

应用数学 例题演习

【2】

〔日〕 道协义正 春海佳三郎 著
松浦省三 小林政治
郑毓德 译
胡传淦 校

南开大学出版社

应用数学例题演习

(二)

复变函数篇

[日] 道胁义正 春海佳三郎 著
松浦省三 小林政治

郑毓德 译

胡传淦 校

南开大学出版社

1984年12月·天津

内 容 简 介

本书译自日本流行的高等数学习题集，既概括高等数学的主要内容，扼要讲述基本理论，又结合理化、电工、建筑等多方面的具体应用实例，给出典型的例题详解，有助于在科技领域内应用高等数学。因此，本书比一般的习题集有更大的用处，可供理工学院、业大学生、自学青年和厂矿科技人员学习和进修高等数学之用。

全书共四册：一、微分方程篇；二、复变函数篇；三、统计行列式和概率；四、向量、傅里叶级数、傅里叶变换和特殊函数。

应用数学例题演习(二)

〔日〕道胁义正等著 郑毓德 译
胡传淦 校

南开大学出版社出版
天津八里台南开大学校内
新华书店天津发行所发行
宣化炮兵学院印刷厂印刷

1984年12月第1版 1984年12月第1次印刷

开本 850×1168毫米 1/32 印张 12

字数 311千 印数 12,350

统一书号：13301·6 定价：2.83元

前 言

简言之，数学很重要。在理工科大学和工科高等院校都特别强调数学。然而，迄今为止已出版的应用数学演习的书籍为数甚少。研究应用数学，必须懂得数学。实际上，比起纯数学来，它是不过分讲求严密性的数学。人们往往即使理解了数学的解法，但对于数学应用于自然科学问题，却不能运用自如。笔者们不揣才疏学浅，试图就物理学、电工学、化学等自然科学中怎样运用数学这一问题，以数学为主，进行讲解。因此它比数学本身的习题演算书籍用处更大。

本书是《应用数学例题演习》全四册中的第二卷——复变函数篇。本书的目的是侧重于实积分、残数问题及格林函数的求法。

本书包括以计算为主的问题265题，证明题200题，电工问题12题。

本书编著要点如下：

1. 以コロンバ社 (Corona Publishing) “新编电工学讲座” “新编机械学讲座”的《应用数学(1)》为依据。然而，即使离开该书，也能顺利地学习。

2. 在各节各项中，均提出了基础理论，以便明了要点。

3. 基础理论中必要的证明，将在例题中再现。

4. 相同类型的问题归纳在一起。

5. 力求使数学解法的要领采取容易理解的形式。

最后，应该说明，所考虑到的这些问题，已经超出了个人的能力。错误在所难免。希望能获得读者们的指正，以便修订时加

以改正。谨对提供各种参考文献的作者表示感谢；并对担任编辑、校对、出版工作而付出劳动的日口出版社编辑部的各位致以深切谢意。

昭和42年4月30日

著 者

目 录

2. 复变函数

2.1 复数和集合	1
基础理论	1
例题演习	2
2.2 初等函数	28
2.2.1 线性函数	28
基础理论	28
例题演习	29
2.2.2 指数函数	42
基础理论	42
例题演习	42
2.2.3 对数函数	48
基础理论	48
例题演习	48
2.2.4 三角函数	54
基础理论	54
例题演习	55
2.2.5 幂函数	72
基础理论	72

例题演习	72
2.3 解析函数	76
2.3.1 解析函数	76
基础理论	76
例题演习	77
2.3.2 复积分	104
基础理论	104
例题演习	107
2.3.3 复级数	130
基础理论	130
例题演习	132
2.3.4 等角映射	195
基础理论	195
例题演习	196
2.4 解析开拓	239
2.4.1 解析开拓	239
基础理论	239
例题演习	240
2.4.2 残数及其应用	259
基础理论	259
例题演习	260
2.4.3 纯理论中的应用	316
基础理论	316
例题演习	317
索引	371

2. 复变函数

2.1 复数和集合

基础理论

1. a, b 为实数时, $a+ib$ ($i=\sqrt{-1}$) 称为复数.

2. $z=a+ib$ 时, 记作 $a=\operatorname{Re} z$, $b=\operatorname{Im} z$, 分别称为 z 的实部、虚部. 把 $a-ib$ 以 $\bar{z}$ 表示, 称为 z 的共轭复数.

3. $a+ib=a'+ib' \longleftrightarrow a=a', b=b'.$

4. $(a+ib) \pm (a'+ib') = (a \pm a') + i(b \pm b').$

5. $(a+ib)(a'+ib')$
 $= (aa' - bb') + i(ab' + a'b).$

6. $\frac{a+ib}{a'+ib'} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + i \frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2} \quad (a'^2 + b'^2 \neq 0)$

7. $z=a+ib$ 时, 把 $r=\sqrt{a^2+b^2}$ 称为 z 的绝对值,

以 $|z|$, $\operatorname{mod} z$ 表示. 把 $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$ 称为 z 的幅角, 表示为 $\arg z$,
 $\operatorname{amp} z$.

8. 把两个复数设为 z_1, z_2 , 则

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2,$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 \quad (|z_2| \neq 0).$$

9. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$

10. 在一个区域内, 由无数的点构成的点集, 至少具有一个凝聚点 [Bolzano-Weierstrass 定理] .

11. 以属于闭区域 D 的任一个点为中心, 以不为 0 的线段为半径画开圆时, 则这些圆中的有限个圆, 把 D 覆盖 [Heine-Borel 覆盖定理] .

12. 连续函数的和、差、积及商 (分母 $\neq 0$) 仍是连续函数.

13. $w=f(z)$ 在区域 D 内是单值连续, $f(z)$ 将区域 D 映射成一个区域 D' , $g(w)$ 若在 D' 内单值连续, 则复合函数 $g(w) = g\{f(z)\} = \varphi(z)$ 在 D 内是单值连续.

14. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 $z=z_0$ 连续的充分必要条件是 $u(x, y)$, $v(x, y)$, 在 $x=x_0$, $y=y_0$ 连续.

15. $f(z)$ 若在有界闭区域 D 上所到之点连续, 则存在正常数 M , 使得在 D 内的任意点 z 有 $|f(z)| < M$. 若对于 D 的边界上的一点 z_0 , 有 $|f(z_0)| = M$, 那么, 在 D 的边界上有 $|f(z)| \leq M$, 且在 D 的内部有 $|f(z)| \leq M$ (最大值原理).

例题 1 证明

$-1 < x < 1$ 的实数 x 的集合和所有的实数的集合等价.

解答

研究变换

$$y = \frac{x}{1-|x|} \quad (|x| < 1),$$

将 $-1 < x < 1$ 的实数对应于 $-\infty < y < \infty$. 那么 $-1 < x < 1$ 的实数 x 的集合和所有的实数的集合是一一对应, 因而等价.

例题 2 求下列实数列的上极限、下极限.

$$(i) x_n = (-1)^n \frac{n}{2n+1}$$

$$(ii) x_n = n+1 + (-1)^n n$$

$$(iii) x_n = 1 + (-1)^n$$

$$(iv) \quad x_n = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \cos \frac{2n\pi}{3}$$

解答

$$(i) \quad \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

那么 $\pm \frac{1}{2}$ 分别是上极限, 下极限。

$$(ii) \quad x_1 = 1, x_2 = 2 \times 2 + 1, x_3 = 1,$$

$$x_4 = 4 \times 2 + 1, x_5 = 1 \dots, \text{那么上极限是 } \infty,$$

下极限是 1.

$$(iii) \quad x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 2, \dots,$$

那么上极限是 2, 下极限是 0.

$$(iv) \quad x_1 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right),$$

$$x_2 = \left(1 + \frac{1}{2 \times 2}\right) \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2 \times 2}\right),$$

$$x_3 = 1 + \frac{1}{2 \times 3}, \dots,$$

$$|x_n| = \left| \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \cos \frac{2n\pi}{3} \right|$$

$$\leq 1 + \frac{1}{2^n} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

所以上极限是 1, 下极限是 $-\frac{1}{2}$.

例题 3 取 m 及 n 为任意正整数值时, 求在一条直线上的点 $\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$ 的集合的上确界和下确界及上下限, 对其中属于原集合的点和不属于原集合的点加以区别.

解答

m, n 均取正整数值, 此时, 这个点的最大值是 $1 + 1 = 2$. 这是上确界.

m, n 不论变的多么大, 其极限值是 0. 但点 0 不属于这个集合, 是下确界. 这个数同时也是下限.

另外, m 若以 $1, 2, 3, \dots$ 给出, $1/m$ 是全部集合 $\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$ 的凝聚点, 其中最大的坐标是点 1, 点 1 属于这个集合, 是上限.

例题 4 求下面数列 $\{z_n\}$ 的凝聚点.

(i) $z_n = (-1)^n$

(ii) $z_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

(iii) $z_n = \exp \frac{n\pi i}{4}$

(iv) $z_n = \sin \left(i + \frac{n\pi}{2}\right)$

(v) $z_n = \frac{n}{n+1} \exp \frac{n\pi i}{4}$

解答

(i) 数列由 $-1, 1, -1, 1, \dots$ 构成, 凝聚点是 $-1, 1$.

(ii) 数列是 $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$, 点 0 为凝聚点.

(iii) $z_n = \exp \frac{n\pi i}{4} = \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4},$

$\therefore z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, z_2 = i, z_3 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, z_4 = -1,$

$$z_5 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, z_6 = -i, z_7 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}, z_8 = 1, \text{ 这些是}$$

周期地出现, $\pm 1, \pm i, \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ 是凝聚点.

$$(iv) \quad z_1 = \sin\left(i + \frac{\pi}{2}\right) = \cos i = \frac{1}{2}(e + e^{-1}),$$

$$z_2 = \sin(i + \pi) = -\sin i = -\frac{i}{2}(e - e^{-1}),$$

$$z_3 = \sin\left(i + \frac{3}{2}\pi\right) = -\cos i = -\frac{1}{2}(e + e^{-1}),$$

$$z_4 = \sin i = \frac{i}{2}(e - e^{-1}), \dots$$

因这些数是周期地出现, 所以 $\pm \frac{1}{2}(e + e^{-1}), \pm \frac{i}{2}(e - e^{-1})$ 是凝聚点.

$$(v) \quad |z_n| = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty), \text{ 和 (iii) 相同.}$$

例题 5 两个实变量 x, y 的连续函数 $f(x, y)$ 对于任意给出的 ε , 若取适当的正数 δ , 当

$$|x_2 - x_1| < \delta, |y_2 - y_1| < \delta \text{ 时,}$$

其中 x_1, x_2, y_1, y_2 存在于各自的闭定义域内, 证明

$$|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| < \varepsilon.$$

解答

在闭区域 D 内, 若 $f(x, y)$ 连续, 只限于 $\sqrt{h^2 + k^2} < \rho$,

通常取 $|f(x+h, y+k) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ 的正数 δ .

若以 D 内的各点 (x, y) 为中心, 以 $\delta/2$ 为半径画圆, 由 Heine—Borel 定理, 其中有限个圆完全覆盖了 D . 最小的 $\rho/2$

可设为 $\sqrt{2} \delta$.

这是在以点 (x_0, y_0) 为中心, 以 $\rho_0/2$ 为半径的圆的内部或圆周上取点 (x_1, y_1) . 若取

$$|x_2 - x_1| < \delta,$$

$$|y_2 - y_1| < \delta$$

的正方形内的点 (x_2, y_2) , 有

$$\delta \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \rho_0. \text{ 那么,}$$

(x_1, y_1) , (x_2, y_2) , 都是在以点 (x_0, y_0) 为中心, 以 ρ_0 为半径的圆内或圆周上.

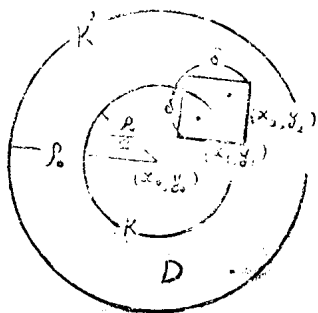


图 2.1

$$\therefore |f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|f(x_2, y_2) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

从而

$$|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| < \varepsilon.$$

例题 6 在 $x^2 + y^2 < 1$ 的所有的点 (x, y) 构成开区域,

以其各点为中心, 以 $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{x^2 + y^2})$ 为半径画圆, 试证这

些圆中的有限个不能完全覆盖原来的开区域.

解答

以 $x^2 + y^2 < 1$ 内任意的点 (x, y) 为中心, 在以

$\frac{1}{2}(1 - \sqrt{x^2 + y^2})$ 为半径的圆周上, 令 r 为图 2.2 中所示的点

到原点的距离, 即

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) \\
 &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{x^2 + y^2}).
 \end{aligned}$$

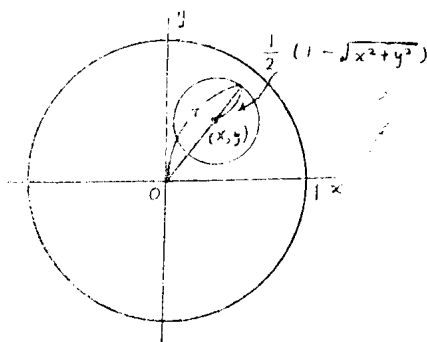


图 2.2

假设这样的圆为有限个，其中有最大的 r 的值。令这个为圆 C_1 〔以 (x_1, y_1) 为中心〕，设 r 为 r_1 ，有

$$r_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{x_1^2 + y_1^2}),$$

(x_1, y_1) 是 $x^2 + y^2 < 1$ 内的点，因而

$$x^2 + y^2 < 1 \quad \therefore r_1 < 1.$$

因为在 $x^2 + y^2 < 1$ 内， $r_1^2 \leq x^2 + y^2 < 1$ 的点 (x, y) 不包含在现在的这些圆内，所以有限个圆不能完全覆盖。

例题 7 证明基础理论13.

解答

取 D 内的任意一点 z_0 ，令 $w_0 = f(z_0)$ 。 $g(w)$ 在 D' 内连续，因而对任意的 $\varepsilon > 0$ ，有适当的 $\delta > 0$ 存在，对于满足关系式

$$0 < |w - w_0| < \delta$$

的 w , 有

$$|g(w) - g(w_0)| < \varepsilon.$$

因 $f(z)$ 在 D 内连续, 确定适当的正数 δ , 对于 $0 < |z - z_0| < \delta$ 的 z , 有 $0 < |f(z) - f(z_0)| < \delta$, 那么 $\varphi(z)$ 在 D 内单值连续.

例题 8 把下式改为 $a+ib$ 形.

(i) $(1+i)^2 + (2-i)^2$

(ii) $(1+2i)(3-2i)^2$

(iii) $i(2+3i)^4$

(iv) $-i(2+i)(1+2i)(1+i)$

(v) $\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}$

(vi) $\frac{1-i}{(3-i)(1+i)}$

(vii) $\frac{(1-i)^3}{(2+i)(1+2i)}$

(viii) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$

(ix) $\frac{(3+i)(2-i)}{(3-i)(2+i)}$

(x) $\frac{i(2+i) + (3+4i)}{i}$

(xi) $3 \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right\}$

(xii) $a \left(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi \right)$

解答

(i) $(1+2i-1) + (4-4i-1) = 3-2i$

$$(ii) (1+2i)(3-2i)^2 = (1+2i)(5-12i) = 29-2i$$

$$(iii) i(2+3i)^4 = i(-5+12i)^2 \\ = i(-119-120i) = 120-119i$$

$$(iv) -i(2+i)(1+2i)(1+i) = (1-2i)(-1+3i) \\ = 5+5i$$

$$(v) \frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1+i)^2 - (1-i)^2}{(1-i)(1+i)} \\ = \frac{4i}{2} = 2i$$

$$(vi) \frac{1-i}{(3-i)(1+i)} = \frac{(1-i)^2(3+i)}{(3-i)(3+i)(1+i)(1-i)} \\ = \frac{-2i(3+i)}{10 \times 2} = \frac{1-3i}{10} \\ = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$$

$$(vii) \frac{(1-i)^3}{(2+i)(1+2i)} = \frac{(1-i)^3(2-i)(1-2i)}{(2+i)(2-i)(1+2i)(1-2i)} \\ = \frac{-2i(1-i)(-5i)}{5 \times 5} \\ = \frac{2i^2(1-i)}{5} = -\frac{2}{5} + \frac{2}{5}i$$

$$(viii) \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 = \left\{ \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} \right\}^2 = \left(\frac{2i}{2}\right)^2 = -1$$

$$(ix) \frac{(3+i)(2-i)}{(3-i)(2+i)} = \frac{7-i}{7+i} = \frac{(7+i)^2}{(7+i)(7-i)} \\ = \frac{48-14i}{50} = \frac{24}{25} - \frac{7}{25}i$$

$$(x) \quad \frac{i(2+i)+3+4i}{i} = \frac{2+6i}{i} = -i(2+6i) \\ = 6-2i$$

$$(xi) \quad 3\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right)=-3i$$

$$(xii) \quad a\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)=a\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ =\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}ai$$

例题 9 求下列函数的实部、虚部及绝对值。

$$(i) \quad w = \frac{z-i}{z+i}$$

$$(ii) \quad w = z^3 - 2z$$

$$(iii) \quad w = \frac{(3+4i)(12-5i)}{2i}$$

解答

设 $z = x + iy$,

$$(i) \quad w = \frac{z-i}{z+i} = \frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)} \\ = \frac{\{x+i(y-1)\}\{x-i(y+1)\}}{\{x+i(y+1)\}\{x-i(y+1)\}} \\ = \frac{x^2+y^2-1-2ix}{x^2+(y+1)^2}$$

$$\operatorname{Re} w = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}, \quad \operatorname{Im} w = -\frac{2x}{x^2+(y+1)^2}$$

$$|w| = \sqrt{\left\{\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}\right\}^2 + \left\{-\frac{2x}{x^2+(y+1)^2}\right\}^2} \\ = \sqrt{\frac{(x^2+y^2)^2 + 2(x^2-y^2) + 1}{x^2+(y+1)^2}}$$