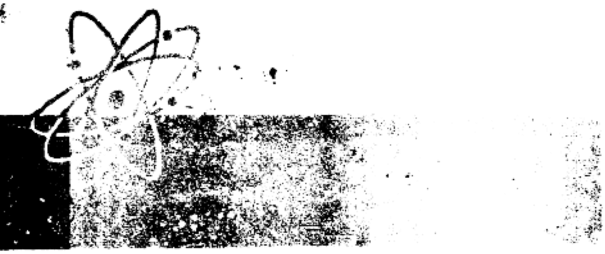

北京市1978年
中学生数学竞赛题解

北京市1978年
中学生数学竞赛题解

北京市中学生数学竞赛委员会

北 京 出 版 社

北京市中学生数学竞赛辅导报告汇集

1．华罗庚：谈谈与蜂房结构有关的数学问题

2．秦元勋：无限的数学

3．赵慈庚：谈谈解答数学问题

北京市 1978 年

中学生数学竞赛题解

北京市中学生数学竞赛委员会

*

北 京 出 版 社 出 版

北 京 市 新 华 书 店 发 行

北 京 印 刷 一 厂 印 刷

*

787×1092 毫米 32 开本 1 印张 20.000 字

1979 年 1 月第 1 版 1979 年 1 月第 1 次印刷

印数 1－200,000

书号：7071・578 定价：0.10 元

前　言

举办科学学习竞赛，是培养青少年从小爱科学，选拔优秀青少年科学爱好者的一项十分有益的活动。在1966年以前，北京市曾举办过五届中学生数学竞赛，取得了很好的效果。后来，由于林彪、“四人帮”对科学工作和教育事业的百般摧残，这项活动也被中断了。

华主席为首的党中央一举粉碎了“四人帮”。在全国科学大会上，华主席高瞻远瞩地发出了“一定要极大地提高整个中华民族的科学文化水平”的伟大号召，又指出，对青少年的培养，是“一个十分重要的，应当特别予以重视的方面”。在伟大祖国科学的春天里，数学竞赛也获得了新生。在党的亲切关怀和各方面的大力支持下，北京市教育局和市科学技术协会联合举办了1978年北京市中学生数学竞赛。现将数学竞赛的试题和解答交付出版。

这次数学竞赛举行之前，我们邀请了著名数学家华罗庚和秦元勋、赵慈庚等同志为中学生数学爱好者作了有关数学知识的辅导报告。这些报告深受广大师生的欢迎。我们将把这次的和今后各届数学竞赛的这类报告另编成《北京市中学生数学竞赛辅导报告汇集》，陆续出版，供广大青少年阅读。

北京市中学生数学竞赛委员会

1978年

北京市1978年中学生数学竞赛

第一试试题解答

试题 1 如果$\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}$，化简

$$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}.$$

解 因为$\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}$，所以$1<x<3$.

$$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}=|x-1|+|x-3|$$
$$=(x-1)+(3-x)=2.$$

试题 2 化简 $\log_2 6\times\lg\frac{1}{8}+\lg\frac{27}{125}$.

解 原式$=\frac{\lg 6}{\lg 2}\times(-3\lg 2)+3\lg\frac{3}{5}$

$$=-3\lg 6+3\lg\frac{3}{5}$$

$$=-3\left(\lg 6-\lg\frac{3}{5}\right)=-3\lg 10=-3.$$

试题 3 把下面的式子分解因式：

$$4(x^2+3x+1)^2-(x^2+x-4)^2-(x^2+5x+6)^2.$$

解 原式$=[(2x^2+6x+2)-(x^2+x-4)]$

$$[(2x^2+6x+2)+(x^2+x-4)]$$

$$-(x^2+5x+6)^2$$
$$=(x^2+5x+6)(3x^2+7x-2)-(x^2+5x+6)^2$$
$$=(x^2+5x+6)(2x^2+2x-8)$$
$$=2(x+2)(x+3)(x^2+x-4).$$

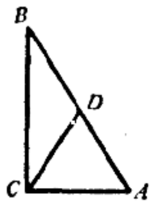

图 1

试题 4 已知直角三角形的周长为 $2+\sqrt{6}$，斜边上的中线长为 1，求这个三角形的面积（图 1）.

解 设 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，那么 $a+b+c=2+\sqrt{6}$. 因为直角三角形斜边的中点到三个顶点的距离相等，所以 $c=2CD=2$.

$$a+b=\sqrt{6}, \tag{1}$$

又
$$a^2+b^2=4. \tag{2}$$

$(1)^2-(2)$得 $2ab=2$.

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}.$$

试题 5 在$\triangle ABC$中，D为BC的中点，过D作一直线分别交AC于E，交AB的延长线于F（图 2）. 求证

$AE:EC=AF:BF$.

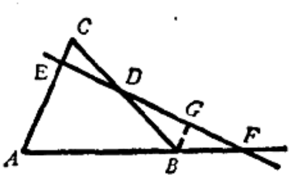

图 2

证明 过点B作$BG\parallel AC$交EF于G，那么

$$\angle C=\angle DBG.$$

因为　　$BD=CD$，$\angle CDE=\angle BDG$，

所以　　$\triangle CDE\cong\triangle BDG$，

$BG=EC$.

因为　　$BG\parallel AC$，

所以　　$\triangle FEA\backsim\triangle FGB$，

$AE:BG=AF:BF$.

但　　$BG=EC$，

所以　　$AE:EC=AF:BF$.

试题 6　求证

$$\sin 50^\circ(1+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,10^\circ)=1.$$

证明　$\sin 50^\circ(1+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,10^\circ)$

$$=\sin 50^\circ\times\frac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}{\cos 10^\circ}$$

$$=2\sin 50^\circ\times\frac{\sin 30^\circ\cos 10^\circ+\cos 30^\circ\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}$$

$$=\frac{2\cos 40^\circ\sin 40^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ}=1.$$

试题 7　已知P为圆$x^2+y^2=4$上的一个动点，又点Q的坐标为（4，0），试求线段PQ的中点轨迹的方程(图 3).

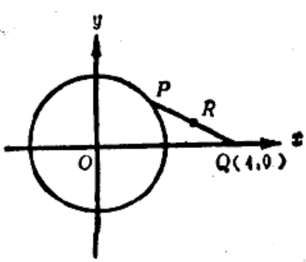

图 3

解　设线段PQ的中点R的坐标为(x,y)，那么由中点坐标公式，可知点P的坐标为$(2x-4,\ 2y)$.

又点 P 在圆 $x^2+y^2=4$ 上，所以

$$(2x-4)^2+(2y)^2=4,$$

或

$$(x-2)^2+y^2=1.$$

这就是所求轨迹的方程.

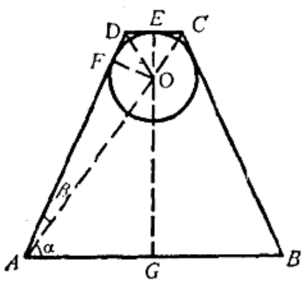

图 4

试题 8 在等腰梯形内，有一圆与梯形的上底和两腰都相切（图 4）. 已知梯形下底的长为 6，高为 5，圆的半径为 1，求梯形的腰和下底夹角的余弦的值.

解一 DC 的中点 E 和 AB 的中点 G 的连接线 EG，就是等腰梯形 $ABCD$ 的对称轴. OD、OC 分别为 $\angle ADC$、$\angle BCD$ 的平分线.

因为 $$\angle ADC=\angle BCD,$$

所以 $$\angle ODC=\angle OCD.$$

于是，$OD=OC$，所以 O 在 EG 上.

连接 OA，在直角三角形 AGO 中，

$$OG=EG-OE=4,$$

$$AG=\frac{1}{2}AB=3.$$

所以 $$AO=\sqrt{AG^2+OG^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5.$$

设 $\angle OAG=\alpha$，$\angle OAF=\beta$，

那么 $$\sin\alpha=\frac{OG}{AO}=\frac{4}{5}, \quad \cos\alpha=\frac{AG}{AO}=\frac{3}{5}.$$

在直角三角形 AOF 中，$OF=1$，所以

$$AF=\sqrt{AO^2-OF^2}=\sqrt{5^2-1^2}=2\sqrt{6}.$$

$$\sin\beta=\frac{OF}{AO}=\frac{1}{5},\quad \cos\beta=\frac{AF}{AO}=\frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

所以

$$\cos\angle DAB=\cos(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{2\sqrt{6}}{5}-\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{6\sqrt{6}-4}{25}.$$

报上发表了试题解答后，有一位读者寄来了本题的另一个解法.

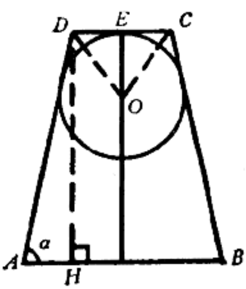

图 5

解二 令 $\angle BAD=\alpha$，$DE=x$（图 5）. 那么

$$\angle ODE=\frac{1}{2}\angle ADC$$

$$=\frac{1}{2}(\pi-\alpha),$$

$$x=OE\operatorname{ctg}\angle ODE=1\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{DH}{AH}=\frac{5}{3-x}. \qquad (2)$$

由 (1) 与 (2)，得 $\dfrac{5}{3-x}=\dfrac{2x}{1-x^2}$，所以

$$3x^2+6x-5=0.$$

舍去这方程的负根，得 $x=\dfrac{2\sqrt{6}-3}{3}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. 由此，

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\left(\frac{2\sqrt{6}-3}{3}\right)^2}{1+\left(\frac{2\sqrt{6}-3}{3}\right)^2}=\frac{6\sqrt{6}-4}{25}.$$

北京市1978年中学生数学竞赛

第二试试题解答

试题 1 有一条光线从一点 A $(-3, 5)$ 射到直线 l:

$$3x-4y+4=0 \qquad (1)$$

以后，再反射到一点 B $(2, 15)$. 求这条光线从 A 到 B 的长度.

解一 直线 l 的斜率是$\frac{3}{4}$. 过 A 而垂直于 l 的直线 p的方程是

$$4x+3y-3=0. \qquad (2)$$

解方程组 (1) 与 (2) 求得 l 与 p 的交点 C $(0, 1)$. (图 6)

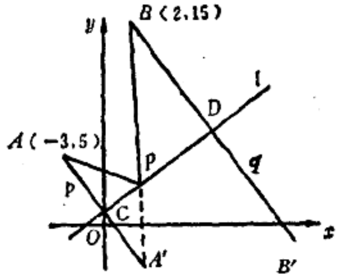

图 6

设点 A' 关于 l 与 A 对称，那么 C 便是 AA' 的中点. 借中点坐标公式求得 A' 的坐标 $(3, -3)$.

如果光线在 l 上的反射点是 P，由于光线的入射角等于反射角，那么$\angle A'PC=\angle APC=\angle DPB$，从而 A'、P、B 共线. 所以

$$AP+PB=A'P+PB=A'B$$
$$=\sqrt{(3-2)^2+(-3-15)^2}=5\sqrt{13}.$$

解二 过 B 而垂直于 l 的直线 q 的方程是

$$4x+3y-53=0. \tag{3}$$

由（1）与（3）求得 l 与 q 的交点 D（8，7）．然后求得 B 关于 l 的对称点 B'（14，－1）．于是光线之长等于

$$AB'=\sqrt{(14+3)^2+(-1-5)^2}=5\sqrt{13}.$$

解三 过 A 而垂直于 l 的直线 p，可以用参数方程

$$\left.\begin{aligned}x&=-3+\frac{3}{5}r\\ y&=5-\frac{4}{5}r\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

表示，这里 r 是 A 到动点 (x, y) 的距离．将（4）代入（1）得

$$3\left(-3+\frac{3}{5}r\right)-4\left(5-\frac{4}{5}r\right)+4=0.$$

由此解得 $r=5$，这表示 $AC=5$，那么 $AA'=10$．以 $r=10$ 代入（4），求得 $x=3$，$y=-3$．于是 A' 的坐标是（3，－3）．所以，

$$光线之长=A'B=\sqrt{(2-3)^2+(15+3)^2}=5\sqrt{13}.$$

解四 过 B 而垂直于 l 的直线 q 可以用参数方程

$$\left.\begin{aligned}x&=2+\frac{3}{5}r\\ y&=15-\frac{4}{5}r\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

表示，这时 r 是从 B 到动点 (x, y) 的距离．将（5）代入（1）

求得 $r=10$，那么 $BD=10$，$BB'=20$. 以 $r=20$ 代入 (5) 求得 B' 的坐标 (14, -1).

光线之长 $=AB'=\sqrt{(14+3)^2+(-1-5)^2}=5\sqrt{13}$.

解这题所用的完全是基本知识. 中学数学课程里多半有与这一题接近的习题. 例如平面几何里常常有下边这样的习题：在一条直线的一旁有两个定点，让我们在直线上求一点，要它到两定点的距离之和最小. 那时只求一点，现在是求这距离之和，虽然改成了解析几何问题，但本质上是一个问题.

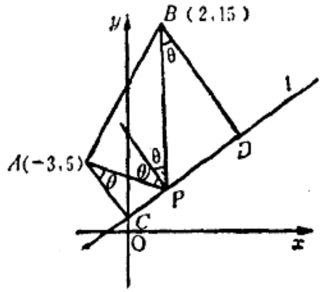

图 7

有一位参加竞赛的同学解答得很好. 这解法是命题委员会没有想到的. 他的解法如下：

解五 图 7 中由于 $\angle APC=\angle DPB$，所以过 P 点而垂直于 l 的直线平分 $\angle BPA$. 命 $\frac{1}{2}\angle BPA=\theta$，则 $\angle PAC=\angle PBD=\theta$. 不难求得 l 的垂线 $AC=5, BD=10$；设 $AP=a$，$BP=b$，那么

$$\cos\theta=\frac{5}{a}=\frac{10}{b}.$$

对于 $\triangle APB$ 使用余弦定理

$$\begin{aligned}AB^2&=a^2+b^2-2ab\cos 2\theta\\&=a^2+b^2-2ab(2\cos^2\theta-1)\end{aligned}$$

$$=(a+b)^2-4ab\times\frac{5}{a}\times\frac{10}{b}$$
$$=(a+b)^2-200. \tag{6}$$

但是 $AB^2=(2+3)^2+(15-5)^2=125$. 代入(6)解得

$$a+b=\sqrt{325}=5\sqrt{13}.$$

试题 2 设 a 与 b 都是整数，试证两方程

$$x^2+10ax+5b\pm3=0$$

都没有整数根.

证一 所给方程的根是

$$x_1=-5a+\sqrt{25a^2-5b\mp3}$$

和

$$x_2=-5a-\sqrt{25a^2-5b\mp3}.$$

它们是否为整数，在于 $25a^2-5b\mp3$ 是否为整数的平方. 现在证明这不能是整数的平方.

$25a^2-5b=5(5a^2-b)$，它的末位数码只能是 0 或 5，那么 $25a^2-5b\mp3$ 的末位数只能是 2,3,7,8 四者之一. 然而任何整数的平方的末位数一定是 0,1,4,5,6,9 六者之一. 所以 $25a^2-5b\mp3$ 不是整数的平方，从而 $\sqrt{25a^2-5b\mp3}$ 不是整数，x_1, x_2 不能是整数.

证二 任何整数 m 总可以写成 $5c+d$ 的形状，其中 c 是整数，d 是 $-2,-1,0,1,2$ 五者之一，那么 $m^2=25c^2+10cd+d^2=5(5c^2+2cd)+d^2$. 所以用 5 除 m^2 所得的余数不外是 0,1 或 4. 然而用 5 除 $25a^2-5b\mp3=5(5a^2-b)\mp3$ 所得的余数只能是 2 或 3，所以 $25a^2-5b\mp3$ 不能是任何整数的平方.

证三 由根与系数的关系知道 $x_1x_2=5b\pm3$，$x_1+x_2=$

$-10a$. $-10a$ 的末位数是 0.

如果 x_1, x_2 是同号的整数，它们的末位数字只有下列十种配伍：

x_1 的末位	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_2 的末位	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

那么 x_1 与 x_2 的乘积的末位必为 0,9,6,1,4,5 六者之一，但是现在 $x_1x_2=5b\pm3$ 的末位却是 2,3,7,8 四者之一，这两方面互相排斥.

如果 x_1 与 x_2 是反号的两个整数，那么它们的末位数码相同，从而 x_1x_2 的末位数码是 0,1,4,5,6,9 六者之一. 又发生了同样的排斥情况.

所以，x_1 与 x_2 不能是整数.

一元二次方程的求根公式，无疑是重要的. 判别式是判别根的虚实的唯一根据. 现在的不同之处是从判别式是否为整数的平方来考虑我们的问题. 解决问题的关键，是从整数的末位数字来看这整数是否为另一个整数的平方. 这提醒我们应该留心于数与数之间的规律.

这题也有一位同学的证法很有趣. 下边是这证法.

证四 将原方程迁项，得

$$x^2=-10ax-5b\mp3=-5(2ax+b)\mp3. \tag{1}$$

如果 x 是整数，那么左端的末位数一定是 0,1,4,5,6,9 六者之一. 然而右端的末位数却是 2,3,7,8 四者之一. (1) 的两端不能相等，说明原方程没有整数根.

把这方法略加改变还可以再简单些：

证五 由原方程迁项，得

$$x^2+10ax+5b=\mp 3.$$

因为左端后两项之和是 5 的倍数，那么按这等式来说用 5 除 x^2 应该余 2 或 3；然而 x 是整数时，这是不可能的。

试题 3 从等差数列

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ \cdots \tag{1}$$

按下边所说的规律，另作一个数列

$$3,\ 7,\ 15,\ \cdots. \tag{2}$$

(2)的第一项 b_1 就是(1)的第一项 a_1，即是 3；(2)的第二项 b_2 是(1)的第三($=b_1$)项 a_3，即是 7；(2)的第三项 b_3 是(1)的第七($=b_2$)项 a_7，即是 15；如此类推，(2)的第 n 项 b_n 是(1)的第 b_{n-1} 项．试写出(2)的第四项及第五项；求数列(2)的通项，并加以证明．

解一 等差数(1)的通项是 $a_n=2n+1$．

(2)的第四项是(1)的第 15 项，所以 $b_4=a_{15}=2\times 15+1=31$．(2)的第五项是(1)的第 31 项，所以 $b_5=a_{31}=2\times 31+1=63$．

从(2)的定义知道 $b_n=a_{b_{n-1}}$，而 $a_{b_{n-1}}=2b_{n-1}+1$，所以

$$b_n=2b_{n-1}+1. \tag{3}$$

现在需要把 b_n 写成 n 的函数．在(3)的两端各加 1，得到

$$b_n+1=2(b_{n-1}+1). \tag{4}$$

这就是说(2)的任何项加 1，必定等于前项与 1 之和的两倍．依照这关系从(4)一个一个地倒推回去，便是

$$\left.\begin{aligned}
&b_{n-1}+1=2(b_{n-2}+1),\\
&b_{n-2}+1=2(b_{n-3}+1),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&b_3+1=2(b_2+1),\\
&b_2+1=2(b_1+1).
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

把这些等式的第一个代入（4）的右端，就可以把 $b_{n-1}+1$ 换掉；再把(5)的第二个代入所得的等式，便又换掉了 $b_{n-2}+1$. 这样换 $n-2$ 次就只剩下 b_1+1 了．用式子写出来就是

$$b_n+1=2(b_{n-1}+1)=2^2(b_{n-2}+1)=\cdots=2^{n-1}(b_1+1). \tag{6}$$

但是 $b_1+1=4$，所以 $b_n+1=2^{n+1}$，因此 $b_n=2^{n+1}-1$. 这就是(2)的通项.

解二 如果把 b_n+1 记作 c_n，自然 $b_{n-1}+1$ 就该记作 c_{n-1}，其余可以类推. 这样就又有一个数列

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ \cdots,\ c_{n-1},\ c_n,\ \cdots. \tag{7}$$

前边证明的(4)式对(7)来说就是 $c_n=2c_{n-1}$. 这说明(7)是公比为 2 的等比数列，所以 $c_n=2^{n-1}c_1$. 然而 $c_1=b_1+1=4$，那么 $c_n=2^{n+1}$，因此 $b_n=2^{n+1}-1$.

解三 从(3)倒推一步是

$$b_{n-1}=2b_{n-2}+1。 \tag{8}$$

由(3)减(8)，得

$$b_n-b_{n-1}=2(b_{n-1}-b_{n-2}). \tag{9}$$

这说明

$$b_2-b_1,\ b_3-b_2,\ \cdots,\ b_n-b_{n-1},\ \cdots$$

是公比为 2 的等比数列，所以