

高等学校函授教材

(兼作高等教育自学用书)

线性代数讲义

朱光贵 主编

宇航出版社

高等学校函授教材

(兼作高等教育自学用书)

线性代数讲义

朱光贵 主编

学苑出版社

内 容 简 介

本书是为中国人民大学函授学院的学员学习线性代数而编写的函授教材。全书分六章，按照现行高等院校财经类专业本科学生学习的要求编写。

本书编写的特点是便于自学：重点突出，深入浅出，辅以较多的例题和习题，对部分习题作了解答。

本书可作为成人高校财经类专业的教材，也可作为全日制高校学生和自学青年学习线性代数的参考书。

线性代数讲义

朱光贵 主编

责任编辑：姜明河

*

宇航出版社出版

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经销

曙光印刷厂印刷

*

开本：850×1168 1/32 印张：13 字数：347千字

1989年7月第1版第1次印刷 印数：1—9000册

ISBN7-80034-207-7/G·034 定价：6.75元

前 言

本书是为中国人民大学函授学院的学员学习线性代数而编写的函授教材，也可作为全日制高等学校财经专业的学生和自学青年学习线性代数的参考书。

本书共分六章。第一章行列式，第二章 n 维向量，第三章矩阵，第四章线性方程组，第五章投入产出数学模型，第六章相似矩阵。

作为函授教材，本书编写的基本指导思想是要便于学员自学。因此在编写中力求讲得条理清楚，重点突出，概念明确，通俗易懂；对于读者在自学中可能发生困难的地方，都作了比较详细的分析和推导。每一基本内容后面的例题也选得比较多，同时将解题过程尽量写得易于接受。每一章后面均附有学习的基本要求和内容提要，便于读者掌握重点和复习。对于习题，选其中的一部分作了解答，便于学员参考。

参加本书编写的还有史可、赵中林、朱萌、张京元等同志。

由于编者水平所限，加上时间仓促，书中定有不少缺点和错误，请读者批评指正。

编 者

1988年1月

常用字符表

字符

含意

x_1, x_2, x_3

方程式中的未知量

a_{ij}

第 i 个方程式中 x_j 的系数

D

方程组的系数行列式

b_1, b_2, b_3

方程式中的常数项

D_j

将 D 中第 j 列元素换成常数

项所构成的行列式

$i_1, i_2, \dots, i_n$

由 n 个元素构成的一个 n 级排列

$N(i_1, i_2, \dots, i_n)$

n 级排列 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 的逆序数

M_{ij}

行列式中元素 a_{ij} 的余子式

A_{ij}

元素 a_{ij} 的代数余子式

a, b, c

n 维向量

$e_1, e_2, \dots$

初始单位向量

R^n

n 维向量空间

A, B, O

矩阵

A^T

矩阵 A 的转置矩阵

$|A|$

方阵 A 的行列式

A^k

方阵 A 的 k 次幂

I_n

n 阶单位方阵

A^{-1}

方阵 A 的逆方阵

$I(i, i)$

第一种初等矩阵

$I[i(k)]$

第二种初等矩阵

$I[i, j(l)]$

第三种初等矩阵

$r(a_1, a_2, \dots, a_s)$

向量组 $a_1, a_2, \dots, a_s$ 的秩

$r(A)$

矩阵 A 的秩

$\text{tr}A$

方阵 A 的迹

A	线性方程组的系数矩阵
B	线性方程组常数项构成的矩阵
$\bar{A}$	线性方程组的增广矩阵
$r(\bar{A})$	增广矩阵的秩
$V_1, V_2, \dots, V_s$	齐次线性方程组的基础解系
U_i	非齐次线性方程组的一个特解
x_{ij}	部门间流量
$y_1, y_2, \dots, y_n$	各部门的最终产品
$X_1, X_2, \dots, X_n$	各部门的总产品
$z_1, z_2, \dots, z_n$	各部门的净产品
a_{ij}	直接消耗系数
c_{ij}	完全消耗系数
$\lambda_1, \lambda_2, \dots$	方阵 A 的特征值
$X_1, X_2, \dots$	方阵 A 的属于 $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ 的特 征向量
$A \sim B$	方阵 A 与 B 相似
Δ	n 阶对角方阵
P	n 阶可逆方阵
$J_1, J_2, \dots, J_s$	约当块
J	约当标准形
T	n 阶可逆方阵
$A^{(1)}, A^{(2)}, \dots$	矩阵序列
$I + A + A^2 + \dots$	方阵幂级数
A^b	方阵幂级数的一般项

目 录

常用字符表

第一章 行列式

§ 1.1 二阶、三阶行列式	(1)
§ 1.2 n 阶行列式	(7)
§ 1.3 行列式的性质	(21)
§ 1.4 行列式按行(列)展开	(34)
§ 1.5 克莱姆法则	(45)
本章基本要求	(55)
本章内容提要	(55)
习题一	(59)
习题一选解	(65)

第二章 n 维向量

§ 2.1 n 维向量的概念	(83)
§ 2.2 向量的运算	(86)
§ 2.3 向量间的线性关系	(90)
本章基本要求	(116)
本章内容提要	(116)
习题二	(120)
习题二选解	(123)

第三章 矩阵

§ 3.1 矩阵的概念	(143)
§ 3.2 矩阵的运算	(149)
§ 3.3 几种特殊的方阵	(168)
§ 3.4 逆方阵	(171)
§ 3.5 矩阵的分块	(181)
§ 3.6 矩阵的初等变换	(187)
§ 3.7 向量组与矩阵的秩	(200)

本章基本要求	(217)
本章内容提要	(218)
习题三	(226)
习题三选解	(235)
第四章 线性方程组	
§ 4.1 线性方程组有解判别定理	(254)
§ 4.2 线性方程组的消元解法	(259)
§ 4.3 线性方程组解的结构	(268)
§ 4.4 线性方程组的迭代解法	(289)
本章基本要求	(297)
本章内容提要	(298)
习题四	(303)
习题四选解	(306)
第五章 投入产出数学模型	
§ 5.1 投入产出表	(318)
§ 5.2 直接消耗系数	(321)
§ 5.3 平衡方程组的解	(325)
§ 5.4 完全消耗系数	(331)
本章基本要求	(338)
本章内容提要	(339)
习题五	(342)
习题五选解	(344)
第六章 相似矩阵	
§ 6.1 方阵的特征向量	(348)
§ 6.2 相似矩阵	(362)
§ 6.3 约当标准形	(369)
§ 6.4 方阵幂级数	(375)
本章基本要求	(383)
本章内容提要	(383)
习题六	(389)
习题六选解	(391)
参考书目	(408)

第一章 行列式

行列式是线性代数中的一个重要概念。本章从二、三元方程组的解的公式出发，引出二阶、三阶行列式的概念，然后推广到 n 阶行列式，并导出行列式的一些基本性质及行列式按行（列）展开的定理，最后讲用行列式解 n 元方程组的克莱姆法则和齐次方程组有无非零解的判别定理。

§ 1.1 二阶、三阶行列式

一、二阶行列式

我们从二元方程组的解的公式，引出二阶行列式的概念。

在线性代数中，将含两个未知量两个方程的线性方程组的一般形式写为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1.1)$$

用加减消元法容易求出未知量 x_1, x_2 的值，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，有

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \quad (1.2)$$

这就是二元方程组的解的公式。但这个公式不好记，为了便于记这个公式，于是引进二阶行列式的概念。

我们称记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

为二阶行列式，它表示两项的代数和： $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ，
即定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.3)$$

二阶行列式所表示的两项的代数和，可用下面的对角线法则来记忆：从左上角到右下角两个元素相乘取正号，从右上角到左下角两个元素相乘取负号，如图1-1所示。

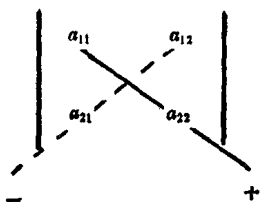


图 1-1

由于公式 (1.3) 的行列式中的元素就是二元方程组中未知量的系数，所以又称它为二元方程组的系数行列式，并用字母 D 表示，即有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

如果将 D 中第一列的元素 a_{11} , a_{21} 换成常数项 b_1 , b_2 , 则可得到另一个行列式, 用字母 D_1 表示, 于是有

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

按二阶行列式的定义, 它等于两项的代数和: $b_1 a_{22} - a_{12} b_2$, 这就是公式(1.2)中 x_1 的表达式分子。同理将 D 中第二列的元素 a_{12} , a_{22} 换成常数项 b_1 , b_2 , 可得到另一个行列式, 用字母 D_2 表示, 于是有

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

按二阶行列式的定义, 它等于两项的代数和: $a_{11} b_2 - b_1 a_{21}$, 这就是公式(1.2)中 x_2 的表达式分子。

于是二元方程组的解的公式又可写为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \quad (1.2')$$

其中 $D \neq 0$ 。

例 1 用二阶行列式解二元方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$$

解: $\because D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 4 \times 1 = 2 \neq 0$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 4 \times 2 = -5$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 1 \times 1 = 3$$

$$\therefore x_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{5}{2}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{3}{2}$$

不难检验这个结果是正确的。

二、三阶行列式

含三个未知量三个方程的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1.4)$$

还是用加减消元法，即可求得方程组 (1.4) 的解的公式，当 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$ 时，有

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_2 = \frac{a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_3 = \frac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}} \end{cases} \quad (1.5)$$

这就是三元方程组的解的公式。这个公式更不好记，为了便于记它，于是引进三阶行列式的概念。

我们称记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

为三阶行列式，它表示 6 项的代数和，即

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

即定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (1.6)$$

三阶行列式所表示的 6 项的代数和，也可用对角线法则来记忆：从左上角到右下角三个元素相乘取正号，从右上角到左下角三个元素相乘取负号，如图 1-2 所示。

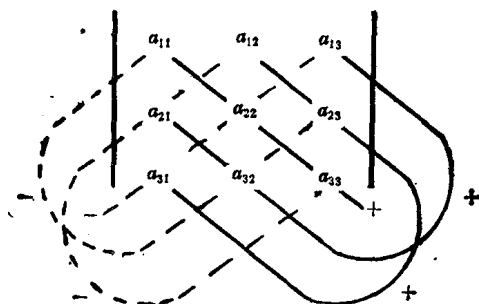


图 1-2

由于公式 (1.6) 的行列式中的元素就是三元方程组中未知量的系数，所以称它为三元方程组的系数行列式，也用字母 D 来表示，即有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

同理将 D 中第一列、第二列、第三列的元素分别换成常数项 b_1, b_2, b_3 ，就可以得到另外三个三阶行列式，分别记为 D_1, D_2

和 D_3 ，于是有

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

按照三阶行列式的定义，它们都表示6项的代数和，并且分别是公式(1.5)中 x_1 、 x_2 和 x_3 的表达式分子，而系数行列式 D 是它们的分母。

于是三元方程组的解的公式又可写为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} \quad (1.5')$$

其中 $D \neq 0$ ， D_1 、 D_2 、 D_3 都是三阶行列式。

例2 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{解: } D &= 1 \times 2 \times 2 + 2 \times 1 \times 3 + 3 \times 2 \times 1 \\ &\quad - 3 \times 2 \times 3 - 2 \times 2 \times 2 - 1 \times 1 \times 1 \\ &= 4 + 6 + 6 - 18 - 8 - 1 = -11 \end{aligned}$$

例3 用三阶行列式解三元方程组

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$$

解: $D = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned} &= 4 \times (-2) \times 2 + (-3) \times 3 \times 5 + 2 \times 6 \times (-3) \\ &\quad - 2 \times (-2) \times 5 - (-3) \times 6 \times 2 - 4 \times 3 \times (-3) \\ &= -16 - 45 - 36 + 20 + 36 + 36 = -5 \neq 0 \end{aligned}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -4 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 6 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -10$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -4 \\ 6 & -2 & -1 \\ 5 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 5$$

所以

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-5}{-5} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-10}{-5} = 2,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{5}{-5} = -1$$

为方程组的解 (代入方程组检验, 确为方程组的解)。

§ 1.2 n 阶行列式

前一节中我们讲了二阶、三阶行列式的定义, 在这一节中我

们要将它推广到 n 阶。

例如 4 阶行列式的记号为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

我们如何定义它呢？根据对角线法则，恐怕很快会想到将 4 阶行列式定义为 8 项的代数和，其中 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$, $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$, $a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$, $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$ 取正号，其余 4 项取负号。这个定义很简单，计算起来也方便，但可惜没什么用处，因此数学家不是这么定义的，而是将它定义为 24 项的代数和，其中 12 项正的，12 项负的。

为了讲清楚一般的 n 阶行列式的定义，我们先介绍一个预备知识：排列的逆序数的概念。

一、排列的逆序数

一共要讲 7 个名词。

排列：由 n 个不同的元素 1, 2, 3, ..., n 排成的任一有序数组，称为一个 n 级全排列，简称 n 级排列。

例如 1 2 3 4 是一个 4 级排列，

4 3 2 1 也是一个 4 级排列，

5 2 3 4 1 是一个 5 级排列。

排列总数： n 级排列的总数用符号 P_n 表示。我们自然会提出这样的问题： n 级排列的总数共有多少个？例如 4 级排列的总数有多少个？

一般地有以下结论：

n 级排列的总数 P_n 为 $n!$ 个。

这是很容易理解的，因为从 n 个不同的元素 1, 2, ..., n 中任取一个作为 n 级排列的第一个元素，共有 n 个取法；然后从

余下的 $n-1$ 个元素中任取一个作为 n 级排列的第二个元素，共有 $n-1$ 个取法， $\dots$ ，最后余下一个元素取作 n 级排列的最后一个元素，所以总共有 $n(n-1)\cdots 1=n!$ 个取法。

例如由1, 2, 3这三个数码可以排出 $3!=6$ 个3级排列，它们是：1 2 3, 1 3 2, 2 1 3, 2 3 1, 3 1 2, 3 2 1。

一般地，我们将一个 n 级排列记为 $i_1, i_2, \dots, i_n$ ，其中 i_1 是1, 2, $\dots$, n 中的某一个数， i_2 是余下的 $n-1$ 个数中的某一个数， $\dots$ 。例如当排列为3 2 4 1时，表示 i_1 为3, i_2 为2, i_3 为4, i_4 为1；当排列为5 1 4 2 3时，表示 i_1 为5, i_2 为1, i_3 为4, i_4 为2, i_5 为3。

排列的逆序：在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，如果有某个较大的数 i_r 排在较小的数 i_s 的前面，就称 i_r 与 i_s 构成了一个逆序。

例如在5级排列1 2 3 5 4中，较大的数5排在较小的数4之前，就称5与4为一个逆序。

又如在3级排列3 1 2中，较大的数3排在较小的数1之前为一个逆序，3在2之前也是一个逆序。即3级排列3 1 2中有两个逆序。

排列的逆序数：一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中逆序的总数，称为此排列的逆序数，记为

$$N(i_1 i_2 \cdots i_n)$$

由于5级排列1 2 3 5 4中，只有一个逆序，所以

$$N(1\ 2\ 3\ 5\ 4) = 1$$

又由于3级排列3 1 2中，共有两个逆序，所以

$$N(3\ 1\ 2) = 2$$

求一个排列的逆序数的方法是：先求第一个元素 i_1 的逆序数 N_1 ，再求第二个元素 i_2 的逆序数 N_2 ， $\dots$ ，最后求第 $n-1$ 个元素 i_{n-1} 的逆序数 N_{n-1} ，将它们加起来即可。即有

$$N(i_1 i_2 \cdots i_n) = N_1 + N_2 + \cdots + N_{n-1}$$

奇排列、偶排列：如果 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 为奇数，则称 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为奇排列；如果 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 为偶数，则称 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为偶排列。