从属关系的原则，可把欧几里得空间扩大,增加无穷远元素——**非固有元素**(点),从而实现欧几里得空间的改造。

引入补充的非固有点,可以得出以下命题：平行直线l_i与a相交于非固有（无穷远)点A_i,而平行于直线b的直线l_k与b相交于非固有点B_k,在此情况下,平面α具有一致性。

这样,为了改造欧几里得平面,只要在直线的点集上增加非固有点就可以了，此非固有点属于平行于已知直线的一切直线。

可用增加非固有(无穷远)直线的方法，获得三维欧几里得空间的一致性。这时平面α和δ同平面β和ε一样,相交于非固有直线n_∞和m_∞(图2)。

§3 中心投影法

中心投影法是获得几何图形投影的最普通的方法。其实质是：已知平面α和点S ($S\notin\alpha$)(图3)。任取一点$A[(A\notin\alpha)\wedge(A\neq S)]$。过已知点$S$和$A$引$[SA)$,此射线与平面$\alpha$相交于点$A^\alpha$。**平面$\alpha$叫做投影面,点$S$叫做投影中心,得到的点$A^\alpha$是点$A$在投影面$\alpha$上的中心投影,$[SA^\alpha)$——叫做投射线**①。平面$\alpha$和投影中心$S$的位置决定了中心投影参数。如果已知投影中心和投影平面,总可以确定空间任何一点在投影面上的中心投影。

设已知任意点B(见图3);引投射线$[SB)$并求出它与平面α的交点,这样我们借助于已知的投影参数（α和S）得到点B的中心投影B^α。有时有这样的情况：点C属于过投影中心S且平行α的平面δ,此时投射线$[BC)$与投影面相交于非固有点C^α_∞。因为通过两个不同的点，可以引

① 在某些教科书中,把点S定义为投影极点,这时的投影叫做有极投影。