北京大学数学丛书

黎曼几何选讲

伍鸿熙　陈维桓　著

北京大学出版社

北京大学数学丛书

黎曼几何选讲

伍鸿熙　陈维桓　著

北京大学出版社

新登字(京)159号

北京大学数学丛书
黎曼几何选讲
伍鸿熙　陈维桓　著
责任编辑：刘　勇
*
北京大学出版社出版发行
(北京大学校内)
北京大学印刷厂印刷
新华书店经售
*
850×1168毫米　32开本　7.75印张　200千字
1993年6月第一版　1993年6月第一次印刷
印数：0001—3,000册
ISBN 7-301-02081-3/O·312
定价(平)：8.50元

内 容 简 介

本书主要讲述大范围黎曼几何的研究中具有重要意义的五个专题。内容包括：Hodge理论，和乐群，非紧非负曲率流形的结构，Gauss-Bonnet定理，黎曼流形的收敛性等。本书反映了大范围黎曼几何研究的概貌，有些内容是首次以讲义的形式作系统的讲解。例如，详细给出Hodge定理的一个完备的初等证明；比较全面地综述和乐群理论的过去和现状，以及在当代几何研究中的应用；剖析了陈省身关于Gauss-Bonnet定理的内在证明；介绍了Gromov关于黎曼流形收敛性的理论，把读者带进大范围黎曼几何的最新领域。

本书叙述条理清楚，推理严谨，富有启发性。本书还特别注重介绍黎曼几何的历史背景、基本思想以及各专题之间的内在联系。

本书可作为综合大学、师范院校数学系高年级学生选修课教材和研究生教材，也是广大数学工作者了解大范围黎曼几何课题的重要参考书。

前　记

在本书出版之际，请允许我把这本书酝酿和写作的过程作一番介绍，这对读者更好地了解本书也许是有帮助的。

本书的第一作者伍鸿熙是美国伯克利加州大学数学系教授。他的专长包括黎曼几何、复几何和复分析。难能可贵的是他热心于祖国数学事业的振兴，特别关心国内年青数学家的培养工作。十多年来，他数次回国讲学，每次讲学都提供了丰富的材料和信息，供国内同行继续讨论和研究。本书已是他在国内正式出版的第三本书①．

为了强化国内数学研究生的培养工作，提高研究生数学课程的教学水平，在陈省身教授等著名美籍华人数学家的倡导和组织下，从1984年暑期开始举办数学系研究生暑期教学中心的活动．伍鸿熙教授应邀在1984年第一期暑期中心（设在北京大学）开设“微分几何”课程，这个课程是大范围黎曼几何的引论，其讲稿就是已经出版的《黎曼几何初步》．这个课程深受同学们的欢迎和喜爱，并且上述讲义的正式出版对国内的微分几何教学工作已经产生了重大的影响．同学们的学习热情使伍鸿熙教授大受鼓舞．他感到，由于暑期中心的课时的限制，不可能对于大范围黎曼几

---

① 伍鸿熙教授在国内正式出版的另外两本书是：

伍鸿熙，吕以辇，陈志华，紧黎曼曲面引论，科学出版社，北京，1981．

伍鸿熙，沈纯理，虞言林，黎曼几何初步，北京大学出版社，北京，1989．

另外，伍鸿熙教授在北京第一次双微会议上的系列讲座《微分几何中的 Bochner 技巧》的中译本（石赫译）刊登在数学进展第10卷（1981）和第11卷（1982）上．这本讲义已经作者充实，作为专著出版：

H. Wu, The Bochner Technique in Differential Geometry, Math. Reports, Volume 3, Part 2, Harwood Academic Publishers, London-Paris, 1988.

何的一些课题作充分的阐述和讨论，因此希望有机会在国内比较深入地再讲几个专题。正是在这种考虑下，他不辞辛苦在1985年再度回国讲学，在北京大学用了三周时间讲了五个专题，他的讲稿就是本书的前身。

从本书的目录可以知道，伍鸿熙教授的讲演所涉及的面是十分广泛的，每一个专题都是大范围黎曼几何中非常重要的一个方面，而在它们之间又有深刻的联系。例如，Hodge 理论掀开了流形上大范围分析的最光辉的篇章，陈省身的关于 Gauss-Bonnet 定理的内在证明开创了大范围微分几何的新纪元，对微分几何的发展有着不可磨灭的功绩。本书的第一章和第四章分别就黎曼几何的这两大理论作了相当完整的叙述。第三章所讨论的黎曼流形的结构曾经是七十年代微分几何的一个中心课题，至今仍然是非常活跃的一个方面。第五章则是讨论 Gromov 近年来所提出的黎曼度量的收敛性定理，它们的研究正方兴未艾，而且在微分几何研究中已经有广泛的应用。特别要提及的是第二章。和乐群曾经是被寄予厚望的重要概念，由于 Berger 的工作认识到和乐群的可能的类型是极其有限的，于是它的重要性减弱了，几乎没有现存的文献对和乐群理论作过系统的介绍。但是，和乐群的概念和理论在当前一些重要的研究工作中起着不可缺少的作用，因此伍鸿熙教授化了相当大的气力增补了原讲稿的第二章，希望它成为和乐群的最系统、最详尽的引论。应该指出的是，在第二章的增补稿几乎完成八成的时候，A. Besse 的专著《Einstein Manifolds》出版了，其中对于和乐群的过去、现状和应用首次作了系统的介绍，这未免使第二章的价值受到影响。但是把两者对比之后会感到，它们实在是相得益彰、相辅相成的。

我很高兴能够作为协作者为本书的问世尽微薄之劳。更为庆幸的是，我能作为本书的第一个读者从中汲取丰富的营养。我们希望这本书能为广大的青年读者揭示黎曼几何的瑰丽的一角，更希望能够以此吸引有志者来开拓其中的新天地。

最后，我们感谢责任编辑刘勇同志为本书的出版付出的辛勤劳动，同时感谢北京大学出版社的同志们对于几何教材的建设给予的长期的、一贯的支持。

陈维桓

1988年6月于北京大学

序

在 1985 年夏天，我有幸在北京大学讲了近一个月的课。这本书是根据这个课的讲义编写而成的。

粗略地说，第三、四、五这三章基本上就是我当时的讲稿。但是单从第一、二章的长短，读者就立刻可以看到这两章的材料远远不是在一、两个月内所能讲完的。第一章所讨论的 Hodge 理论，当时因为时间所限，我没法将主要定理的证明解释详尽。回到美国后，我对这个证明进行了仔细加工，现在读起来就比较完整了。但是改动得最厉害的是第二章(和乐群)。这一章是我花了相当多时间完全重写的。这是书内最长的一章，同时也可以说是这本书最重要的一章。在这一章内我有机会向读者介绍一下和乐群理论在过去五十年来的历史。多多少少这也反映了几何学本身在过去五十年来的进展。在阐述这段历史的过程中，我向读者介绍了几何学内相当多的基本理论（对称空间，殆复流形，Kähler 几何，等等）。希望有了这个历史背景，读者会对这些似乎互不相关的题目有加深的了解。同时我也希望读者能够在这一章内找到一些在别的地方找不到的资料。

对于这本书的内容，我想再加两个按语。首先，第一章可以说是几何学内线性分析的一个初步介绍。我故意不用广义函数或傅里叶级数，而只用 Sobolev 空间来给 Hodge 定理作一个完备的初等证明。这是一个尝试。虽然在某些地方这个证明变得略为累赘，但是利害相比之下，我还是觉得值得这样做。其次，在挑选书内这五个不同的题目时，我没有想到这些题目之间是否有任何联系的问题。而事实上是有的。例如，de Rham 分解定理在第二、三章内都占有一个重要的位置。又例如 Gauss-Bonnet 定理不但

是第四章的题目，而且在第一章内也很自然地出现了。所以将这五章收集而成书，倒是顺理成章了。

我很幸运有陈维桓同志将我的初稿整理一遍才付印。从他的来信所提出的很多问题，使我立刻知道这本书的可读性是会经过他的努力而大大提高的。他改掉了原稿内很多的小错漏，将有些证明的铺叙方式合理化，改善了很多生硬的句子，同时也负起了定稿和付印方面的所有责任。我非常感谢他对这本书的贡献。

这是一本选讲，而不是一本初等的读物。所以，一方面，在编写时我没有受到一定要介绍所有必需介绍的题目的压力。事实上目前微分几何是一门很大的学问。在五十年前，数学家们基本上已放弃了作数学界全才的希望，因为在那时数学本身已发展得太快，而且包含的内容已太广。时至今日，是否有一个几何学家敢自称几何学全才实在是很成疑问。所以选讲就是清楚地说明，我只想挑几个有意思的题目向读者作一个小介绍。另一方面，如果时间和学识容许我这样做，我是很希望利用选讲，来向读者作一个几何学上非线性分析的入门性讲述的。很遗憾我不能这样做。目前好像还没有这方面的一本好书。读者如果有兴趣，则只好自己去读原来的文献。

这本书的另一个特点就是比较注重技巧性以外的全面观点，而忽略定理本身详细的证明。并不是说这本书没有证明任何一条定理。相反地，很多容易被初学者忽略的小地方，我是特别加工说得详尽的（例如第三章内定理 1 的证明）。但是对比之下，书内被证明的定理，是远比书内所提及而没有证明的定理来得少。这里所牵涉到的一个想法就是，一个初学者到了某个阶段，了解怎样去用一条定理有时是远比懂得怎样证明这条定理来得重要。我有一个感觉，就是国内的数学教育有时过分注重证明内每一步的逻辑性，而忽略了很多其它同样重要的问题。例如：从直观上去理解为什么这条定理是正确的？为什么这条定理是重要的？为什么需要这条定理？这条定理的要点在哪里？正因为这本书少给

证明，所以我才有机会对这种问题作一个粗浅的讨论。也许这是对目前数学教育的一个小贡献。

伍鸿熙

1988年12月20日于加州伯克利

目　　录

第一章　Hodge 理论

在阐述 Hodge 定理之前，我们先复习一下 de Rham 定理(参看[R])。设M是紧致的 n 维微分流形，$A^p(M)$是M上所有的光滑 p-形式构成的向量空间。命 $A^*(M)=\bigoplus\limits_{p=0}^{n} A^p(M)$，这是$M$上的外微分代数。在这个代数上，我们有外微分运算 $\mathrm{d}:A^*(M)\to A^*(M)$，使得 $\mathrm{d}(A^p(M))\subset A^{p+1}(M)$。命

$$
\begin{aligned}
Z^p(M) &= \ker(\mathrm{d}:A^p(M)\to A^{p+1}(M)) \\
&= \{\varphi\in A^p(M):\mathrm{d}\varphi=0\}, \\
E^p(M) &= \mathrm{d}(A^{p-1}(M)).
\end{aligned}
$$

$Z^p(M)$和 $E^p(M)$都是向量空间，根据外微分的定义可知 $E^p(M)$是 $Z^p(M)$的子空间。$Z^p(M)$中的元素称为闭形式，$E^p(M)$ 中的元素称为恰当形式。根据定义，第 p 个 de Rham 上同调群是

$$H^p(M)=Z^p(M)/E^p(M),\quad p=0,1,\cdots,n.$$

de Rham 定理说，$H^p(M)$与M的第 p 个实系数奇异上同调群 $H_S^p(M,\boldsymbol{R})$ 是同构的。根据M的紧致性以及代数拓扑理论，$H_S^p(M,\boldsymbol{R})$是有限维的，因而 $\dim H^p(M)<+\infty$。

Hodge 定理的主要内容，可以说是通过在微分流形M上引进一个黎曼度量来研究拓扑不变量 $H_S^p(M,\boldsymbol{R})$。这个想法是非常大胆的，因为黎曼度量与 $H_S^p(M,\boldsymbol{R})$ 看上去是完全不相干的，所以这个做法好像使原来的问题复杂化了。但事实上这使问题得到简化。说得更详细一点，根据定义，de Rham 上同调群 $H^p(M)$的每一个元素是一个陪集。从运算的角度来讲，陪集是难以处理的。普通的办法是在陪集中挑一个代表。问题是如何去挑一个最好的代表来简化一般的运算。举例来说：根据有理数域 Q 的定义，整

数 3 作为有理数域内的一元，其实是等价类$\left\{\cdots, \frac{-6}{-2}, \frac{-3}{-1}, \frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \cdots\right\}$的一个代表。显然我们习惯了用这个代表而不用等价类本身，而且我们懂得选取 $3\left(=\frac{3}{1}\right)$作为这个等价类的代表而不选取 $-48/(-16)$，或 $210/70$。这就充分说明了挑选一个最好的代表的重要性。Hodge 的杰出想法就是借助于黎曼度量，在每个陪集 $a+E^p(M)$内挑出一个所谓调和形式的代表，而且证明了这个调和形式在每个陪集内的唯一性。所以 $H^p(M)$就与所有 p 阶的调和形式张成的向量空间 $\mathscr{H}^p$ 同构。由于这些调和形式都是椭圆方程 $\Delta a=0$ 的解，所以从经典的椭圆方程理论（见下文）可知 $\mathscr{H}^p$ 一定是有限维的。既然已经知道 $H_S^p(M,\boldsymbol{R})\cong H^p(M)\cong\mathscr{H}^p$（其中$\cong$表示同构），所以 $H_S^p(M,\boldsymbol{R})$一定是有限维的。这样，我们就倒过来用分析的方法证明了上面所说过的拓扑结论。从 Hodge 定理中这个最平凡的应用，我们可以体会到为什么这个理论是值得学习的。下面开始技术性的讨论。

为此，在M上引进黎曼度量$\langle\, ,\rangle$。若 $\varphi,\psi\in A^p$（在不会产生混淆时，我们把 $A^p(M)$简记为 A^p），则可以定义 φ 和 ψ 的内积$\langle\varphi,\psi\rangle$如下：设 $X_1,\cdots,X_n$ 构成局部单位正交标架场，即 $\langle X_i,X_j\rangle=\delta_{ij}$。设$\{\omega^1,\cdots,\omega^n\}$是$\{X_i\}$的对偶余标架场，即 $\omega^i(X_j)=\delta^i_j$。我们规定这些 1-形式是彼此单位正交的，即$\langle\omega^i,\omega^j\rangle=\delta^{ij}$。如果 φ,ψ 是 1-形式，设 $\varphi=\sum_i\varphi_i\omega^i$，$\psi=\sum_j\psi_j\omega^j$，则

$$\langle\varphi,\psi\rangle=\sum_i\varphi_i\,\psi_i.$$

请读者验证，$\langle\varphi,\psi\rangle$的定义与局部单位标架场$\{X_i\}$的选取是无关的。这样，每一个余切空间 $M_x^*(x\in M)$成为内积空间，外形式空间 $\wedge^p M_x^*$ 也自然地成为内积空间，因而对于 $\varphi,\psi\in A^p$，$\langle\varphi,\psi\rangle$ 是有定义的。具体地说，对于上面的余标架场$\{\omega^i\}$，规定局部的 p 次外

微分式组$\{\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_p}: i_1<\cdots<i_p\}$在每一点是单位正交的. 若设$\varphi,\psi\in A^p$的局部表达式分别是

$$\varphi=\sum_{i_1<\cdots<i_p}\varphi_{i_1\cdots i_p}\,\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_p},$$

$$\psi=\sum_{i_1<\cdots<i_p}\psi_{i_1\cdots i_p}\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_p},$$

于是

$$\langle\varphi,\psi\rangle(x)=\sum_{i_1<\cdots<i_p}\varphi_{i_1\cdots i_p}(x)\cdot\ \psi_{i_1\cdots i_p}(x). \qquad (1)$$

利用初等线性代数容易证明，上述定义与局部标架场$\{\omega^i\}$的选取无关.

现设M为有定向流形（参看[W3], §6 定理 7 后面的讨论). 下面我们所考虑的标架场和余标架场都是指与M的定向相一致的标架场和余标架场. 因此，当我们说$\{\omega^i\}$是M的一个局部余标架场时，$\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n$恰好是$M$上与定向一致的体积元素，记作$\Omega$.

现在我们定义极为重要的 Hodge 星算子，亦称$*$算子（参考[W3], §12). $*$算子把p次微分式映为n-p次微分式，即$*: A^p\to A^{n-p}$，并且它是从A^p到A^{n-p}的A^0-模同态. 因此只要对A^p的局部基底场定义$*$就够了. 若$\{\omega^i\}$是任意的单位正交余标架场，则命

$$*(\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^p)=\omega^{p+1}\wedge\cdots\wedge\omega^n.$$

若$1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n$是任意一组指标，而$i_{p+1}<\cdots<i_n$是它的相补指标组，则

$$\{\omega^{i_1},\cdots,\omega^{i_p},\omega^{i_{p+1}},\cdots,\omega^{i_{n-1}},\varepsilon_{i_1\cdots i_n}\cdot\omega^{i_n}\}$$

仍是余标架场，其中

$$\varepsilon_{i_1\cdots i_n}=\begin{cases}1, & \text{若 } i_1,\cdots,i_n \text{ 是 } 1,\cdots,n \text{ 的偶排列},\\ -1, & \text{若 } i_1,\cdots,i_n \text{ 是 } 1,\cdots,n \text{ 的奇排列},\\ 0, & \text{其余情形}.\end{cases}$$

因此，由前面的规定，我们有

$$*(\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_p})=\varepsilon_{i_1\cdots i_n}\omega^{i_{p+1}}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_n}.$$

若

$$f=\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_p},$$

则由 * 算子的 A^0-线性的性质得到

$$\begin{aligned}*f&=\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}*(\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_p})\\&=\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_p\\ i_{p+1}<\cdots<i_n}}\varepsilon_{i_1\cdots i_n}f_{i_1\cdots i_p}\,\omega^{i_{p+1}}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_n}.\end{aligned}$$

容易证明，* 算子的上述定义与$\{\omega^i\}$的选取是无关的。事实上，对于任意两个 $\varphi,\psi\in A^p$，我们有

$$\varphi\wedge*\psi=\langle\varphi,\psi\rangle\Omega;$$

并且 * 算子可以通过上式唯一确定。

根据定义直接可得

$$*\Omega=1,\quad *1=\Omega, \tag{2}$$

$$**\varphi=(-1)^{pn+p}\varphi,\quad \forall\,\varphi\in A^p. \tag{3}$$

由此可知

$$\langle\varphi,\psi\rangle=\langle*\varphi,*\psi\rangle,\quad \forall\,\varphi,\psi\in A^p. \tag{4}$$

实际上

$$\begin{aligned}\langle*\varphi,*\psi\rangle\Omega&=(*\varphi)\wedge*(*\psi)\\&=(-1)^{pn+p}(*\varphi)\wedge\psi=\psi\wedge*\varphi\\&=\langle\psi,\varphi\rangle\Omega,\end{aligned}$$

因此

$$\langle*\varphi,*\psi\rangle=\langle\psi,\varphi\rangle=\langle\varphi,\psi\rangle.$$

运用 * 算子，可以定义另一个实线性算子 $\delta:A^p\to A^{p-1}$，即对于任意的 $\varphi\in A^p$，规定

$$\delta\varphi=(-1)^{np+n+1}*\mathrm{d}*\varphi. \tag{5}$$

下面我们会看到，δ 是外微分算子 d 的对偶算子（这里关于符号的规定是令人头疼的，最可靠的办法是参考［R］）。由于 $\mathrm{d}^2=0$，故

有 $\delta^2=0$。命

$$\Delta=\delta\,\mathrm{d}+\mathrm{d}\,\delta, \tag{6}$$

则Δ是保型的算子，即Δ把 A^p 映到 A^p，称为 Laplace **算子**。显然

$$\Delta=(\mathrm{d}+\delta)^2. \tag{7}$$

现命算子

$$P=\mathrm{d}+\delta, \tag{8}$$

这个一阶微分算子是本章的主要研究对象之一。这样，$\Delta=P\cdot P$。若 $\Delta\varphi=0,\varphi\in A^*$，则称 φ 是**调和形式**。如果 M 是有平坦度量的 $\boldsymbol{R}^n$，则经直接计算得到

$$\Delta\Big(\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}\,\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}\Big)$$

$$=-\sum_{i_1<\cdots<i_p}\Big(\sum_j\frac{\partial^2 f_{i_1\cdots i_p}}{(\partial x^j)^2}\Big)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}.$$

所以，在 $\boldsymbol{R}^n$ 中调和形式就是系数为调和函数的微分式。将上式用于 $\boldsymbol{R}^n$ 中的光滑函数，则可看到这里所定义的 Δ 与通常在函数论中所用的 Laplace 算子恰好有相反的符号。当然，符号选择的本身有相当大的随意性，往往是得失兼有。我们在这里定义的 Δ 尽管在作用到函数上的时候与通常的 Laplace 算子不一致，但是却保证了Δ的**正算子性质**（即Δ的特征值皆$\geqslant 0$，见下文）。

在这里我们应该立刻指出一个事实，就是在一般的黎曼流形 M 上要具体地算出一些调和形式的例子是十分困难的，除非是多加一些特殊的条件。比方说，从下面的(19)和(20)式中可以看到，任何平行的外形式都是调和形式。在一般的情况下逆定理不成立，但是在所谓紧的对称空间上（在第二章我们对这种流形会作简单的介绍），所有的调和形式都是平行形式。又在 Kähler 流形上，其 Kähler 形式（见下面第二章§3，引理 7 的证明）是平行的，所以也必是调和形式。在紧的 Kähler 流形上，所有全纯形式也是调和形式。除此之外，类似的一般性结果就很少了。

现在我们在 $A^* = \bigoplus_{p=0}^{n} A^p$ 中引进(整体的) 内积(,). 设 $\varphi,\psi\in A^p$, 命

$$(\varphi,\psi)\equiv\int_M \langle\varphi,\psi\rangle\Omega=\int_M \varphi\wedge *\psi. \tag{9}$$

容易验证, $(\varphi,\psi)=(\psi,\varphi)$, 并且 $\|\varphi\|^2=(\varphi,\varphi)\geqslant 0$, 且等号成立当且仅当 $\varphi\equiv 0$. 因此(,)是 A^p 上的内积. 若 $\varphi\in A^p,\psi\in A^q,p\neq q$,则规定 $(\varphi,\psi)=0$, 于是上面的内积可以扩充到外微分代数 A^*.

由(4)式我们有

$$(*\varphi,*\psi)=(\varphi,\psi),$$

所以 $*$ 算子是内积空间(A^*,(,))的等距变换. 此外, 若 $f_1\in A^{p-1}$, $f_2\in A^p$,则

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(f_1\wedge *f_2) &= \mathrm{d}f_1\wedge *f_2+(-1)^{p-1}f_1\wedge \mathrm{d}*f_2\\
&= \mathrm{d}f_1\wedge *f_2+(-1)^{np+n}f_1\wedge *(*\mathrm{d}*f_2)\\
&= \mathrm{d}f\wedge *f_2-f_1\wedge *\delta f_2.
\end{aligned}$$

由于M是紧致的, 根据 Stokes 公式得到

$$\int_M \mathrm{d}f_1\wedge *f_2=\int_M f_1\wedge *\delta f_2,$$

即

$$(\mathrm{d}f_1,f_2)=(f_1,\delta f_2). \tag{10}$$

因此微分算子 d 和 δ 是关于内积(,)的对偶算子. 上述对偶性是由于算子 δ 的定义中关于符号的复杂规定保证的. 由(10)式可知, P 和Δ都是自对偶算子. 实际上, 若 $f_1,f_2\in A^*$,则

$$\begin{aligned}
(Pf_1,f_2) &= ((\mathrm{d}+\delta)f_1,f_2)\\
&= (\mathrm{d}f_1,f_2)+(\delta f_1,f_2)=(f_1,Pf_2),\\
(\Delta f_1,f_2) &= (P(Pf_1),f_2)\\
&= (Pf_1,Pf_2)=(f_1,\Delta f_2).
\end{aligned}$$

作为直接推论, 我们有$(\Delta f,f)\geqslant 0$,因为

$$(\Delta f,f)=(Pf,Pf)=(\mathrm{d}f,\mathrm{d}f)+(\delta f,\delta f)\geqslant 0, \tag{11}$$