

近代谱估计方法

吴顺君 编著

西安电子科技大学出版社

近代谱估计方法

吴顺君 编著

西安电子科技大学出版社

(陕)新登字 010 号

近代谱估计方法

吴顺君 编著

封面设计:钟山

责任编辑:尤雪玉

西安电子科技大学出版社出版

(西安市太白南路二号)

陕西广播电视印刷厂印刷

850×1168 毫米 1/32 印张:6.125 字数:160千字

1994年3月第1版 1994年3月第1次印刷

ISBN 7-5606-0312-2/TN·0080(课)

定价:9.00元

前 言

近代谱估计方法于本世纪 60 年代正式提出,从 70 年代起得到迅速发展,并在通信、雷达、声纳、生物医电、地质勘探、天气预报、机械工程等各种领域得到广泛的应用,为了介绍国外在这方面的最新发展,我于 1983 年 9 月从美国进修回国后,就着手准备为本校研究生开设近代谱估计方法课程,并于 1984 年由西北电讯工程学院教材处出版了以“近代谱估计方法”命名的教材,保铮教授在百忙中详细校阅了全文。由于需求量大,此教材曾于 1986 年 1 月改版重印。此教材作为西安电子科技大学研究生教材已使用 10 年。在此期间,近代谱估计方法已在国内外得到空前的发展和推广,此次正式出版,已对有关内容作了必要的修改和补充。

本书主要介绍近代谱估计的基本理论和方法,既可以作为信号和信息处理学科高年级学生和研究生教材,也可以供有关工程技术人员参考。由于本人水平有限,书中不妥之处,欢迎读者批评指正。

吴顺君

1994 年 1 月于西安

内 容 提 要

近代谱估计方法是泛指一类有别于傅立叶分析方法的谱估计方法,本书着重介绍了新的信号序列模式,最大熵,前后向预测,最小二乘和最小均方等基本概念,以及各种重要的谱估计方法。

本书既可以供信号和信息处理学科高年级学生和研究生阅读,也可供有关工程技术人员参考。

目 录

1 绪 论	(1)
1.1 信号序列和谱估计	(1)
1.2 概率论预备知识	(8)
1.3 功率谱	(13)
2 平稳信号序列模式	(21)
2.1 引 言	(21)
2.2 滑动平均模式	(27)
2.3 自回归模式	(33)
2.4 自回归—滑动平均模式	(39)
3 预测误差滤波和最大熵谱估计	(43)
3.1 维纳—霍夫方程	(43)
3.2 预测误差滤波器	(47)
3.3 最大熵谱估计	(51)
4 AR 谱估计方法	(57)
4.1 伊—沃克方程法	(57)
4.2 莱文生—杜平递推算法	(59)
4.3 最小二乘前向预测法	(69)
4.4 伯 格 法	(74)
4.5 最小二乘法	(78)
4.6 递归最小二乘法	(92)
4.7 最小均方法	(97)
4.8 自适应格形滤波器法	(101)
4.9 判阶准则	(107)

5	ARMA 谱估计方法	(116)
5.1	引言	(116)
5.2	扩展的伊—沃克方程	(120)
5.3	等效法	(126)
5.4	最小二乘输入/输出等同法	(129)
5.5	皮沙伦可谐波分解法	(131)
5.6	普鲁尼能量谱密度法	(139)
5.7	普鲁尼谱线估计法	(146)
6	其他谱估计方法	(152)
6.1	Capon 谱估计方法	(152)
6.2	基于矩阵奇异值分解的谱估计方法	(158)
7	二维 AR 谱估计方法	(167)
7.1	二维 AR 模型	(167)
7.2	二维伊—沃克方程	(169)
7.3	二维格形滤波器	(175)
7.4	二维最小二乘法	(181)
7.5	空间谱估计	(184)

1 绪 论

1.1 信号序列和谱估计

信号是指时间上顺序地观察一个物理过程所得的观察值的集合或全体。它是独立变量 t 的函数。一般来说, t 表示时间,但实际上它也可以表示其他物理参数,如空间等。如果观察值是连续的,得到的是连续信号。如果观察值是离散的,得到的是离散信号。如果一个信号可以被确定地描述,我们说它是一个确定的信号,否则,我们说它是一个随机信号或随机过程。我们主要研究离散随机信号。

图 1.1 所示的是一个存在于区间 T 内的连续随机信号,可表示为:

$$X(t), \quad t \in T \quad (1.1.1)$$

在图 1.1 中, $X^{(1)}(t), X^{(2)}(t), \dots, X^{(i)}(t)$ 是 $X(t)$ 的第 1 到 i 次实现。在时刻 t_1, t_2, \dots 时的观察值 $X(t_1), X(t_2), \dots$ 被称为随机变量。如果观察时间 t_1, t_2, \dots 之间是等间隔的,即 $t_1 = \Delta t, t_2 = 2\Delta t, \dots$, 则我们有:

$$\begin{cases} X_1 = X(t_1) = X(\Delta t) \\ X_2 = X(t_2) = X(2\Delta t) \\ \vdots \\ \vdots \end{cases} \quad (1.1.2)$$

把这些值组合起来,我们得到一个离散的信号序列,表示为:

$$\{X_n\} = [X_1, X_2, \dots] \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.1.3)$$

如果序列是有限的,长度为 N , 我们称之为 N 点信号序列,并表示

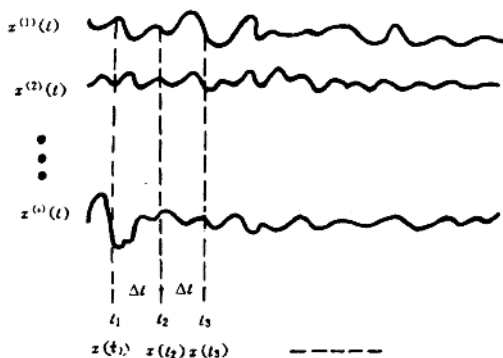


图 1.1 随机信号

为：

$$\{X_n\} = [X_1, X_2, \dots, X_N] \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (1.1.4)$$

随机过程的功率谱(Spectrum)或功率谱密度(Power Spectral Density)是指信号的功率按频率分布的情况。图 1.2 所示的是一种高斯形式的功率谱。

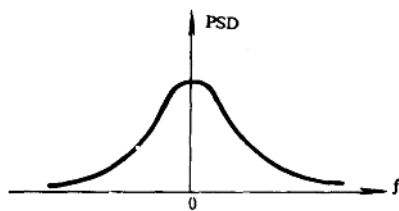


图 1.2 高斯功率谱

所谓谱估计或功率谱估值,就是根据

已知的 N 点信号序列对它的功率谱进行估值。在以前,人们对确定的信号或随机信号的功率谱进行估值大都采用傅立叶变换法。关于傅立叶变换最早要追溯到 200 年以前。但是采用傅立叶变换

进行频谱分析是 A. Schuster 在 1898 年首先提出的^[1], 他用一个傅立叶序列来拟合 (fitting) 太阳耀斑的变化。试图用这种方法来发现测量数据中所“隐藏的周期性质”。并且, 首先引入了“周期图”(Periodgram) 这一术语。

这方面的另一个重要成就是 N. Wiener 所做的工作, 他在 1930 年发表的文章^[2], 为人们利用傅立叶变换方法对随机信号进行处理建立了理论蓝图; 他的重要成果是引入了随机过程的自相关函数及其傅立叶变换与功率谱密度之间的关系。A. Ya. Khinchin 在 1934 年也曾独立地定义过一个类似的关系^[13]。

R. B. Blackman 和 J. W. Tukey 于 1958 年发表的文章^[3]提供了, 在采样数据的情况下, 用自相关法估计功率谱 (Winer 法) 的实际方法。这种方法首

先根据信号序列估计其自相关函数值, 然后以适当的方式对自相关函数估计进行窗孔加权, 最后对加权的了的自相关函数作傅立叶变换获得功率谱估计。直到 1965 年快速傅立叶变换算法 (FFT) 发表以前, BT 法是最流行的谱估计方法。通称为相关图法。

1965 年, J. W. Cooley 和 J. W. Tukey 提出了 FFT 法^[4], 使 DFT 的运算量大大减少。因而可以通过对数据组 (可能被加权)

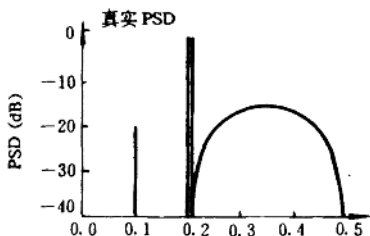


图 1.3(a)

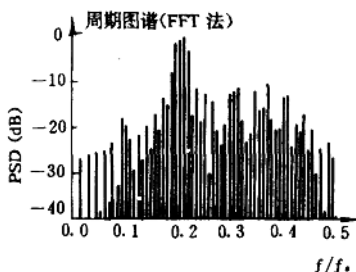


图 1.3(b)

直接进行傅立叶变换,然后将所得结果取幅值后再乘方得到。目前,这种算法已广泛用于信号处理的各个方面,通称为周期图法。

传统的 FFT 方法的基础是信号序列的傅立叶模式。这就是说,输入过程被假定是由一些正弦形式的谐波组成的。实际上,其他形式的信号模式在非工程领域中也早有应用。如 G. U. Yule 和 G. Walker 早在 1927 年^[5]和 1931 年^[6]左右就开始利用自回归 (Auto Regressive, 简称 AR) 模式对经济方面的时间序列中的倾向性进行了预测;而 G. R. B. Prony 更早在 1795 年^[7]就开始用指数模式来拟合从气体化学实验中所获得的数据。当然还有其他一些模式被应用于统计和数学分析等领域。所以我们要介绍的近代谱估计的一些方法与非工程领域中的时间序列模式是有着某些渊源的。

近代谱估计方法的正式提出开始于本世纪 60 年代。E. P.

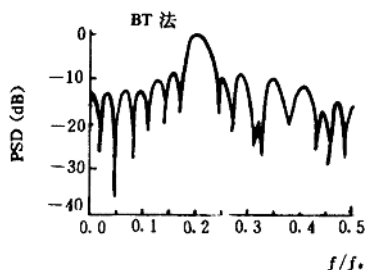


图 1.3(c)

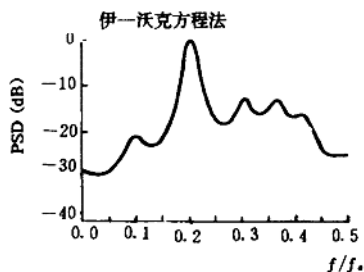


图 1.3(d)

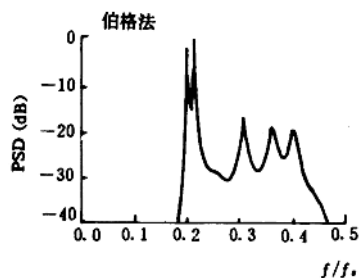


图 1.3(e)

Parzen 在 1968 年正式提出 AR 谱估计方法^[8]。而 J. P. Burg 受到他所从事的地震学应用中线性预测滤波工作的启示于 1967 年独立地引出了最大熵法 (Maximum Entropy Method)^[9]。1971 年 A. van Den Bos 正式证明了一维最大熵法等效于 AR 频谱估计器^[10]。从此以后, 各种各样的谱估计方法被陆续提了出来。

为了便于大家了解我们所要介绍的近代谱估计方法与传统的 FFT 法的差别, 首先让我们来看一下图 1.3。在图 1.3 中, (a) 是所处理的 64 点实信号序列的真实功率谱, 为使所假设的功率谱具有常见的一些特点, 它是由三个正弦波(相对频率各为 0.10, 0.20 和 0.21, 注意后两个正弦波在频率上很靠近) 和一个由白色噪声过程滤波而得的色噪声过程组合而成的。

(b)~(l) 分别示出对上述数据用 11 种方法所得谱估计的结果。其中(b)是用 FFT 法, 对添加了 64 个零值后的序列

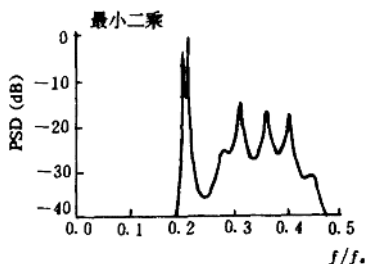


图 1.3(f)

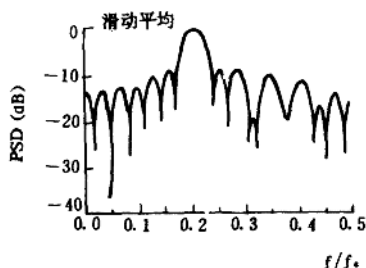


图 1.3(g)

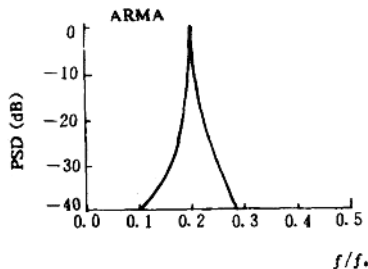


图 1.3(h)

计算得到的。(c)是用 BT 法得到的,先根据 64 点信号序列算得 16 个自相关函数估计(根据 Blackman 和 Turkey 的建议,自相关函数值的个数以序列长度的 20%为宜),再进行傅立叶变换得到的。

关于图 1.3 中所列的其它方法的计算不再一一说明,在后面还要详细讨论。不过从图中可以看出,周期图法所得的结果是不能令人满意的,它和真实的功率谱相差太远了,造成这一后果的原因是明显的。对随机过程取一段作周期图分析,相当于对它乘以窗函数,因而所得功率谱为真实谱与窗谱的卷积。窗谱主瓣有一定宽度,它会降低分辨力。同时窗谱有一定的旁瓣,从而造成“旁瓣泄漏”。这就使图 1.3(c)在 $f=0.2$ 处有一宽的峰(原为两个正弦分量),旁瓣泄漏掩盖了其它分量。

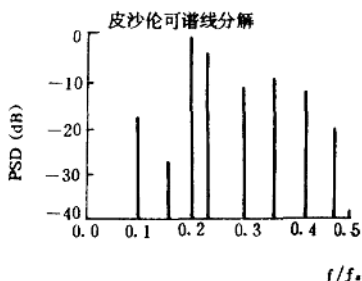


图 1.3(i)

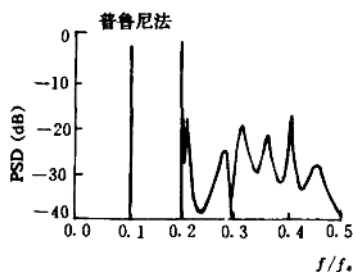


图 1.3(j)

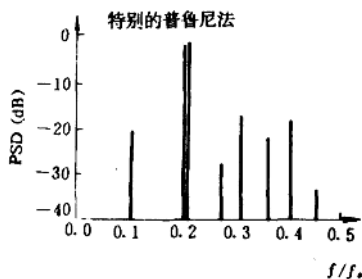


图 1.3(k)

图 1.3 中用其余方法所得的结果,情况各不相同。但有不少要

比周期图法强得多,主要特点是有很高的分辨力和不存在旁瓣泄漏。其原因是近代谱估计的一些方法假定信号符合 AR(自回归), MA(滑动平均)或 ARMA(自回归—滑动平均)模式,然后利用已知的数据组来估计模式的参数和阶数,再根据模式的参数计算出它的功率谱。因此,

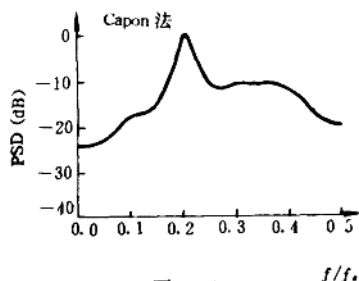


图 1.3(1)

图 1.3 64 点取样序列的
各种谱估计结果

此,这些方法虽然利用同样的数据组来估计信号的功率谱,但是它没有隐含的数据窗孔,它对信号序列以外区域的信号只假定其具有同样的统计特性。这与实际情况相比更趋合理。FFT 法的上述限制在这里就不复存在。所以一般来说,它们有着比 FFT 法更好的性能。另外,近代谱估计方法更适合于处理短的数据序列,这在有些领域,如雷达和声纳信号的处理中是特别有兴趣的,因为在这些领域,所得数据的长度常常受到客观环境的严格限制。

正由于这些优点,近代谱估计的一些方法已开始广泛用于各个领域,如气象预报、市场预测、语音处理、图像加工、地震信号分析和地质勘探等方面。当然,这些方法也有着某些缺点,例如,在不少场合下寻找合适的模型是很困难的问题。另外,一般来说这些方法需要比 FFT 法更大的运算量。所以把它们用于高速实时信号处理,还存在一定困难。但是,随着大规模集成电路技术的飞速发展和近代谱估计方法本身的不断完善,可以预见,这些方法会得到越来越广泛的应用。

1.2 概率论预备知识

如果一个随机过程的统计特性与时间起点无关,我们就称它为狭义平稳随机过程^[1](有时也称为严格平稳的随机过程)。对于一个离散随机过程来说,如果它的任何一组观察值的联合分布不受观察时间前后移动的影响,我们说它是狭义平稳的。如果随机过程的均值是常数,而自相关函数只取决于时间差,我们称它为广义平稳的随机过程(或弱平稳随机过程)。显然,一个狭义平稳的随机过程也一定是广义平稳的随机过程。但反过来,一般是不成立的,我们主要研究广义平稳的随机过程。

随机变量 X_n 的各次矩(Moment)定义为:

$$\begin{aligned} \text{一次矩} & E[X_n] \\ \text{二次矩} & E[X_n^2] \\ & \vdots \\ \text{q 次矩} & E[X_n^q] \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

相应地,它的各次中心矩(Central Moment)定义为:

$$\begin{aligned} \text{二次中心矩} & E[(X_n - E[X_n])^2] \\ \text{三次中心矩} & E[(X_n - E[X_n])^3] \\ & \vdots \\ \text{q 次中心矩} & E[(X_n - E[X_n])^q] \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

在上面的表达式中, $E[\cdot]$ 表示期望运算。若 X_n 是连续随机变量,其概率分布密度函数为 $P(X_n)$, 概率分布函数为 $F(X_n)$, 则(当积分绝对收敛时)

$$\begin{aligned} E[X_n] &= \int_{-\infty}^{\infty} X_n P(X_n) dX_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X_n d(F(X_n)) \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

若 X_n 是一个振幅离散随机变量,其振幅的可能取值为 X_n , ($n =$

1, 2, ...)，而且其概率分布密度函数为 $P(X=X_n)=P_n$ ，则(当级数绝对收敛时)

$$E[X_n] = \sum_{n=-1}^{\infty} X_n P_n \quad (1.2.4)$$

对于一次矩 $E[X_n]$ ，我们一般特别地称它为随机变量 X_n 的数学期望或均值。记作

$$\mu_x = E[X_n] \quad (1.2.5)$$

对于二次中心矩，我们也特别地称为随机变量 X_n 的方差，记作

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= E[(X_n - E[X_n])^2] \\ &= E[(X_n - \mu_x)^2] \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

如果 μ_x 是常数，我们有

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= E[(X_n - \mu_x)^2] \\ &= E[X_n^2 - 2\mu_x X_n + \mu_x^2] \\ &= E[X_n^2] - \mu_x^2 \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

如果 $Y_n = a + bX_n$ ，这里 a 和 b 是常数，那么 Y_n 的均值为

$$\mu_y = E[Y_n] = E[a + bX_n] = a + b\mu_x \quad (1.2.8)$$

若 μ_x 是常数，那么 μ_y 也是常数，这时 Y_n 的方差

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= E[Y_n^2] - \mu_y^2 \\ &= E[(a + bX_n)^2] - (a + b\mu_x)^2 \\ &= b^2(E[X_n^2] - \mu_x^2) \\ &= b^2\sigma_x^2 \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

当 X_n 是一个复数随机变量时，其方差仍是一个实数，这时(1.2.6)式需修正为

$$\sigma_x^2 = E[(X_n - \mu_x)(X_n - \mu_x)^*] \quad (1.2.10)$$

上式中“*”表示复共轭运算。

随机变量 X_n 的自相关函数(Autocorrelation Function)定义为：

$$R_x(m, n) = E[X_{n+m} \cdot X_n^*] \quad (1.2.11)$$

随机变量 X_n 的自协方差函数(Autocovariance Function)定义为：

$$\begin{aligned}
 C_x(m, n) &= E[(X_{n+m} - E[X_{n+m}])(X_n - E[X_n])^*] \\
 &= E[(X_{n+m} - \mu_x(n+m))(X_n - \mu_x(n))^*]
 \end{aligned}
 \tag{1.2.12}$$

根据本节开头的定义,均值为常数,自相关函数只取决于时间差的随机过程是广义平稳的。所以,如果 X_n 是广义平稳的,它必然具有下列性质:

(1) 均值是常数:

$$\mu_x(n+m) = \mu_x(n) = \mu_x$$

(2) 方差是常数:

$$\sigma_x^2(n) = \sigma_x^2$$

(3) 自相关函数只取决于时间差 m ,而与时间原点 n 无关

$$R_x(m, n) = R_x(m)$$

(4) 自协方差函数只取决于时间差 m ,而与时间原点 n 无关

$$\begin{aligned}
 C_x(m, n) &= E[(X_{n+m} - \mu_x)(X_n - \mu_x)^*] \\
 &= E[X_{n+m}X_n^*] - |\mu_x|^2 \\
 &= R_x(m) - |\mu_x|^2 \\
 &= C_x(m)
 \end{aligned}$$

(5) 如果均值 $\mu_x = 0$,那么 X_n 的自协方差函数等于它的自相关函数

$$C_x(m) = R_x(m)$$

(6) 如果 X_n 的概率分布是正态分布的,那么其概率分布密度函数为

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{(X - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

因为 μ_x 和 σ_x^2 都是常数,所以 $P(X)$ 就与时间原点 n 无关,这时 X_n 不但是广义平稳的,而且也是狭义平稳的。

(7) 广义平稳随机过程的自相关函数具有共轭对称性质或厄米特(Hermitian)性质,即: