

工业计测问题与解答

工業計測-問題と解答-

〔日〕松代正三 吉田義之 编著

刘顺昌 刘 雯 顾宝玉译 张沛然 校

14

计 量 出 版 社

内 容 提 要

本书全面、系统的汇集了工业计测中所涉及到的有关计测理论 and 长度计测、力学计测、温度计测、电磁计测、时间与频率计测等专业的一些实际问题，并用问答的形式，简明扼要地一一作了解答，最后，在自动控制部分较详细地阐述了关于系统动态特性的基础问题。

本书兼顾了理论与实践，普及与提高，一般与重点的关系，故可供计量科技人员、厂矿企业计量工作者和大专院校师生学习参考。

工業計測-問題と解答

松代正三 吉田義之 編著

産業図書株式会社1981

工業計測問題与解答

〔日〕松代正三 吉田義之 編著

刘顺昌 刘 英 顾宝玉 译 张沛然 校

责任编辑 刘长顺

计量出版社出版

(北京和平里11区7号)

北京计量印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

开本 850×1168 1/32 印张 7 3/8

字数 196 千字 印数 1—10 000

1986年2月第一版 1986年2月第一次印刷

统一书号 15210·474

定价 1.65 元

译 者 的 话

计测工程学是保证国民经济各个领域各种测量结果的准确一致，研究测量理论与实践的一门应用科学。工业计测是计测工程学的重要组成部分。本书汇集了工业计测中所涉及到的有关计测理论和长度计测、力学计测、温度计测、电磁计测、时间与频率计测等各种专业的实际问题，并做了简明扼要的解答。最后，在自动控制部分中较详细地阐述了关于系统动态特性的基础问题。

本书兼顾了理论与实践，普及与提高，一般与重点的关系，故可供计量科学研究人员、厂矿企业计量工作者、大专院校师生学习参考。

本书在翻译过程中得到了中国计量科学研究院和天津市计量技术研究所有关同志的大力支持，尤其在专业术语和技术问题上得到许多帮助，谨此表示衷心感谢。

本书涉及内容广泛，由于时间紧、水平有限，不足或错误之处在所难免，恳望指正。

译 者 1984年8月

于天津

序 言

很久以前就想编写一部问答集，作为正由产业图书出版的“计测工程学”的姊妹篇，但在具体磋商的时候就不知如何是好而犹豫不决了。

犹豫不决是因为，根据过去的经验，编写试题而要得到自己所期望的答案却不是一件轻而易举的事情，而且应认识到判卷后还要评价学生的能力。从这一立场出发，用100字或200字就能阐明问题的意义，也是相当困难的。

以前我曾有过这样的见解，按原理来说，弹簧秤是测量重量的，所以，在重力值不同的场所，即使测量相同的物品，其指示值也不相同，但天平则是进行质量比较测量的，所以，即使在重力值不同的场所进行测量，也能得出相同的数值。于是，就在试验过程中提出了下述的问题，“用台秤在东京测量装入容器的一升水时和在富士山顶测量时，则测量仪器的指示值是否会有变化？”我想回答一定是因为台秤是天平的一种，所以没有变化。但是，在某些答案中却写出：“因为台秤的秤铊远比装入容器的一升水体积小，所以，空气浮力的效应也不同。如按东京和富士山顶的情况来说，因为空气密度的不同，所以指示值就多少有些不同。”实际的问题是：对于大约1公斤水的体积，因气压不同而引起的浮力的差异是台秤的精度难以测出来的。对这样的回答，与其表示歉意，倒不如因题目本身言不尽意而感到羞愧。

据知，国立大学的统一试题是召集了许多高明的先生们，经过反复研究后提出的。尽管如此，一旦公布于众，也可以看到不完备之处，所以，编写问答的难度就可想而知了。

本书的编写工作，全部委托给各专业的权威人士，并经过充分推敲和研究，所以能够提供适当的问题和解答，成为内容充实的问答集。

本书是以标准计量工程学教科书的结构出题的，但教科书中的不足之处，也以问题形式做了补充，增加了自动控制一章。作为问题的解答，也许会有多余之处，然而要更深入地去理解，并在解答试题时，由读者自己去概括归纳。

本书适合于高等专科、大学的学生们和机械、电子等技术工作者的技术培训。

不足之处请予以批评，以便进一步修订完善。

松代正三

目 录

1	一般计测.....	(1)
2	长度、角度、形状的计测.....	(26)
3	质量、力、功率的计测.....	(79)
4	时间、转速、振动、噪声的计测.....	(99)
5	温度、湿度、热量的计测.....	(124)
6	流量、体积、压力、粘度的计测.....	(145)
7	电压、电流、阻抗、频率的计测.....	(162)
8	自动控制.....	(195)

1 一般计测

计测技术是一门综合性技术，它广泛应用于物理学，工程学和其他科学研究或工业、农业、医疗及社会各领域里。由于这些领域里的计测条件却各不相同，因此如不满足一定条件，就不能获得良好的效果。

另外，由于被测量种类繁多，即使是同类量，如果大小不同，就要采用不同的测量技术。所以，要学好计测工程学就必须掌握广泛的知识。

另一方面，测量的目的在于获得有关被测量状态或性质等的定量描述。因此，要使用各种计测仪器并进行结果的处理。但就测量方法计测仪器和数据处理方法等来讲，是与进行什么测量无关的一般性问题。

本章的问题有助于加深对计测中共性问题的理解。

一般可分为：量纲、物理常数测量的基本问题；计测仪器的动态特性和测量结果处理的数理问题；量限的扩大、变换及有关仪器设计中的技术问题和利用反馈来改进特性的方法等等，其难易程度各不相同。

问题的解答一般尽可能在不参阅其他参考书的情况下就能够理解，但由于篇幅所限，不到之处在所难免，请参阅有关专业书籍。

在阅读本章之前，最好先阅读本书其他有关章节，将有助于对共性问题的理解。

【问题1.1】 设质量分别为 m_1 , m_2 的两个物体，其距离为 r ，这时作用在物体上的万有引力 F 可由下式表示：

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

G 称为万有引力常数, 求这个常数的量纲.

(解答) 根据牛顿定律, 设质量为 m , 加速度为 a , 力 F 可以表示为:

$$F = ma$$

因为加速度的量纲为 $[LT^{-2}]$, 所以力的量纲为 $[MLT^{-2}]$.

另外, 根据万有引力定律 G 可以表示为:

$$G = \frac{Fr^2}{m_1 m_2}$$

所以 G 的量纲为:

$$\frac{[MLT^{-2} \cdot L^2]}{[M^2]} = [L^3 M^{-1} T^{-2}]$$

【问题 1.2】以粘度系数除以流体的密度、流速、长度之积的值一般叫做雷诺数. 证明雷诺数是无量纲的数.

(解答) 因为密度的量纲为 $[L^{-3}M]$, 流速的量纲为 $[LT^{-1}]$, 所以密度、流速、长度之积的量纲为 $[L^{-1}MT^{-1}]$.

一方面, 粘滞力 F 如在流体的流层中具有垂直方向的速度梯度 dv/dz 时, 流动方向与单位面积的切应力成正比, 其比例常数就是粘滞系数 η , 所以:

$$F = \eta S \frac{dv}{dz}$$

由此可以得出 η :

$$\eta = \frac{F}{S(dv/dz)}$$

则 η 的量纲为:

$$[\eta] = [MLT^{-2} \cdot L^{-2} (LT^{-1}/L)^{-1}] = [L^{-1}MT^{-1}]$$

雷诺数量纲等于粘滞系数除以密度、流速、长度之积的量纲. 但由于后面两者的量纲相同, 所以雷诺数就成为无量纲.

【问题 1.3】叙述关于绝对测量光速的方法.

(解答) 测量光速的实验早在伽利略时代就已开始, 但第一个不用天文观测而在地面上实验成功的是斐索.

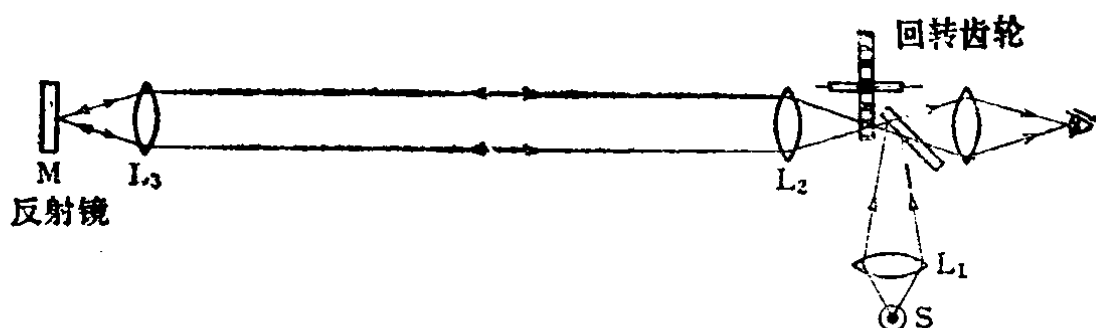


图 1 斐索的方法

图 1 是斐索方法的原理图，从光源 S 发出的光经过半透镜反射后通过齿轮的齿隙入射到反射镜 M 上，由 M 反射后再次通过齿隙并透过半透镜后就可以进入测量人员的眼睛。即透镜 L_1 把光源的影象会聚到齿轮位置上，通过透镜 L_2 变成平行的光， L_3 具有把射向 M 入射角的光反射到齿轮位置上和不损失光量的作用。

以恒定的转速旋转的齿轮以一定的周期，切断射向透镜的光，如果穿过齿轮的光再次返回的时间恰好等于这个周期的整倍数，则返回的光就能穿过齿隙，否则就会被齿轮遮住。因此，调整齿轮的转速使在齿隙间能看到最亮或最暗为止。这时，设齿轮和反射镜的距离为 L ，齿轮转速为 n ，齿数为 N ，光的往返时间 $2L/c$ (c 为光速) 恰好等于齿轮移动一个齿距的时间 $1/Nn$ 的整倍数，即最明亮的部位，所以就可以求出 c 值。斐索在巴黎近郊利用距离约 8.6km 的两个丘陵进行了实验，所测得的有效数值的精度达到三位数左右。

迈光尔逊是作为光速测量者而闻名于世的，他的方法的原理是使用图 2 所示的正多面镜，通过设置在距其 35km 处的反射镜反射的光观测光源的象。此原理和斐索的设想是相同的，由于用正多面镜代替了齿轮，加长了光程，从而显著地提高了测量精度。

另一方面，设电磁波的波长为 λ ，频率为 ν ，则光速 c 可表示为： $c = \lambda\nu$ ，同时测量 λ 和 ν 就能够求出 c 值。1950年，采用这种方法进行了微波区域的测量。自发明激光以来，提高了振荡频率

的稳定技术，从而使测量精度达到了 10^{-12} 。此外，又由于把频率倍增到红外区域并采用检测拍频技术，所以以原子频率标准为基准，可以精密测量红外区域稳定激光的频率。同时，通过用干涉仪来测量激光的波长，就能以非常高的精度来测量光速。

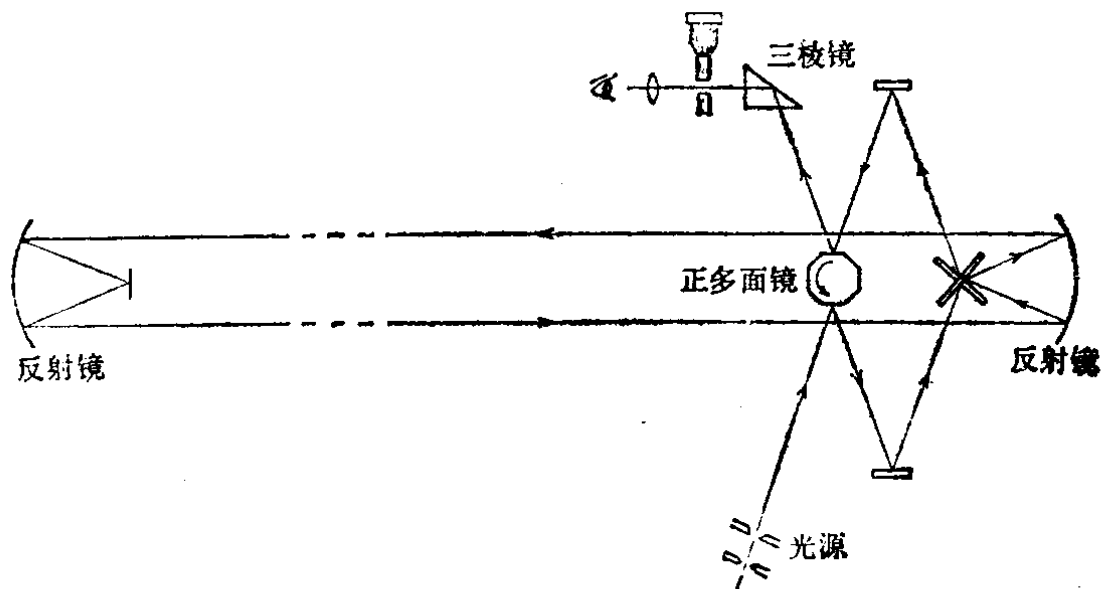


图 2 迈克尔逊方法

【问题 1.4】 要制造能读到 $1/20$ 分度的游标卡尺，应怎样构成副尺的分度呢？

（解答） 设主尺的分度间隔为 l 。副尺的分度间隔为 $l(1 - 1/20) = 19l/20$ ，如图 1 所示，在主尺的分度线上使副尺上的 0 和分度的刻线重合，这时由于主尺和副尺每根刻线的偏移为 $l/20$ ，所以通过主尺和副尺的组合就能够实现 $l/20$ 的整数倍长度。

如图 2 所示，其次可以考虑副尺的零刻线位于主尺刻线之间的情况。设副尺的零刻线和它左侧的最近的主尺刻线的距离为 x 。首先，若设 $x = nl/20 (1 \leq n \leq 19)$ ，这时副尺的 1 和它左侧最近的主尺刻线之距离为 $(n - 1)l/20$ 。以下逐渐缩短两尺刻线之间的距离，直到副尺 n 和主尺刻线重合为止。因此，找出副尺和主尺刻线重合的位置，然后根据当时副尺的读数就能够读取主尺的一个分度的 $1/20$ 。而且根据副尺零的左侧主尺的分度就可以读取一位数的数值。

当 $x \neq nl/20$ 时，主尺和副尺的刻线就不会重合。这时若读取两刻线最小间隔的副尺的分度，可以求出以主尺分度的 $1/20$ 为单位的四舍五入的值。

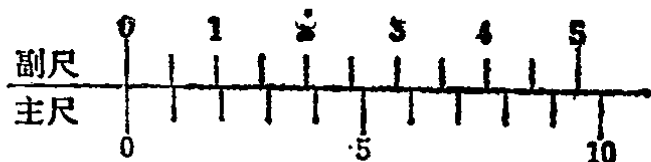


图 1 副尺的构造

当然，游标卡尺的主尺的分度间隔的均匀性如果低于 $1/20$ ，则使用游标卡尺就毫无意义了。

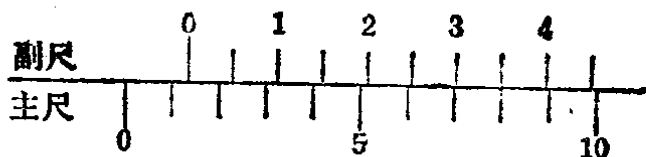


图 2 利用副尺读数

参考：为了读取刻在主尺上的刻线而使用了一条标线，这时，只有当标线处于刻线之间时才可用目测读取。因为难于用目测读取到 1 分度的 $1/20$ ，所以一般都使用游标卡尺。实际上不制造 1 分度的 $1/20$ 的刻线，而是制作具有与主尺 1 分度的 $1/20$ 的不同长度的刻线的副尺，这样就能够读取到主尺的 $1/20$ ，这就是游标卡尺。

【问题 1.5】 设动圈电流计在 $t=0$ 的时刻流过电流 i_0 ，以后一直保持这个数值不变，这时电流计的指针如何偏转？可以定量地研究，并且试用图表表示其结果。

（解答） 由于指针固定在线圈上，所以可以讨论线圈的运动。

设线圈的转动惯量为 I ，角加速度为 θ ，加在线圈上的力矩为 N ，则有：

$$I\theta = N \quad (1)$$

式中 N 是由流过线圈的电流的量 N_i 、悬挂线圈的吊丝的量 N_r ，以及线圈在磁场中运动所产生的分量 N_d 所组成。

(1) N_i

设磁场强度为 H ，线圈框架的截面积为 S ，线圈的圈数为 n ，流过的电流为 i_0 。可由下式表示为：

$$N_i = HSni_0 \quad (2)$$

(2) N_r

设吊丝的扭转常数为 k ，就是线圈在 θ 角范围位移时产生的 $-k\theta$ 的恢复力矩，因此：

$$N_r = -k\theta \quad (3)$$

(3) N_d

线圈在磁场中运动时，将产生和切割磁力线的速度成正比的逆电动势 V 。如果线圈连接外电路（包括电源），将有和这个逆电动势成正比的电流流过，由此可产生恢复力矩。 V 可用 $V = -HSn\dot{\theta}$ 表示，若设包括线圈在内的闭合回路的电阻为 R ，那么流过线圈的电流为 $I_d = -HSn\dot{\theta}/R$ ，所以 N_d 可以采用 (2) 式，则可得 N_d 为：

$$N_d = -(HSn)^2 \dot{\theta} / R \quad (4)$$

参考：当线圈在空气中运动时，在空气的粘滞阻力影响下，它将受到与 $\dot{\theta}$ 成正比的恢复力矩的影响，但在一般情况下，其影响比 (4) 式小得多，可以忽略不计。此外，如果线圈框架是金属制的，则存在因框架产生电流的分量。在此已忽略了。

因为 (1) 式的 N 可以表示为 $N = N_i + N_r + N_d$ ，所以，代入 (2)、(3)、(4) 式，可得：

$$I\ddot{\theta} = Ai_0 - k\theta - B\dot{\theta} \quad (5)$$

式中： $A = HSn$, $B = A^2/R$

把与 $\dot{\theta}$ 有关的项移至左边时则为：

$$I\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + k\theta = Ai_0 \quad (6)$$

如果解出这个二阶微分方程就可以定量地表示线圈的运动，但此时应给出 θ 和 $\dot{\theta}$ 的初始条件，由于 $t=0$ ，在加上电流 i_0 之前，线圈是静止的，所以 $\theta = \dot{\theta} = 0$ 。当从 $t=0$ 开始经过足够的时间，则线圈在 i_0 作用下将在规定的旋转角度内的位置 θ_0 处静止，这时因为 $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ ，所以，由 (6) 式可得：

$$\theta_0 = (A/k)i_0$$

若用 $\varphi = \theta - \theta_0$ 代替 (6) 式的 θ ，就得到有关 φ 的下述公式：

$$I\ddot{\varphi} + B\dot{\varphi} + k\varphi = 0 \quad (7)$$

为了求解，设 $\varphi = e^{mt}$ ，并代入 (7) 式，则为：

$$(Im^2 + Bm + k)e^{mt} = 0$$

满足上式的 m 为：

$$m = -\frac{B}{2I} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{2I}\right)^2 - \frac{R}{I}} \quad (8)$$

现在，设 $\omega_n = \sqrt{k/I}$ ， $\varphi = B/2\sqrt{Ik}$ ，(8) 式变为：

$$m = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n \quad (9)$$

i) 当 $\zeta < 1$ 时，则为

$$m = -\zeta\omega_n \pm j\omega_0, \text{ 但 } \omega_0 = \sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n$$

$j = \sqrt{-1}$ ，因而 (7) 式的通解为：

$$\varphi = e^{-\zeta\omega_n t} (Ae^{j\omega_0 t} + Be^{-j\omega_0 t}) \quad (10)$$

这里假设给出的初始条件 $\varphi = -\theta_0$ ， $\dot{\varphi} = 0$ ； $t = 0$ 时，则可得：

$$A = -(1 + j\zeta\omega_n)\theta_0$$

$$B = -(1 - j\zeta\omega_n)\theta_0$$

把 AB 代入 (10) 式整理后为：

$$\varphi = -\theta_0 e^{-\zeta\omega_n t} (\cos \omega_0 t - \zeta/\sqrt{1 - \zeta^2} \cdot \sin \omega_0 t)$$

因此， θ 有下式：

$$\theta = \theta_0 - \theta_0 e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_0 t + \psi) \quad (11)$$

式中： $\psi = \tan^{-1} \zeta/\sqrt{1 - \zeta^2}$

由 (11) 式可以看出：右边第二项随着时间的增加，虽以周期 $2\pi/\omega_0$ 而振动但却逐渐衰减，因此在 $t = 0$ 时 θ 是从 0 开始振动，最后到 θ_0 便趋于稳定。

ii) 当 $\zeta > 1$ 时，则为：

$m = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n$ ，按 i) 的方法给出初始条件求解为：

$$\theta = \theta_0 - \theta_0 e^{-\zeta\omega_n t} (\cosh \omega_0 t + \varphi/\sqrt{\zeta^2 - 1} \sinh \omega_0 t) \quad (12)$$

式中: $\omega_0 = \sqrt{\zeta^2 - 1} \omega_n$

由此可知: 它和 i) 的情况不同, 没有振动项, 右边第二项一般在 $t=0$ 时为 θ_0 , 在 $t>0$ 时, 一般比 θ_0 小, 所以, 在 $t=0$ 时, θ 是从 0 开始并随着时间的增加逐渐地接近于 θ_0 .

iii) 当 $\zeta=1$ 时

具有 $m = -\zeta\omega_n$ 的多重根, 此时可以由微分方程 (7) 的一般通解可由下式求出:

$$\varphi = (At + B)e^{-\zeta\omega_n t}$$

按照 i) ii) 的方法, 根据给出的初始条件同样可以得到:

$$\theta = \theta_0 - \theta_0(\omega_n t + 1)e^{-\zeta\omega_n t} \quad (13)$$

由 (13) 式可知在 $t=0$ 时 $\theta=0$, 并随着时间的增加无限接近于 θ_0 . 此外, (13) 式的第二项一般比在同一时间的 (12) 式的第二项小, 所以在 $\zeta=1$ 时无任何振动, 很快接近最终值。

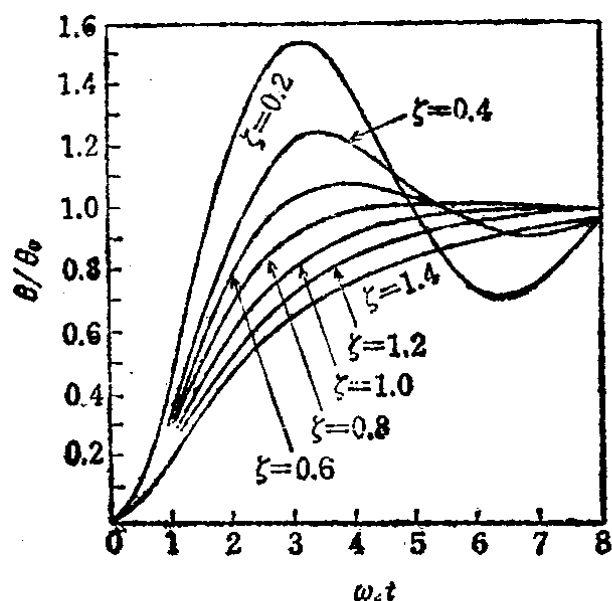


图 电流计的逐步响应

值。

把以上结果综合如图所示的曲线。

上述分析是关于线圈的旋转角的问题, 如果把指针看作为刚体, 那么线圈的旋转角就对应着指针的偏转。但在不可能忽视指针顶端的质量或者由记录计产生的摩擦力矩时, 就有进一步加以探讨的必要。

【问题1.6】 当某一物理量 X 一定时, 对给出的与 X 大小相同的 x , 反复进行同一测量, 测量 n 次, 求测得的数值的平均值的标准偏差。

(解答) 把通过 n 次测量所取得的值假设为 $x_1 x_2 \cdots x_n$ 时, 平均值 $\bar{x}$ 可以由下式给出:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i / n \quad (1)$$

来自 x_i 的每个 $\bar{x}$ 的分散性可以用下式给出的方差 s^2 表示。
即:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad (2)$$

为了求 $\bar{x}$ 的方差 $s_{\bar{x}}^2$, 首先应把 (1) 式改写为:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \cdots + \frac{1}{n}x_n \quad (3)$$

一般把 x_i , $i=1, \cdots, n$ 看作统计的独立变量, 而把 a_i , $i=1 \cdots n$ 看作常数, 则:

$$y = \sum_{i=1}^n a_i x_i \quad (4)$$

其方差 σ_y^2 可由下式给出:

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 \quad (5)$$

式中 σ_i^2 是 x_i 的方差。

把 (3) 和 (4) 式比较, 这时 $a_i = \frac{1}{n}$ $i=1 \cdots n$, 另外由于 σ_i^2 的估计值为 s^2 , 所以 $s_{\bar{x}}^2$ 则为:

$$s_{\bar{x}}^2 = n \frac{s^2}{n^2} = \frac{s^2}{n}$$

把 (2) 式代入上式则为:

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}$$

由于平均值的标准偏差 $s_{\bar{x}}$ 为 $s_{\bar{x}}^2$ 正的平方根, 所以:

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

另外，如果使用下式：

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}$$

可以简化计算。

【问题 1.7】现有六个按指定尺寸加工的机械零件，为了检验其加工精度，用测微计测量其长度。考虑到测微计有测量误差，所以反复测量三次，测到 mm 时与指定值一致，而测到 mm 以下的值时出现了分散性，将其列入表 1。由这些数据，试估计加工精度和测量精度。

表1 尺寸测定的数据

单位：mm

反复次数 零件				反复次数 零件			
	1	2	3		1	2	3
A ₁	0.221	0.224	0.227	A ₄	0.209	0.211	0.215
A ₂	0.197	0.194	0.199	A ₅	0.228	0.231	0.234
A ₃	0.235	0.232	0.237	A ₆	0.213	0.210	0.216

（解答）把表 1 数据表示为： x_{ij} $i=1, \dots, 6, j=1, 2, 3$ ，一般数据的构成可以由下式给出：

$$x_{ij} = \mu + a_i + \varepsilon_{ij} \quad (1)$$

式中 μ ：总体平均值； a_i ：加工的变分； ε_{ij} ：测量误差，可由下式求出总平均 $\bar{x}$ ：

$$\bar{x} = \frac{1}{18} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^3 x_{ij}$$

把 x_{ij} 的变差的平方和即 $\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^3 (x_{ij} - \bar{x})^2$ 设定为 S_T ，

设 $x_i = \sum_{j=1}^3 x_{ij}/3$ 则:

$$\begin{aligned} S_T &= \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^3 (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2 \\ &= \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^3 (x_{ij} - x_i + x_i - \bar{\bar{x}})^2 \\ &= \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^3 (x_{ij} - x_i)^2 + 3 \sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{\bar{x}})^2 \end{aligned} \quad (2)$$

这是因为 $\sum_{j=1}^3 (x_{ij} - x_i) = 0$, 所以:

$$\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^3 (x_{ij} - x_i)(x_i - \bar{\bar{x}}) = 0$$

这样, S_T 就能够按各零件测量值变差的平方和与零件之间的尺寸的变差的平方和分开, 但 S_T 是由 $3 \times 6 = 18$ 项组成, 而 $\bar{\bar{x}}$ 可以通过 18 个 x_{ij} 的计算取得, 所以给出 17 项就能自动地确定最后一项。因此, 一般称 S_T 的自由度为 17。同样, 级间变差 (尺寸的变差) 的平方和的自由度为 $6 - 1 = 5$, 级内变差 (测量值的变差) 的平方和的自由度为 $17 - 5 = 12$ 。一般方差可以用平方和/自由度来定义, 所以级间变差的方差 V_A 和级内变差的方差 V_E 分别可以由下式给出:

$$V_A = \frac{3 \sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{\bar{x}})^2}{5} \quad (3)$$

$$V_E = \frac{\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^3 (x_{ij} - x_i)^2}{12} \quad (4)$$

其次求 V_A 和 V_E 的期望值。

由 (1) 式 x_i 和 $\bar{\bar{x}}$ 分别可写成下式: