

电磁场的数值计算和微波的计算机辅助设计

高等学校教材

电磁场的数值计算 和微波的计算机辅助设计

曹世昌 编著

电子工业出版社

459
06

内 容 简 介

本书主要是讨论用计算机技术求解微波领域内的各类问题。主要内容有,分别用差分法、有限元法和边界元法求微波传输系统以及谐振系统中的高频电磁场分布,它们的特征量——截止频率、特性阻抗、衰减常数或谐振频率和品质因素等,以及传输系统中不连续的阻抗参量;计算 N 口复合网络的 S 参量;用最优化方法计算和设计微波电路和元件;高功率微波电真空器件的大信号计算等。在每章中均有计算实例、计算框图和程序以及程序的详细说明。

本书为原电子工业部组织编写的工科电子类统编教材,适合于从事微波工作的研究生用,也可作为本科生的选修课教材,同时能用作在微波领域工作的科技人员的参考书。

电磁场的数值计算和微波 的计算机辅助设计

曹世昌 编著

责任编辑:洋溢

电子工业出版社出版(北京海淀区万寿路)

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

中国科学院印刷厂印刷

*

开本: 787×1092 毫米 1/16 印张: 20.125 字数: 516千字

1989年9月第一版 1989年9月第一次印刷

印数: 1—1,600册 定价: 4.05元

ISBN 7-5053-0592-1/TN·220

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定,我部承担了全国高等学校、中等专业学校工科电子类专业教材的编审、出版的组织工作。由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力,有关出版社的紧密配合,从1978年至1985年,已编审、出版了两轮教材,正在陆续供给高等学校和中等专业学校教学使用。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应“三个面向”的需要,贯彻“努力提高教材质量,逐步实现教材多样化,增加不同品种、不同层次、不同学术观点、不同风格、不同改革试验的教材”的精神,我部所属的七个高等学校教材编审委员会和两个中等专业学校教材编审委员会,在总结前两轮教材工作的基础上,结合教育形势的发展和教学改革的需要,制订了1986~1990年的“七五”(第三轮)教材编审出版规划。列入规划的教材、实验教材、教学参考书等近400种选题。这批教材的评选推荐和编写工作由各编委会直接组织进行。

这批教材的书稿,是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中经院校推荐,由编审委员会(小组)评选择优产生出来的。广大编审者、各编审委员会和有关出版社为保证教材的出版和提高教材的质量,作出了不懈的努力。

限于水平和经验,这批教材的编审、出版工作还会有缺点和不足之处,希望使用教材的单位,广大教师和同学积极提出批评建议,共同为不断提高工科电子类专业教材的质量而努力。

机械电子工业部教材办公室

前 言

本教材系按前电子工业部的工科电子类专业教材 1986—1990 年编审出版规划,由电子物理与器件教材编审委员会电子物理与器件编审小组征稿并推荐出版,责编委张克潜。

本教材由东南大学担任主编,清华大学吴伯瑜担任主审。

本课程的参考学时数为 60 学时,其主要内容为:分别用差分法、有限元法和边界元法求解微波传输系统和谐振系统中的电磁场分布和它们的特征量——特性阻抗、截止频率或谐振频率和品质因素等;求出传输系统中不连续的阻抗参量。计算 N 口复合微波网络的 S 参量,并用最优化方法计算和设计微波电路和元件,高功率微波电真空器件的大信号计算等,每章均有大量实例和计算程序。本教材主要供电子物理与器件从事微波方面学习的研究生之用,但也可作为该专业本科生选修课采用,在后一情况,可舍去一些较难的章节不讲,例如 3.10, 3.11, 4.9, 5.6 和 6.10 等节。也可根据具体情况,不讲其中某一、二章,本课程理论和实践的结合较密切,必须分配一定的学时进行计算机操作,完成教材中列入的一定数量的习题,以加深学习者对课程内容的掌握。

本教材由东南大学曹世昌编写,第一章的编写曾得到吴忠贤同志的协助。研究生谢荣同学也为本书的出版做了不少工作,在这里表示诚挚的感谢。由于编者水平有限,书中难免还存在一些缺点和错误,殷切希望广大读者批评指正。

序 言

计算机技术业已广泛应用到各类科学和工程中。在微波技术和器件方面,近十几年来也出现很多这类文章。但是系统地写成书籍的还非常之少,在国内尤其是这样。本书的目的就是总结这些年来这方面的成就,将它们归纳起来,较全面地说明它们的理论和应用以及程序编制方法,以便于读者学习和迅速掌握。

本书共分七章。第一、第三和第四章是分别用差分法,有限元法和边界元法求解微波传输系统和谐振系统中的电磁场分布,求出它们的特征量——特性阻抗、截止频率、衰减常数或是谐振频率和品质因素等。并用数值算法找出传输系统中不连续的阻抗参量或散射参量。在第三章有限元法中还引入最新的三维场的理论分析方法。

第二章简单地介绍泛函知识和它在微波领域中的应用,也同时为第三章有限元法建立基础。

第五章主要是解决 N 口复合网络 S 参量的数值计算方法,程序编制技术,并用实例说明方法的使用。

第六章是讨论最优化方法在微波领域中的应用,除较详尽地说明常用的几种 N 维寻优方法的基础理论外,每种方法均附有较复杂的实例,列出计算框图和计算程序,这有助于读者对这些方法的加深理解和具体使用。

第七章是微波高功率真空器件——多腔速调管和耦合腔行波管在大信号状态下的计算机计算和设计方法。

编写本书时,力求由浅入深,讲解清楚并便于自学。大量程序的引入和对它们的详细说明也是为了使读者通过实例更容易地掌握所学内容。

应该说明的是,本书很多内容比较新,参考资料尚不完全,相当多的内容是编者的经验和体会,错误在尚难免,希望广大读者能批评指正。

编 者

1988年9月于东南大学电子工程系

目 录

序言		2.8 求波导特征值的变分表达式…方	56
第一章 用差分方法求解微波电磁场问题…	1	2.9 用里兹方法求解波导问题…	60
1.1 用差分方程解拉普拉斯方程…	1	一、用里兹法分析圆柱波导管…	61
一、基本方程式…	1	二、用里兹法分析任意截面形状的波导管…	63
二、在第一类边界条件下边界上的差分格式…	3	参考文献	70
三、差分方程的求解过程…	3	第三章 用有限元法求解微波电磁场问题…	71
四、用松弛法加速收敛…	5	3.1 有限元法的基本概念…	71
1.2 同轴线台阶电容的计算…	6	3.2 有限元法程序的编制…	79
1.3 介质分层处的差分格式…	10	3.3 网格的自动剖分…	82
1.4 微带线特性阻抗的计算…	11	3.4 用有限元法求解波导问题…	85
1.5 用差分法求解波导问题…	16	3.5 用有限元法计算重入式谐振腔…	91
一、波导中的电磁场方程…	16	3.6 场域中存在部分介质时的有限元法…	95
二、亥姆霍兹方程的差分表达式…	17	3.7 屏蔽微带盘形谐振腔的有限元法分析…	97
三、在第二类边界条件下边界上的差分格式…	20	3.8 以高次多项式为插值函数的有限元法…	98
四、脊形波导 TM 波的计算实例…	24	3.9 采用自然坐标的有限元法…	102
五、脊形波导 TE 波的计算…	26	一、自然坐标…	102
六、波导衰减常数的计算…	27	二、采用自然坐标时的分析方法…	106
1.6 用差分法求解重入式谐振腔…	29	三、计算波导中 TE 波特性的实例…	116
1.7 用差分法求波导中不连续的阻抗参量…	36	3.10 用有限元法分析部份介质填充的传输系统中的混合模式…	121
1.8 用差分方法计算开区场…	40	3.11 用三维有限元法求解微波电磁场问题…	125
参考文献	42	一、三维有限元法的一般理论…	125
第二章 变分方法和它在电磁场问题上的应用	43	二、用三维有限元法求高频电磁场分布…	130
2.1 概述…	43	三、用三维有限元法求微波双口网络的 S 参量…	138
2.2 非齐次亥姆霍兹方程的等价泛函…	44	参考文献	140
2.3 非齐次亥姆霍兹方程的等价泛函的修正…	47	第四章 边界元法在微波场中的应用	142
2.4 矢量亥姆霍兹方程的等价泛函…	48	4.1 电位问题的求解…	142
2.5 轴对称并仅有角向磁场分量的亥姆霍兹方程的等价泛函…	51	一、基本关系式…	142
2.6 多层介质波导中混合模方程的等价泛函…	52	二、边界上的方程…	142
2.7 求谐振腔特征值的变分表达式…	54	三、边界元…	144

四、系数 \hat{H}_{ij} 和 G_{ij} 的计算	145
五、计算程序的编制	148
4.2 线性元法	154
一、 $h_{i1j}, h_{i2j}, g_{i1j}, g_{i2j}$ ($j \geq i$ 和 $i-1$) 的计算	155
二、 $g_{i1j}, g_{i2j}, g_{i1j-1}, g_{i2j-1}$ 的计算	156
三、 $h_{i1j}, h_{i2j}, h_{i1j-1}, h_{i2j-1}$ 的计算	157
四、 H_{ii} 的计算	157
4.3 带状线参量的计算	157
4.4 高次元法	158
4.5 场域内存在多层介质时的分析方法	160
4.6 用边界元法分析亥姆霍兹方程	161
一、 $h_{i1j}, h_{i2j}, g_{i1j}, g_{i2j}$ ($j \geq i, i-1$) 的计算	163
二、 $g_{i1j}, g_{i2j}, g_{i1j-1}, g_{i2j-1}$ 的计算	164
三、 $h_{i1j-1}, h_{i2j-1}, h_{i1j}, h_{i2j}$ 的计算	165
4.7 波导中不连续性 S 参量的计算	165
一、方程形式	165
二、边界条件	166
三、对称电感膜片	167
四、波导中介质块 S 参量的计算	168
五、电容膜片的计算	170
4.8 用边界元法分析开放区域的电磁场	170
4.9 用边界元法求解电流源激励波导问题	172
4.10 用边界元法求解微波领域的特征值问题	174
参考文献	175
第五章 微波网络的计算机设计	176
5.1 N 级双口网络的级联—— S 矩阵法	176
5.2 用 S 矩阵合成法求同轴线阻抗变换器的驻波特性	176
5.3 N 级双口网络的级联—— A 矩阵法	181
5.4 用 A 矩阵法求三级微波晶体管放大器的增益特性	182

5.5 多端口网络的任意连接	188
一、匹配源法	188
二、用匹配源法求微带线四端口环形电路实例	193
三、直接方法	198
四、子网络扩张法	203
5.6 微波网络的灵敏度分析	205
一、有限差分法	207
二、伴随网络法	208
三、梯度的计算	211
5.7 一个实例——同轴线阻抗变换器输入反射系数灵敏度的计算	211
参考文献	218
第六章 微波元器件的最优化设计	219
6.1 最优化方法物理模型的建立	219
6.2 目标函数的极值	220
6.3 目标函数的最速上升方向和最速下降方向	223
6.4 二次函数	224
6.5 多元函数在最小点附近的性质	226
6.6 一维函数的最优化方法	226
一、黄金分割法	227
二、对分法	230
6.7 搜索区的确定	231
6.8 选取初始步长的方法	232
5.9 n 维函数寻优的直接方法	234
一、单纯形法	234
二、单纯形法计算实例——多级波导阻抗变换器的优化设计	238
三、步长加速法	246
四、步长加速法的计算实例——超宽带微波晶体管放大器的优化设计	249
6.10 n 维函数寻优的梯度方法	257
一、最速下降法	257
二、共轭梯度法	259
三、共轭梯度法的计算实例——两级同轴线阻抗变换器的优化设计	263
6.11 有约束最优化的罚函数法	271
6.12 罚函数法的应用实例——微波滤波器的优化设计	273
参考文献	276
第七章 微波电子管的计算机设计	277

7.1 微波管中空间电荷力的计算	277
7.2 多腔速调管的计算机设计	280
一、电子动力学	280
二、空间的群聚电流	281
三、中间腔的再调制	283
四、输出腔的高频输出	283
五、空间电荷力的计算	284
六、计算程序的编制	285
7.3 耦合腔行波管的大信号计算	288
一、电力动力学	289
二、群聚电流	291
三、感应电压的计算	292
四、耦合腔行波管大信号计算框图	294

参考文献	294
------	-----

附录一

$$\text{公式 } \frac{1}{\Delta} \int \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_m^2 dx dy$$

$$= \frac{i! u! v! z!}{(i + u + v + z)!} \text{的推导} \quad \dots\dots 295$$

附录二 三角形单元中一些关系式	296
-----------------	-----

附录三 广义特征值问题的计算程序	296
------------------	-----

附录四 具有分层介质波导截面上介质 边界处场的关系式	301
-------------------------------	-----

附录五 多级波导型阻抗变换器频带特性的 计算	302
---------------------------	-----

附录六 贝塞尔函数的计算程序	306
----------------	-----

习题集	311
-----	-----

第一章 用差分方法求解微波电磁场问题

本章主要内容是说明用差分法求解在微波器件和微波技术中常常遇见的一些偏微分方程的边值问题。

我们知道,很多给定边界条件的偏微分方程的求解相当复杂。除少数情况外,要求它的精确解是颇为困难的,一般采用近似方法。有限差分法就是经常采用的一种近似方法,它是用离散的、含有有限个未知数的差分方程去替代连续变量的微分方程,并把相应的差分方程的解作为该边值问题数值形式的近似解。

1.1 用差分方程解拉普拉斯方程

在微波系统中,很多问题,例如同轴线的台阶电容、谐振腔隙缝处的漏散电容、微带线的特性阻抗等,要求出它们的值,首先就要找出这些线或谐振腔内静电电位分布,这些电位分布是满足拉普拉斯方程的。用差分方法解拉普拉斯方程是很方便的,所以我们开始就讨论它。将拉普拉斯方程化成差分方程的方法在很多书上都可找到^[6,7],下面将列出公式而不作推导,仅对差分方程的求解过程作一些简单介绍。

一、基本差分公式

我们要求的电位函数 u , 它在区域 D 内满足下面的拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1-1)$$

在边界 S 上,它服从以下的条件:

$$u|_S = f(p) \quad (1-2)$$

式中 $f(p)$ 为边界点 p 的函数。这类问题一般称为第一类边值问题或称狄里赫利问题。

为了用差分方法求解电位分布,先在 $x-y$ 平面分别作两族平行于 x 轴和 y 轴的直线,线间的距离为 h , 于是各直线的 x 和 y 坐标分别为

$$x_i = ih; y_j = jh$$

式中 i, j 为正整数,取值 $1, 2, \dots$ 。这样区域 D 就被许多边长为 h 的正方形所覆盖,在图 1-1 中示出了这种情况。各正方形的顶点被称为网格的节点,从图可以看到,各节点所处位置有所不同。一些节点(例如 a 节点)恰落在边界 S 上,我们把它叫做边界节点。有些节点到边界的距离不足 h (例如节点 b), 这些节点叫做不规则节点。但是大部分节点到边界的距离大于 h , 例如图上的 o 点,它们属于规则节点。差分法就是求这些离散节点处 u 的近似值。以后将用符号 (i, j) 来表示节点 (x_i, y_j) , 而将节点 (i, j) 处的 u 值

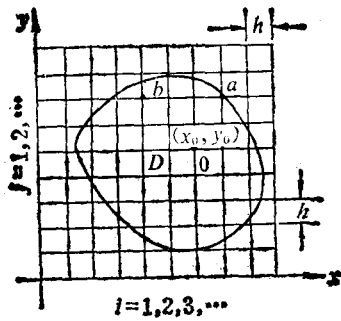


图 1-1 将场域划分成网格

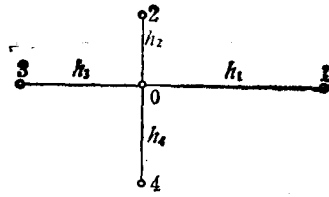


图 1-2 不等距网格

用 u_{ij} 代表。

当用差商来替代偏导数, 可以从(1-1)式导出它的差分表达式。在直角坐标系, 如果采用图 1-2 所示的不等距网格时, 求出的差分表达式如下

$$\frac{u_1}{h_1(h_1 + h_3)} + \frac{u_2}{h_2(h_2 + h_4)} + \frac{u_3}{h_3(h_3 + h_1)} + \frac{u_4}{h_4(h_4 + h_2)} - \left(\frac{1}{h_1 h_3} + \frac{1}{h_2 h_4}\right) u_0 = 0 \quad (1-3)$$

对于常用的等距网格情况, $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h$ 。根据式(1-3)就得到

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 4u_0 = 0 \quad (1-4)$$

在轴对称情况, 拉普拉斯方程就成为下面的形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (1-5)$$

它的差分表达式对不等距网格为

$$\frac{2}{h_1(h_1 + h_3)} u_1 + \frac{2}{h_3(h_1 + h_3)} u_3 + \frac{2r_0 + h_4}{r_0 h_2(h_2 + h_4)} u_2 + \frac{2r_0 - h_2}{r_0 h_4(h_2 + h_4)} u_4 = \left(\frac{2}{h_1 h_3} + \frac{2r_0 + h_4 - h_2}{h_2 h_4 r_0}\right) u_0 \quad (1-6)$$

式中各量见图 1-3。

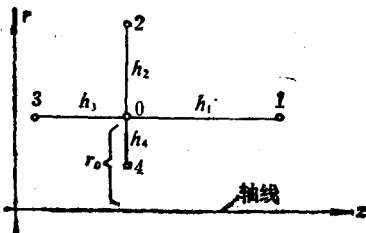


图 1-3 轴对称情况的不等距网格

假使 0 点落在 $j = 1$ 的轴上, 可以求出差分格式为

$$u_1 + u_3 + 4u_2 - 6u_0 = 0 \quad (1-8)$$

二、在第一类边界条件下边界上的差分格式

当用差分法求解电磁场问题时,网格的划分不能保证边界上的点都是节点。因此,很多相邻于边界点的节点就成为不规则点。由于边界条件的不同,这里的差分格式也将不同。在这一节中我们仅讨论第一类边界条件时的情况。这种边界条件就是边界上的电位是给定的,这时,当邻近边界的点是不规则点时,总可以用(1-3)式的五点差分公式计算。在很多微波问题中,边界电位为零,在图 1-4 列出了两种常常可能遇到的边界电位为零的情况。当利用式(1-3)求不规则点 g 的电位 u_g 时,可以得到:

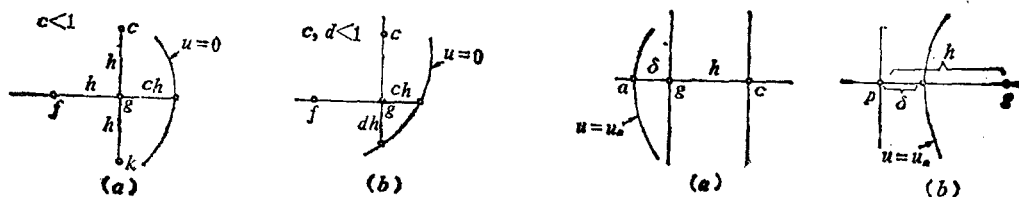


图 1-4 边界电位为零时,不规则点电位的计算

图 1-5 边界电位不为零时不规则点电位的计算

对图 1-4a 情况

$$u_g = \left(u_c + u_f + \frac{2u_k}{1+c} \right) / \left(2 + \frac{2}{c} \right) \quad (1-9)$$

对图 1-4b 情况

$$u_g = \left(\frac{u_c}{d+1} + \frac{u_f}{c+1} \right) / \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \quad (1-10)$$

如果边界电位不为零,例如等于 u_a , 为了计算的简化,常采用下面较方便的方法。譬如对图 1-5a 所示的情况,不规则点 g 到边界的距离 δ 小于 h ,如边界点 a 的电位为 u_a 时,可以通过下面的线性插值公式

$$\frac{u_c - u_g}{u_g - u_a} = \frac{h}{\delta}$$

定出 g 点的电位 u_g 为

$$u_g = \frac{hu_a + \delta u_c}{h + \delta} \quad (1-11)$$

对于如图 1-5b 的情况,可按线性插值公式

$$(u_g - u_p)/h = (u_a - u_p)/\delta$$

找出在边界外一个想像点 p 的电位 u_p 如下

$$u_p = \frac{hu_a - \delta u_g}{h - \delta} \quad (1-12)$$

这时对不规则点 g 又可按照适用于规则点的公式来列差分方程。

三、差分方程的求解过程

下面用一个计算金属槽内电位分布的例子来说明差分方程的求解过程。设金属槽上

盖板电位等于 100V,侧壁与底壁的电位为 0V。将场域用正方形网格划分,要求的是场域内部九个节点的电位值。对网格节点1,根据式(1-4)的等距差分公式可以得到

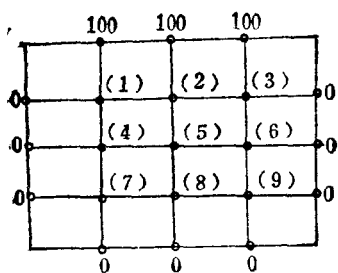


图 1-6 金属槽结构

$$-4u_1 + u_2 + u_4 + 100 = 0$$

也可以扩展成以下的形式

$$\begin{aligned} -4u_1 + u_2 + 0 \times u_3 + u_4 + 0 \times u_5 \\ + 0 \times u_6 + 0 \times u_7 + 0 \times u_8 \\ + 0 \times u_9 = -100 \end{aligned}$$

对其它标号为 2~9 的各个节点也可写出类似的扩展方程,将它们组合起来,就得到下面的以矩阵形式表示的线性代数方程组

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ -100 \\ -100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

这是一个包括九个变量 $u_1 \sim u_9$ 的方程组,可采用线性代数中塞德尔迭代法求解。但是采用这种方法,必须先给各个变量赋以初值,这样就可以从第一至第九个方程依次地求出 $u_1 \sim u_9$ 的改善值。不断重复这种计算,直至相邻两次算出的各个 u 值收敛到我们需要的精度为止。

在实际的计算过程中,当然用不着先列出上面所述的方程组,它仅在网格节点很少时才有可能。注意到前面列出的各个差分公式中,网格中某节点的电位只和它四邻节点电位有关这一特点,例如图 1-6 中节点 5 的电位仅和它四周相邻点 2、4、6、8 的电位有关。就可以从左至右,从上至下一行一行地扫描逐一地求出各网格节点的电位。

为判别计算的收敛程度,一般采用以下两种方法:

(一) 对所有网格点,找出相继的两次迭代的最大相对误差

$$erc^{(k)} = \max \left| 1 - \frac{u_{ij}^{(k-1)}}{u_{ij}^{(k)}} \right| \quad (1-13)$$

式中 k 表示第 k 次迭代。

(二) 找出相继两次迭代形成的各网格节点的平均相对误差 erc

$$erc^{(k)} = \frac{\sum_{i,j} |u_{ij}^{(k)} - u_{ij}^{(k-1)}|}{\sum_{i,j} u_{ij}^{(k)}} \quad (1-14)$$

对同一问题,由第二种方法求出的收敛误差比第一种方法小 1~2 个数量级,所以如

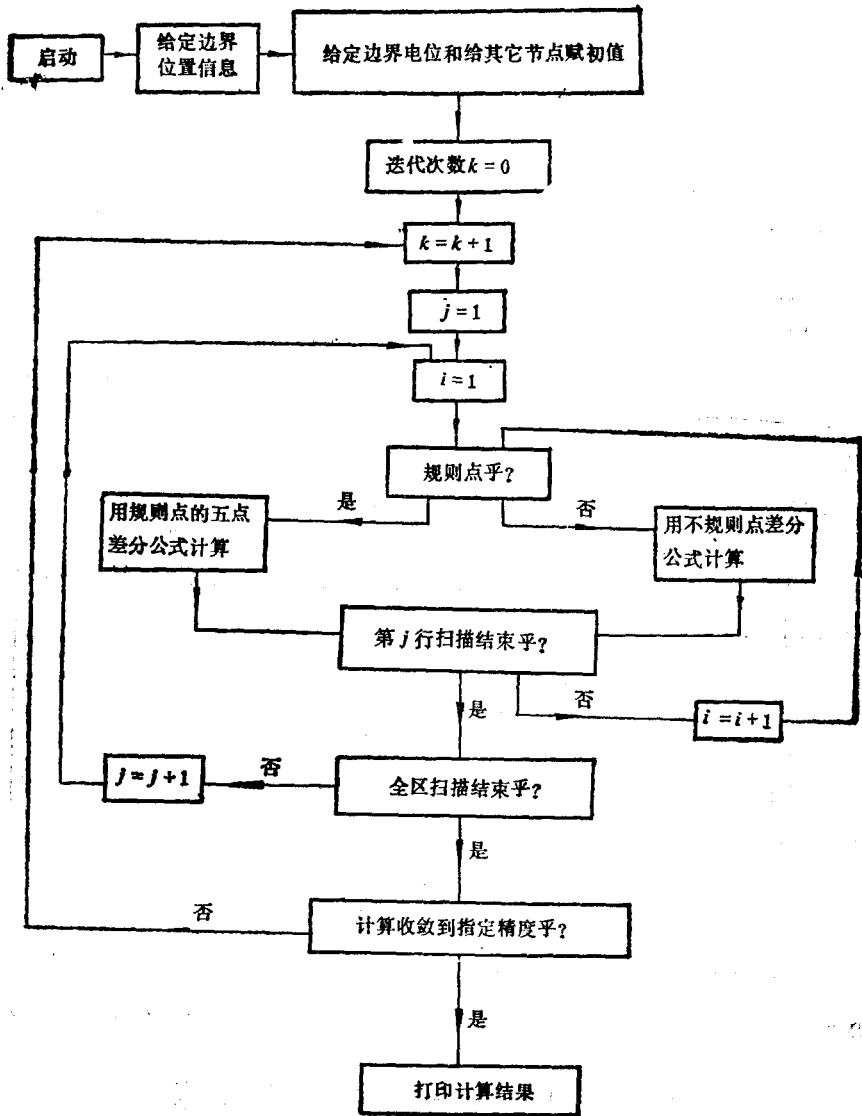


图 1-7 差分法计算框图

果用第一种方法时收敛精度误差控制在 10^{-4} ，则用第二种方法时就应控制在 $10^{-5} \sim 10^{-6}$ 。根据以上所说，可以写出用差分方法计算静电电位问题的框图如图 1-7。

四、用松弛法加速收敛

上面讲的计算方法当网格点很多时，需要的计算时间很长，所以应该找一个方法使计算收敛加快以减少迭代次数。下面讲的超松弛法就可以做到这一点。

考虑网格节点 (i, j) ，我们用 $u_{ij}^{(k)}$ 来表示第 k 次迭代求出的该点的电位，而以 $u_{ij}^{(k+1)}$ 表示第 $k+1$ 次迭代求出的电位。当 k 增加时，所求的电位将如图 1-8 所示的那样逼近

于真实值 u_{ij} 。在第 $k+1$ 次迭代时算出了 $u_{ij}^{(k+1)}$ 后, 让 $u_{ij}^{(k)}$ 仍保留在内存中。比较 $u_{ij}^{(k)}$ 和 $u_{ij}^{(k+1)}$, 设 $u_{ij}^{(k+1)} > u_{ij}^{(k)}$, 则根据图 1-8a (假设 $u_{ij}^{(k)} > u_{ij}^{(k+1)}$ 也一样, 这时将利用图 1-8b) 可以合理假定现在尚不知道的 $u_{ij}^{(k+2)}$ 大于 $u_{ij}^{(k+1)}$ 。为促进收敛过程的加快, 不用 $u_{ij}^{(k+1)}$ 而取更大的值 $(u_{ij}^{(k+1)})'$

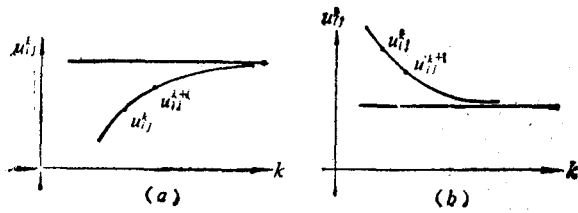


图 1-8 用差分法求电位时的收敛情况

不用 $u_{ij}^{(k+1)}$ 而取更大的值 $(u_{ij}^{(k+1)})'$

$$\begin{aligned} (u_{ij}^{(k+1)})' &= u_{ij}^{(k)} + \omega(u_{ij}^{(k+1)} \\ &\quad - u_{ij}^{(k)}) = (1 - \omega)u_{ij}^{(k)} \\ &\quad + \omega u_{ij}^{(k+1)} \end{aligned} \quad (1-15)$$

来作为第 $k+1$ 次求出的 (i, j) 点的电位值, 式中 $\omega > 1$, 它被叫做松弛系数。这种加快收敛的方法称为超松弛法。当 $\omega = 1$, $(u_{ij}^{(k+1)})' =$

$u_{ij}^{(k+1)}$ 而没有改善。当 ω 选得太大, 则求出的电位值就偏离真实电位值更远而不是更近, 收敛速度反而更慢。所以有一个最佳 ω 值使收敛最快, 一般在 $1 \sim 2$ 之间。

可以证明, 最佳 ω 值依赖于电极结构, 而和对网格节点赋的初值无关。对第一类边值问题, 如场域为正方形, 并且又采用正方形网格划分, 如每边节点数为 $M+1$, 则最佳松弛系数 ω 可用下式计算

$$\omega = \frac{2}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)} \quad (1-16)$$

对于矩形场域, 当划分成正方形网格时, 如每边节点数都很大(一般要大于 15), ω 的最佳值由下式决定

$$\omega = 2 - \sqrt{2} \pi \sqrt{\frac{1}{M^2} + \frac{1}{N^2}} \quad (1-17)$$

式中 M, N 分别为每边网格节点数减 1。在更一般情况下, ω 的最佳值只能凭经验选取, 也可用等效矩形面积的处理方法, 得出等效矩形面积后, 再用式(1-17)求最佳 ω 。

1.2 同轴线台阶电容的计算

当外导体或内导体直径不同的两个同轴线相连时(见图 1-9), 在连接处将存在不连续电容, 一般称之为台阶电容。用严格的理论求解它是相当麻烦的, 但是如用差分法求解就比较容易。下面就对这种方法加以详细说明。

假定在同轴线内外导体间加上 u_0 电压, 在线的内部取一个半径为 r_1 的圆柱面(图 1-9 中用虚线表示出), 则穿过这个圆柱面的电通量 φ 为

$$\varphi = \int_0^l 2\pi r_1 \epsilon_0 E dz$$

式中 E 是半径 r_1 上圆柱面上的径向电场强度, l 为线的长度, ϵ_0 为真空中的介电常数。显然这个 φ 值应等于 l 长度同轴线上内导体(或外导体)上的总电荷量 Q 。于是这段线内, 外导体间的总电容 C_r 应等于

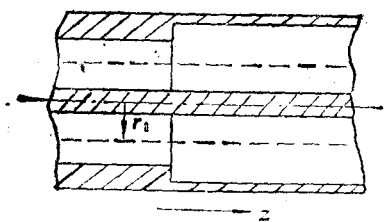


图 1-9 两段不同尺寸的同轴线相连

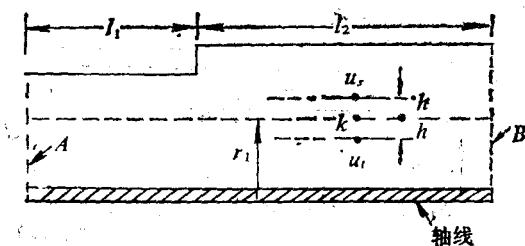


图 1-10 由节点电位求 \$E_r\$

$$C_T = \frac{Q}{u_o} = \frac{1}{u_o} \int_0^l 2\pi r_1 \epsilon_0 E_r dz \quad (1-18)$$

如果这段线是由两段不同长度的同轴线组成,其中,一段长 \$l_1\$, 内外导体半径分别为 \$a_1, b_1\$; 另一段长 \$l_2\$, 它的内外导体半径分别为 \$a_2, b_2\$, 并且 \$l = l_1 + l_2\$。当这两段线单独存在时,它们线间的电容 \$C_1, C_2\$ 可分别用下面的公式计算

$$C_1 = 2\pi\epsilon_0 l_1 / \ln(b_1/a_1) \quad (1-19)$$

$$C_2 = 2\pi\epsilon_0 l_2 / \ln(b_2/a_2) \quad (1-20)$$

因此, \$C_T - (C_1 + C_2)\$ 应该是两线相连时引入的台阶电容 \$C_{st}\$, 即是

$$C_{st} = C_T - (C_1 + C_2) \quad (1-21)$$

用差分方法求解同轴线台阶电容的过程如下:

先用差分法求出一段同轴线内的静电电位分布,注意到同轴线的轴对称性,只要研究它的一个子午面就行了,如图 1-10 所示。在求出各节点的电位后,为求指定的 \$r_1\$ 半径处的径向电场强度 \$E_r\$, 可利用公式 \$|E_r| = \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|\$。例如求图中 \$k\$ 点的 \$E_r\$, 它应等于

$$|E_r| = \left| \frac{u_i - u_o}{2h} \right| \quad (1-22)$$

式中 \$u_i, u_o\$ 的定义见图 1-10

用这个公式求出半径 \$r_1\$ 处各节点的 \$E_r\$ 后,代入式(1-18)就得到

$$C_T = \frac{1}{u_o} \int_0^l 2\pi r_1 \epsilon_0 \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| dz = \frac{h}{u_o} 2\pi r_1 \epsilon_0 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_i \quad (1-23)$$

式中 \$n\$ 为半径 \$r_1\$ 处节点的总数, \$\Sigma'\$ 表示这个求和项中第一以及最后两个数应乘以 0.5。

应该指出的是,两个线段 \$l_1, l_2\$ 要选得足够大,以使台阶处引起的场不均匀性不致延伸到线的两端。当然也不能选得过大,这不仅是计算机计算时占用的内存大,计算时间长,还因为台阶电容本身不大, \$l_1, l_2\$ 过大, \$C_T\$ 和 \$C_1 + C_2\$ 都很大,它们的相差就很小,引起的计算误差将增大。一般说来, \$l_1, l_2\$ 的值选得比同轴线的外导体半径大一些就可以了。

下面引入一个计算同轴线台阶电容的实例。它的结构尺寸示如图 1-11。各尺寸为: \$R_1 = 5\text{mm}, R_2 = 17.5\text{mm}, R_3 = 25\text{mm}, l_1 = 35\text{mm}, l_2 = 30\text{mm}\$。采用正方形网格, \$h = 0.5\text{mm}\$。网格的划分情况也在图中示出。

由于 \$l_1, l_2\$ 选得足够大,在线的两端 \$C\$ 和 \$B\$ 处电位随半径的变化可分别用下面的公

式计算:

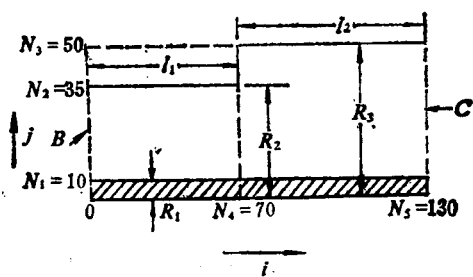


图 1-11 计算同轴线台阶电容实例

在 C 端

$$u_C(r) = u_a \ln \left(\frac{r}{r_1} \right) / \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad (1-24)$$

在 B 端

$$u_B(r) = u_a \ln \left(\frac{r}{r_1} \right) / \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad (1-25)$$

式中, u_a ——加在同轴线上内外导体间的电压。

计算图 1-11 所示的同轴线台阶电容的程序如下:

```

010   DIMENSION U(0:130,10:50)
015   REAL L1, L2
020   INTEGER G
025   DATA R1,R2,R3,L1,L2,E0,PI,UA,H/
030   &5.0,17.5,25.0,35.0,30.0,8.854E-12,3.1416,
035   &100.0,0.5/
037   DATA N1,N2,N3,N4,N5/10,35,50,70,130/
040   DO 5 I = 0,N5
045   DO 5 J = N1,N2 - 1
050   5 U(I,J) = 0,
055   DO 15 I = 0,N5
060   DO 15 J = N2,N3
065   15 U(I,J) = UA
070   A = UA/ALOG (R3/R1)
075   DO 10 J = N1 + 1, N3 - 1
080   10 U(N5,J) = A * ALOG(J * H/R1)
085   B = UA/ALOG (R2/R1)
090   DO 25 J = N1 + 1, N2 - 1
095   25 U(0,J) = B * ALOG(J * H/R1)
100   N = 0
105   35 G = 0
110   N = N + 1
115   DO 40 J = N2 - 1,N1 + 1,-1
120   DO 40 I = 1, N5 - 1
125   A1 = U(I,J)
130   B1 = 0.25 * (U(I + 1,J) + U(I,J + 1) + U(I - 1,J) +
135   &U(I,J - 1) + (U(I,J + 1) - U(I,J - 1))/(2.0 * J))

```



```

140      C1 = A1 + 1.78 * (B1 - A1)
145      IF(B1. EQ. 0.)GOTO 40
150      W1 = ABS((B1 - A1)/B1)
155      IF(W1.GT.1.0E - 6) THEN
160          G = G + 1
165          U(I,J) = C1
170          END IF
175 40    CONTINUE
180      DO 50 J = N2,N3 - 1
185      DO 50 I = N4 + 1, N5 - 1
190          A2 = U(I,J)
195          B2 = 0.25 * (U(I + 1,J) + U(I,J - 1) + U(I,J + 1) +
200          &U(I - 1,J) + (U(I,J + 1) - U(I,J - 1))/(2.0 * J))
205          C2 = A2 + 1.78 * (B2 - A2)
210          IF(B2.EQ.0.) GOTO 50
215          W2 = ABS((B2 - A2)/B2)
220          IF (W2.GT.1.E - 6) THEN
225              G = G + 1
230              U(I,J) = C2
235              END IF
240 50    CONTINUE
245      IF(N.GE.400) GOTO 55
250      IF(G.GT.0) GOTO 35
255 55    T1 = 0.
260      T2 = 0.
265      DO 60 I = 1,N5 - 1
270          F1 = U(I,28) - U(I,27)
275 60    T1 = F1 + T1
280      T1 = T1/H
285      F2 = U(0,28) - U(0,27)
290      F3 = U(N5,28) - U(N5,27)
295      T2 = (F2 + F3)/2.0
300      T2 = T2/H
305      T = T1 + T2
310      SS = E0 * 2.0 * PI * 1.E - 3
315      C1 = SS * L1 / ALOG(R2/R1)
320      C2 = SS * L2 / ALOG(R3/R1)
325      R = (28 + 27) * H / 2.
330      Q = SS * R * H * T

```