高等学校教学用书

机械振动理论及应用

冶金工业出版社

高等学校教学用书

机械振动理论及应用

北京科技大学　　林鹤　编

冶金工业出版社

高 等 学 校 教 学 用 书

机械振动理论及应用

北京科技大学　　林鹤　编

*

冶 金 工 业 出 版 社 出 版

（北京北河沿大街嵩祝院北巷39号）

新华书店总店科技发行所发行

冶金工业出版社印刷厂印刷

*

787×1092　1/16　印张15 1/2　字数367千字

1990年10月第一版　1990年10月第一次印刷

印数00,001～3,000册

ISBN 7-5024-0777-4

TF·173（课）定价3.10元

前　　言

现代机器向高速度、高精度和自动化、大型化方向发展，在生产实践过程中不断地向人们提出许多复杂的问题，要想分析和解决这些问题需要具有振动理论的完备知识。因此，振动理论在工科大学里已经成为一门普遍修读（必修或选修）的课程。本书主要是为冶金机械专业的学生提供教材而写的，但对从事机械动力学和机械振动问题的研究工作或实际工作的工程技术人员来讲，可能也是有益的。

在编写本书的过程中，作者力图贯彻理论联系实际的原则，结合一些例子说明怎样用理论来解决实际的技术问题。有些例子是从实际使用中的机器或从在线测试研究中取来的。

本书前三章论述的是单自由度线性系统在无阻尼和有阻尼情况下的自由振动和强迫振动，从而建立振动的一系列基本概念，阐明振动的重要特性。考虑到运动微分方程并不是永远可能获得严格的解和便于使用数字电子计算机，还介绍了数值解法和图解法等近似方法。

第四章论述两自由度系统的自由振动和强迫振动。实际应用有振动运输机、开坯大剪定尺机和减振器等例子。阻尼的效应是通过减振器来加以讨论的。

第五章论述多自由度系统振动的基本理论和分析方法，它是两自由度系统振动理论的推广和总结。本章开始采用矩阵运算，着重讲了振型叠加法，并以轧钢机为实例进行了计算。最后介绍了求系统频率和振型的传递矩阵法。

第六章和第七章分别论述机械传动系统动态响应的一般理论和实际应用，这是现代机械设计和自动控制必须研究的重要课题之一。

第八章介绍拉格朗日方程及其应用，目的是帮助读者更好地掌握建立系统数学模型的方法。

对书中的缺点和错误欢迎读者批评指正。

编　者

1990年3月

目　　录

第一章　自　由　振　动

本章讨论最简单的机械弹性系统的一种固有属性——自由振动。首先（第一节）用解析法导出自由振动的微分方程式，求得自振周期和固有频率，并论证了取决于初始条件的振幅和相角。第二节讨论弹性元件的质量对自振频率的影响，运用的方法是简单实用的能量法。第三节讨论阻力对自由振动的影响，引入以临界阻尼为界限的无因次阻尼比，并按阻尼比分别讨论了三种情况。第四节为应用举例，把前三节讨论的理论（一般解法和两个影响）应用到实际中去。

第一节　通 常 解 法

我们经常看到，起重机在提升或下降重物的过程中突然停车时，吊挂在钢绳上的重物便在空中作上下振动。正在运行中的火车，当车轮受到轨头处的冲击时，支承在弹簧上的车厢也呈现振动现象，坐在车厢里的人有切身的感受。这里所说的重物、车厢的振动，都是与弹性元件（钢绳和弹簧）紧密相联的，我们用一个弹簧-质量体系（图1-1）来代表这种弹性系统。而且已经知道，对这个系统加一冲击，或是突然增加一外力，或是突然卸去一外力，它都会产生振动。

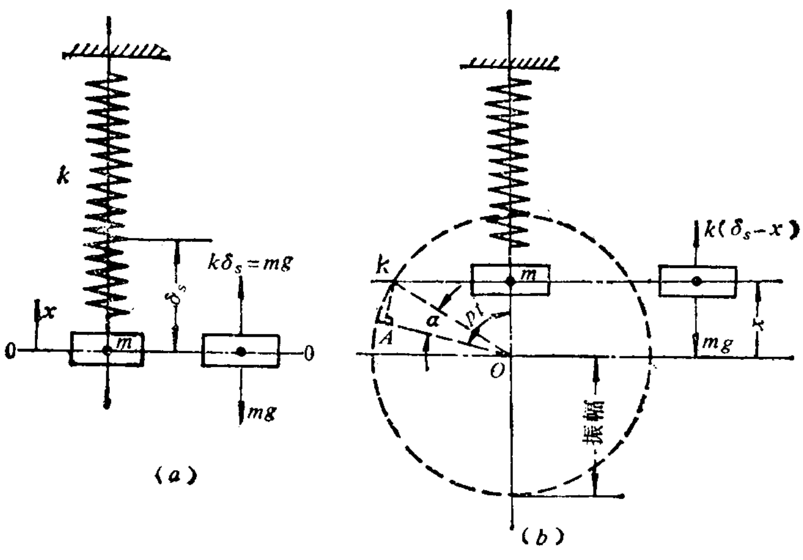


图 1-1

既然是振动，很自然地使人要问：它多少时间振动一次？每秒钟振动多少次？振动的幅度如何？有哪些带规律性的东西？现在我们运用力学和数学的方法来进行分析。

物体m在重力作用下（图1-1），使弹簧产生一定的静变形δ_s，这个变形量在弹簧的弹性极限以内时总是与受力成正比的。物体正是在这两个力（重力和弹簧力）作用下保持静平衡状态于零线或零点的，这时物体重量等于弹簧张力，即

$$mg=k\delta_s \tag{a}$$

式中　m——物体的质量；

g——重力加速度；

k——弹簧的弹性常数（又叫刚性系数）单位是千牛/毫米（kN/mm）。

一旦物体由于某种原因离开平衡位置 0（图1-1）而位移到距 0 有x远的地方，这时弹簧中的拉力便是$k(\delta_s-x)$。于是，按牛顿第二定律，可以直接写出物体m的运动微分方程式：

$$m\ddot{x}=k(\delta_s-x)-mg \tag{b}$$

将(a)式代入(b)式得：

$$m\ddot{x}=-kx \tag{c}$$

式中$\ddot{x}$代表位移x对时间t的二次导数，也就是物体m的加速度；负号表示力（或加速度）的方向与位移x的方向相反，即当物体位于平衡位置之上（x为正)时，有效作用力的方向向下；当物体位于平衡位置之下（x为负）时，有效作用力的方向则向上。物体m总是具有趋向平衡位置的加速度。

引用下列代号：

$$p^2=\frac{k}{m} \tag{d}$$

则微分方程（c）可以写成简便的形式：

$$\ddot{x}+p^2x=0 \tag{1-1}$$

这是表示质点作自由振动的二阶线性齐次常微分方程式。这里我们对它求解，也就是要找出能满足这个微分方程式的原函数$x=f(t)$。仔细观察式(1-1）后就会发现，所求的解应是对t微分两次仍得原函数，并为它的（$-p^2$）倍，而$\sin pt$和$\cos pt$恰恰具有这种特征，因此都是它的解。又因式（1-1）为二阶微分方程，求它的解要进行二次积分，即解中包含两个积分常数。这样，我们就可以写出式（1-1）的通解为：

$$x=A_1\cos pt+A_2\sin pt \tag{1-2}$$

式中 A_1、A_2为任意常数，由运动的初始条件确定。

物体的位移$x=f(t)$既已求得，那末它的速度$\dot{x}$和加速度$\ddot{x}$就可接着写出：

$$\dot{x}=-A_1p\sin pt+A_2p\cos pt \tag{e}$$

$$\ddot{x}=-A_1p^2\cos pt-A_2p^2\sin pt \tag{f}$$

这就表明，物体的运动是一振动，因为$\cos pt$和$\sin pt$都是周期函数：

$$\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix}\left[p\left(t+\frac{2\pi}{p}\right)\right]=\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix}[pt] \tag{g}$$

每隔一段时间$\left(\frac{2\pi}{p}\right)$，运动就完全重复以前的样子。这段时间间隔称为振动的**周期**τ，其值为：

$$\tau=\frac{2\pi}{p}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{\delta_s}{g}} \tag{1-3}$$

由此可见，振动的周期只决定于物体质量m和弹性常数k的数值。质量大而弹簧软的系统振动周期长；反之质量小而弹簧硬的系统振动周期短。只要弹簧的静变形δ_s能按理论公式算出或用实验方法定出，振动周期τ就可用式(1-3）计算出来。

周期的倒数乃是单位时间内的振动次数，例如每秒钟的振动次数，称为振动的频率。由于这是一般弹性系统的自然属性，故又称为固有频率，以 f 表示之：

$$f=\frac{1}{\tau}=\frac{p}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_s}} \tag{1-4}$$

可见振动的固有频率f与p成正比，振动周期τ则与p成反比，而p又与角速度有着相同的量纲。只要知道p，就很容易求得固有频率f，有些书上又称p为角频率(或圆频率)，但两者有着不同的数量和物理意义，希望读者注意区别。

方程式（1-2）所代表的运动称为谐振动，要确定常数A_1和A_2，必须考虑运动的初始条件。因为物体原先静止在平衡位置上（图1-1）并没有运动，只有将物体推离平衡位置到坐标x_0处然后释放；或是给物体以冲击产生初速度$\dot{x}_0$，它才会振动起来。这里所说的初位移x_0和初速度$\dot{x}_0$便是自由振动的条件，是振动的外因；弹簧和质量则是自由振动的内因，是振动的根据。外因通过内因而起作用，致使这个弹性系统出现自由振动。

如果我们把物体m（图1-1）推离平衡位置到某初位置x_0并给以一初速$\dot{x}_0$，则把这两个初始条件（即$t=0$，$x=x_0$；$t=0$，$\dot{x}=\dot{x}_0$）分别代入式(1-2)和式(e)便求得：

$$A_1=x_0$$

$$A_2=\frac{\dot{x}_0}{p}$$

把这两个求得的常数代入式（1-2），得物体m的振动方程式如下：

$$x=x_0\cos pt+\frac{\dot{x}_0}{p}\sin pt \tag{1-5}$$

此式表明，整个振动包括两部分，一部分是与$\cos pt$成正比的振动，其值决定于初位移；另一部分与$\sin pt$成正比，其值决定于初速度。这两部分都可以用图线表示出来（图1-2中的a及b)。振动物体m在任一瞬时t的总位移x就是把该瞬时的上二条曲线的纵坐标相加，所得曲线如图1-2中的c所示。

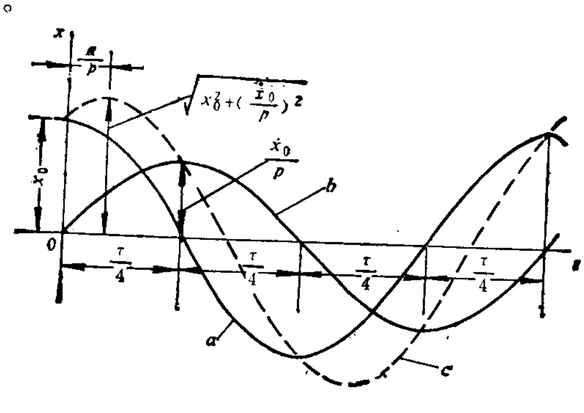


图 1-2

如果我们将物体推离平衡位置到x_0处而不给以任何速度，这时初始条件便是$t=0$，$x=x_0$；$\dot{x}=0$，那末整个振动就只保留了第一部分而没有第二部分，而整个振动就是由图1-2中所示的a曲线代表了。如果我们在平衡位置处给物体一速度，这时初始条件便是$t=0$，$x=0$；$\dot{x}=\dot{x}_0$，那末整个振动只保留了第二部分而没有第一部分，整个振动完全由图1-2中所示的b曲线表明了。所以上述两部分实际上分别代表着两种特殊情况，这两种特殊情况

又取决于运动的初始条件。

表示振动的另一方法是用旋转向量（图1-3）。试设想一个模为x_0的向量$\overline{OA}$以等角速度p绕点O旋转，如果在初瞬（$t=0$）时向量与x轴重合，则在任一瞬时t该向量与x轴的夹角就等于pt。向量在x轴上的投影等于$x_0\cos pt$，就代表了式（1-5）等号右边的第一项。再取一个模为$\frac{\dot{x}_0}{p}$的向量$\overline{OB}$垂直于向量$\overline{OA}$，它在x轴上的投影便是式（1-5）等号右边的第二项。这样，振动物体的总位移x便等于这两个以角速度p旋转且互相垂直的向量$\overline{OA}$与$\overline{OB}$在x轴上的投影之和。

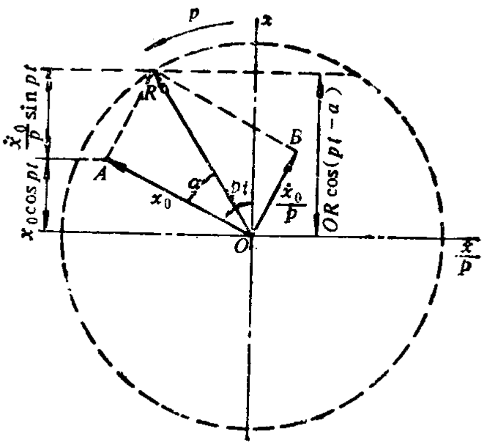


图 1-3

不用$\overline{OA}$和$\overline{OB}$两个向量，而用它们的几何和$\overline{OR}$也是一样，向量$\overline{OR}$在x轴上的投影便是物体的总位移。由图1-3可以直接写出向量$\overline{OR}$的模如下：

$$\overline{OR}=\sqrt{(x_0)^2+\left(\frac{\dot{x}_0}{p}\right)^2} \tag{h}$$

$\overline{OR}$与x轴的夹角为（$pt-\alpha$），而角α是

$$\alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{\dot{x}_0}{px_0}\right) \tag{i}$$

显然，（1-5）式也可以写成如下的形式：

$$x=\overline{OR}\cos(pt-\alpha)=\sqrt{(x_0)^2+\left(\frac{\dot{x}_0}{p}\right)^2}\cos(pt-\alpha) \tag{1-6}$$

式中$\overline{OR}$和α是两个新的常数，取决于初始条件式(h)和式(i)两式。

由此可知，两个具有一定频率的简谐振动之和仍然是一个具有相同频率的简谐振动，如图1-2所示。其最后结果曲线的最大纵坐标等于图1-3中向量$\overline{OR}$的模。它代表振动物体距离其平衡位置的最大位移，称为振幅。

如果把图1-3所示的旋转向量直接画在图1-1上，并使它们的原点O和坐标轴x都重合起来（见图1-1），那就会更加形象和直观地显示角频率p的物理意义。我们在图1-1中以O点为圆心，$\overline{OR}$为半径作一圆，则$\overline{OR}$以等角速度p作圆运动时，其R点在铅垂直径上的投

影正好代表物体的振动。因此我们称这个假想的圆为参考圆；而p就是振动的假想角速度（角频率或圆频率）。

由于两个旋转向量$\overline{OA}$和$\overline{OR}$之间（见图1-3和图1-1）有一夹角α，使得图1-2中c曲线的最大纵坐标所在点相差时间（α/p）秒。也可以说，图1-2中c曲线所代表的振动落后于图1-2中a曲线所代表的振动，α角称为这两种振动的位相差或相角。

很明显，运动的初始条件只决定振幅与相位，并不影响振动的频率和周期。频率和周期完全取决于弹性系统的物理参数（质量和弹性常数）。

第二节　弹性元件的质量对自振频率的影响

上节所讲的自由振动，把弹性元件本身的质量忽略未计。这样的简化在许多工程实际问题中是允许的。例如在计算起重机的动荷系数时，由于钢绳质量比吊重往往小得很多而忽略不计钢绳质量是完全可以的。但对于某些机械或仪器来说，其弹性元件比惯性元件质量相差并不太大，在这种情况下如果也忽略不计弹性元件的质量，对问题的精确求解可能会带来一定的误差。为了求出这部分原来略去的东西对振动频率的影响，这里介绍简单实用的能量法。

要弄清楚振动过程中系统的能量关系，我们不妨来研究一下已经写出的微分方程式(1-1)。如果对方程式（1-1)两边乘以$\dot{x}$，则得

$$\ddot{x}\,\dot{x}+\left(\frac{k}{m}\right)x\,\dot{x}=0$$

上式宜于直接积分；也易于由下式的微分得出：

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{k}{m}\right)x^2=C \tag{1-7}$$

式中积分常数C的物理意义是单位质量所拥有该系统的总能量。因为由式（1-7)，有

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2=Cm$$

上式的第一项代表质量m的瞬时动能；第二项代表弹簧相对于静平衡位置的瞬时位能。

因此可以认为，一个没有能量损耗的自由振动，其动能和位能是在总能量Cm的水平上呈周期性转换。例如当振动位移x到达最大值x_{max}时，其$\dot{x}=0$，而系统的总能量全为位能：

$$\frac{1}{2}kx^2_{max}=Cm$$

类似地，当振动经过平衡位置时$x=0$，速度$\dot{x}$到达最大值$\dot{x}_{max}$，而系统的总能量全为动能：

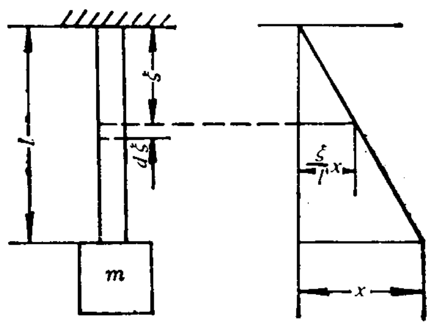
$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2_{max}=Cm$$

这样就可以把图1-1所示的振动系统在自由振动过程中的能量方程写成：

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kx^2_{max}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2_{max}=Cm=\text{常数}$$

正是由于机械能守恒，系统才能维持持久的等幅振动。

计算弹簧质量对振动频率的影响，本来是一个分布质量系统的振动问题。瑞雷(Rayliegh)运用能量原理将一个分布质量系统简化为单自由度系统，并把弹簧分布质量对系统振动频率的影响考虑进去，得到了相当准确的固有频率值。假设振动时弹簧的变形与它的静变形相似（图1-4b），即弹簧各截面的位移与它离固定端的距离成正比，如弹簧下端的位移为x，弹簧全长为l，则距固定端ξ处的位移为$\frac{\xi x}{l}$，当质量块m在某一瞬时的速度为$\dot{x}$时，弹簧在ξ处的微段$d\xi$的相应速度为$\frac{\xi \dot{x}}{l}$。设ρ为弹簧单位长度的质



(a) (b)

图 1-4

量，则弹簧微段$d\xi$的动能为：

$$\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\xi \dot{x}}{l}\right)^2 d\xi$$

整根弹簧的动能为：

$$T_s=\frac{1}{2}\rho\int_0^l\left(\frac{\xi \dot{x}}{l}\right)^2 d\xi=\frac{1}{2}\ \frac{\rho l}{3}\dot{x}^2=\frac{1}{2}\ \frac{m'}{3}\dot{x}^2$$

式中$m'=\rho l=$整根弹簧的质量。

于是，整个系统的总动能为质量块m的动能和弹簧质量的动能之和。在质量块经过静平衡位置时，系统的最大动能为：

$$T_{\max}=\frac{1}{2}m\dot{x}_{\max}^2+\frac{1}{2}\ \frac{m'}{3}\dot{x}_{\max}^2=\frac{1}{2}\left(m+\frac{m'}{3}\right)\dot{x}_{\max}^2 \tag{a}$$

系统的势能也包括有两部分，即弹簧的变形势能和质量块位置不同所具有的势能。由于位移x，弹簧所贮存的势能为：

$$\frac{k(\delta_s-x)^2}{2}-\frac{k(\delta_s)^2}{2}=-k(\delta_s)x+\frac{kx^2}{2}$$

而质量块的势能增加了mgx，且$mgx=k(\delta_s)x$，所以系统总的势能改变是：

$$V=\frac{kx^2}{2}$$

显然，最大势能出现在振动的极端位置，其值为：

$$V_{\max}=\frac{1}{2}k(x_{\max})^2 \tag{b}$$

由能量守恒原理，式（a）应等于式（b）：

$$\frac{1}{2}\left(m+\frac{m'}{3}\right)\dot{x}_{max}^2=\frac{k}{2}x_{max}^2 \qquad (c)$$

凡是振动物体作简谐运动时（工程中的微幅自由振动几乎都是简谐运动），例如

$$x=x_{max}\sin pt$$

则

$$\dot{x}_{max}=x_{max}p$$

把上列关系式代入式（c）得：

$$p=\sqrt{\frac{k}{m+\frac{1}{3}m'}} \qquad (1\text{-}8)$$

因此，自由振动的周期为：

$$\tau=\frac{2\pi}{p}=2\pi\sqrt{\frac{m+\frac{1}{3}m'}{k}} \qquad (1\text{-}9)$$

∴固有频率为：

$$f=\frac{1}{\tau}=\frac{p}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m+\frac{1}{3}m'}} \qquad (1\text{-}10)$$

把式（1-9）、(1-10）分别同式（1-3)、(1-4)比较，可以得出结论：如果要考虑弹性元件的质量对自由振动周期和频率的影响，只要把三分之一的弹性元件质量加到惯性元件质量上去就可以了。

应当指出，上述能量法求得的周期和频率仍然是近似值。把它同精确解❶对比一下，在所讨论的弹簧—质量体系中，我们把两类元件的质量比（或重量比）与计算误差情况列于下表：

$\frac{m'}{m}$	0.1	1	10	100	∞
误差%	0	+0.7	+6.3	+9.8	+15.6

由此可见，当杆重超过吊重时，按上述能量法的计算公式可以得到相当准确的答案（误差<1%）。

第三节　阻力对自由振动的影响

在上一节的讨论中，我们没有考虑阻力，因此振动物体m以不变的振幅持续地自由振动下去。但是经验指出，振幅是在随时间减小，振动是逐渐被消失的。要使运动分析更加接近于实际，就应该把阻力也考虑进来。只有在阻力比作用力小得很多很多或问题的具体要求不需要更高的精确度时才可以忽略不计。通常阻力有各种来源，例如两接触面的干摩擦

❶这个问题的精确解法引用了“波动方程”，并按杆端的边界条件和运动的初始条件确定积分常数，求出频率方程。有兴趣的读者可参阅有关书籍。

力、有润滑剂时的湿摩擦力、空气阻力、液体阻力、电磁阻力以及材料本身的内摩擦阻力等等。在振动中这些阻力统称为阻尼。不同的阻尼具有不同的性质。

对于干摩擦力R，一般可用库伦定律：

$$R=\mu N$$

式中 N——两接触面之间的法线压力；

μ——摩擦系数，其值决定于接触面的材料和粗糙程度等。

实验表明，静摩擦系数较动摩擦系数稍大。在计算时还假定运动中的摩擦系数与运动速度无关。库仑定律对光滑面所做的实验很吻合。但如接触面是粗糙的，摩擦系数就与速度有关系了，这时摩擦系数随着速度的增高而减小。

两接触面之间有润滑剂时，摩擦力决定于润滑剂的粘性和运动的速度。如果是完全润滑，即相对滑动面之间存在一层连续的油膜，这时阻力与润滑剂的粘性和速度成正比，而与速度方向相反：

$$R=bv$$

式中，b称为粘性阻尼系数。它决定于运动物体的形状、尺寸和润滑剂介质的粘性。

一个物体在粘性液体内作低速运动时，或象缓冲罐那样，运动的活塞使液体从狭缝中通过，这时阻力也是与速度成正比。所以凡是讨论到与速度成正比的摩擦阻力时，习惯地称之为粘性阻尼，并以缓冲罐作为符号代表它。

物体以较高的速度（3m/s以上）在空气或液体中运动时，可以足够准确地假定，阻力与速度的平方成正比：

$$R=cv^2$$

式中c是阻力系数。

结构材料本身的内摩擦引起的阻力，称为材料阻尼。在完全弹性材料内，应变与应力的相位相同，在反复受力过程中没有能量损失。在粘弹性材料内，应变滞后于应力，有相位差，在反复受力过程中形成滞后回线，因此要耗散能量而成为振动的阻尼。阻尼的存在将消耗振动系统中的能量。消耗的能量转变为热能和声能（噪声）传出去。在自由振动中’能量的消耗导致系统振动的幅度逐渐减小而最后使振动停止，所以有阻尼的自由振动又称为衰减振动。

由于粘性阻尼与速度成正比，因此又称为线性阻尼。这种阻尼在分析振动问题时使求解大为简化，所以我们开始总是以粘性阻尼为基本模型来分析有阻尼的振动。当系统中存在非粘性阻尼时，通常引进一个等效粘性阻尼系数b_e来进行近似计算。等效粘性阻尼系数的值是根据一个周期内非粘性阻尼所消耗的能量和等效粘性阻尼所消耗的能量相等这一原则计算出来的。

现在我们仍讨论一个弹簧-质量体系的自由振动，只是这里（图1-5）加上了一个与运动速度$\dot{x}$成正比的阻力（粘性阻尼）。图中的缓冲罐就是这种粘性阻尼的代表符号，b是阻尼系数，即单位速度下的阻力。于是我们称它为弹簧-质量-阻尼系统。

在这种情况下，离开平衡位置x处的物体m受力如图1-5所示：

弹簧作用力 $(k\delta_s-kx)$，方向向上；

运动阻力 $-b\dot{x}$ 方向向下；

物体重力 $-mg$ 方向向下。

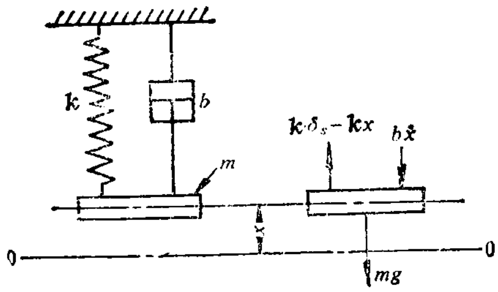


图 1-5

所以，作用在物体上的有效力为：

$$(k\delta_s - kx) - b\dot{x} - mg = -kx - b\dot{x}$$

按牛顿第二定律，物体m的运动微分方程式为：

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \tag{a}$$

以m除式（a）各项，并用上节代号$p^2 = \frac{k}{m}$，则有：

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + p^2 x = 0 \tag{1-11}$$

这是一个二阶线性齐次微分方程，它的解可取如下的形式[1]：

$$x = e^{rt} \tag{b}$$

式中，e是自然对数的底；t是时间；r是一个常数，其数值须根据式(b)满足式(1-11)这样的条件而定。将这个试探函数式（b）代入式（1-11）求得如下的特征方程：

$$r^2 + \frac{b}{m}r + p^2 = 0$$

由此求得r的两个根为：

$$r = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - p^2} \tag{c}$$

显然，r这两个根的性质要看式（c）根号究竟是实数还是虚数。一般说来，存在三种情况：

如果$\left(\frac{b}{2m}\right) - p > 0$，物体无振动现象，而系统称为过阻尼；

如果$\left(\frac{b}{2m}\right) - p = 0$，系统处在振动与非振动的界限上，而称为临界阻尼；

如果$\left(\frac{b}{2m}\right) - p < 0$，系统是振动性的，而称为欠阻尼。

我们引入无因次阻尼比c这个重要概念[2]，并用它来区分上述三种情况。所谓阻尼比

[1] 只有这种函数形式在无论微分几次仍得原函数，因而有可能满足微分方程式（1-11）。

[2] 这样就只需要两个常数c和p，而不是三个系统常数k、b和m，便能表明系统的动态过程（过渡过程）。

乃是实际阻尼系数 b 与临界阻尼系数b_c之比，即

$$c=\frac{b}{b_c}$$

由式（c）可见，系统出现临界阻尼的条件是：

$$\frac{b_c}{2m}=p$$

或
$$b_c=2mp=2m\sqrt{\frac{k}{m}}=2\sqrt{km} \tag{d}$$

又
$$\frac{b}{m}=\left(\frac{b}{b_c}\right)\left(\frac{b_c}{m}\right)=c(2p)=2cp \tag{e}$$

于是，微分方程式（1-11）便可写成：

$$\ddot{x}+2cp\dot{x}+p^2x=0 \tag{1-12}$$

而它的特征方程的两个根式（c）便可写成：

$$\left.\begin{aligned}r_1=-cp+p\sqrt{c^2-1}\\ r_2=-cp-p\sqrt{c^2-1}\end{aligned}\right\} \tag{f}$$

这就是两个能使式（b）满足微分方程式（1-12）的值。因此，式（1-12）的通解便可写为：

$$x=A_1e^{r_1t}+A_2e^{r_2t} \tag{1-13}$$

式中A_1和A_2是两个任意常数，由运动的初始条件确定。

下面我们按阻尼比 c 分别讨论上述三种情况。

1．$c<1$　在这种情况下，r 的二根为复数：

$$r_1=-cp+jp\sqrt{1-c^2}$$
$$r_2=-cp-jp\sqrt{1-c^2}$$

式中$j=\sqrt{-1}$，通解式（1-13）为：

$$x=e^{-cpt}\{A_1e^{jp\sqrt{1-c^2}t}+A_2e^{-jp\sqrt{1-c^2}t}\} \tag{1-14}$$

引用欧拉公式$e^{\pm j\theta}=\cos\theta\pm j\sin\theta$得：

$$e^{jp\sqrt{1-c^2}t}=\cos p\sqrt{1-c^2}t+j\sin p\sqrt{1-c^2}t$$

$$e^{-jp\sqrt{1-c^2}}=\cos p\sqrt{1-c^2}t-j\sin p\sqrt{1-c^2}t$$

式（1-14）可写成：

$$x=e^{-cpt}\{(A_1+A_2)\cos p\sqrt{1-c^2}t+j(A_1-A_2)\sin p\sqrt{1-c^2}t\}$$

或
$$x=e^{-cpt}\{A_3\cos p\sqrt{1-c^2}t+A_4\sin p\sqrt{1-c^2}t\} \tag{g}$$

式中A_3和A_4为新的常数。为了求得这些常数，设初始条件为：

$$t=0\text{时，}\ x=x_0；\ \dot{x}=\dot{x}_0$$

以此代入式（g）及其对时间的一阶导数式，然后解得：

$$A_3 = x_0$$

$$A_4 = \left(\frac{\dot{x}_0 + cpx_0}{p\sqrt{1-c^2}}\right)$$

代入式(g)则得通解为:

$$x = e^{-cpt}\left\{x_0 \cos p\sqrt{1-c^2}\,t + \left(\frac{\dot{x}_0 + cpx_0}{p\sqrt{1-c^2}}\right)\sin p\sqrt{1-c^2}\,t\right\} \tag{1-15}$$

式(1-15)又可写成如下更方便的形式:

$$x = A_5 e^{-cpt}\cos(p\sqrt{1-c^2}\,t - \alpha) \tag{1-16}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} A_5 &= \sqrt{x_0{}^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + cpx_0}{p\sqrt{1-c^2}}\right)^2} \\ \alpha &= \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\dot{x}_0 + cpx_0}{x_0 p\sqrt{1-c^2}}\right] \end{aligned}\right\} \quad (h)$$

让我们举一个数字例题来看一看这个解所代表的物理意义。

设$p=16\mathrm{rad/s}$，无因次阻尼比$c=0.1$。拉或压物体m离开平衡位置到x_0然后释放,即初始条件为，$t=0$时：$x=x_0$；$\dot{x}=0$

按式(h):

$$A_5 = \sqrt{(x_0)^2 + \left(\frac{0+cpx_0}{p\sqrt{1-c^2}}\right)^2} = \frac{x_0}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{x_0}{\sqrt{1-0.01}} \approx 1.005x_0$$

$$\alpha = \mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{0+cpx_0}{x_0 p\sqrt{1-c^2}}\right] = \mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\right] = \mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{0.1}{\sqrt{0.99}}\right] = \mathrm{tg}^{-1}[0.1005]$$

代入式(1-16)得:

$$x = 1.005x_0 e^{-1.6t}\cos\{15.92t - \mathrm{tg}^{-1}0.1005\}$$

从图1-6中，很明显地看出,此运动属于振幅递减的简谐振动。其圆频率为$p\sqrt{1-c^2}$，而振动的周期和频率是:

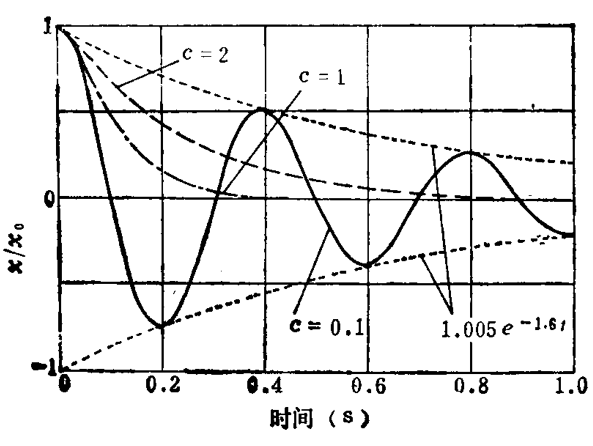


图 1-6

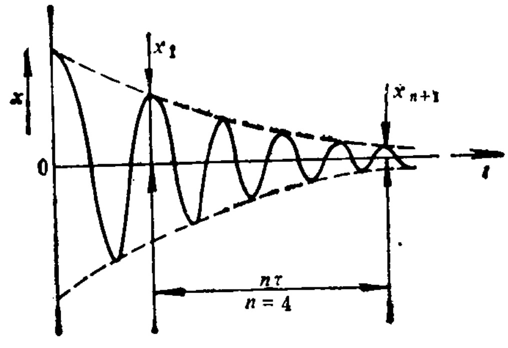


图 1-7