经济数学

（上册　线性代数）

主编　李敏　刘心

大连海事大学出版社

前　言

本书是参照国家教育委员会高等教育局颁发的《经济数学基础教学大纲》而编写的。针对财经类高等专科学校培养目标及学生特点，在保持《经济数学》内容系统性的基础上，力求通俗易懂，深入浅出。

本教材分《线性代数》及《概率与数理统计》上、下两册，可供高等财经专科学校各专业、其他专科学校财经类专业以及成人高等教育财经类各专业使用。

本书加“＊”号的定理的证明或内容不作教学要求，可根据情况，自行选择学习。

限于编者的水平，书中难免有疏漏不当之处，恳请同仁及广大读者批评指正。

编　者

1999年3月

目　　录

第一章　行列式

行列式是研究线性代数的重要工具。它在数学的许多分支与其他学科中也有广泛的应用。本章先从解二元、三元线性方程组着手引入二阶、三阶行列式，进而引出 n 阶行列式的定义，讨论 n 阶行列式的性质与计算方法。

§1.1 n 阶行列式

一、二阶、三阶行列式

行列式的概念是从解线性方程组的问题中引进来的。所谓线性方程组是指未知量的最高次数是一次的方程组。例如，解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

用加减消元法，得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，此方程组有惟一解：

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

为了便于记忆上述公式,引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

并称它为二阶行列式。

利用二阶行列式的概念,式(1.2)中的分子可以分别记为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

因此,对于方程组 (1.1) ,在行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,方程组的解可以表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \tag{1.3}$$

类似地,为了讨论三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.4}$$

的解,引进记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \tag{1.5}$$

并称它为三阶行列式。

利用加减消元法,不难求出方程组(1.4)的解,其结果可以用

三阶行列式表示:当

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,方程组(1.4)有惟一解。如果记

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

则方程组(1.4)的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} \tag{1.6}$$

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

解 系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 + 6 - 1 + 4 - 3 = 5 \neq 0$$

所以方程组有惟一解。

$$D_1=\begin{vmatrix}-2&-2&1\\-9&1&-3\\0&-1&1\end{vmatrix}=-5\qquad D_2=\begin{vmatrix}1&-2&1\\2&-9&-3\\1&0&1\end{vmatrix}=10$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-2&-2\\2&1&-9\\1&-1&0\end{vmatrix}=15$$

$x_1=\dfrac{D_1}{D}=-1$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=2$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}=3$

二、排列与逆序

为了把二阶、三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式，首先引入排列的概念。

定义 1.1 由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 **n 级排列**。

这里所说的 n 级排列是指 n 个数码的全排列。

例 2 由自然数 1,2,3 可组成的三级排列共有 $3!=6$：

123，132，213，231，312，321

一般地，n 级排列的总数为 $n!$ 个。

定义 1.2 在一个 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，如果有较大的数 p_t 排在一个较小的数 p_s 前面（$p_s<p_t$），则称这两个数码 p_s 与 p_t 构成一个**逆序**。一个排列中逆序的总数，称为它的**逆序数**。记为

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)$$

例 3 求 5 级排列 35412 的逆序数

解 构成逆序的数对共有 31，32，54，51，52，41，42 等七对，因此 $\tau(3\,5\,4\,1\,2)=7$

定义 1.3 逆序数是偶数的排列称为**偶排列**;逆序数是奇数的排列称为**奇排列**。

例如,$\tau(3\ 1\ 4\ 5\ 2)=4$,排列 3 1 4 5 2 为偶排列;

$\tau(3\ 5\ 1\ 2\ 4)=5$,排列 3 5 1 2 4 为奇排列;

$\tau(1\ 2\ 3\ 4\ 5)=0$,排列 1 2 3 4 5 为偶排列;

定理 1.1 n 个数码($n>1$)共有 $n!$ 个 n 级排列,其中奇排列,偶排列各占一半($\frac{n!}{2}$)

三、n 级行列式

为了定义 n 阶行列式,我们先来研究三阶行列式的结构。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

容易看出:

1. 等式右边每一项都是位于不同行、不同列的三个元素的乘积。每一项除正负号外,都可写成

$$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3} \tag{1.7}$$

这里第一个下标(称行标)按从小到大顺序排成 123,而第二个下标(称列标)排成 $P_1P_2P_3$,它是 1,2,3 三个数的某个排列。这样的排列共有 6 种。对应三阶行列式右边共含 6 项。

2. 等式右边每项前所带正负号,由式(1.7)的列标 $P_1P_2P_3$ 构成的排成所确定。带正号的三项,其列标的排列都是偶排列;带负号的三项,其列标的排列都是奇排列。于是,三阶行列式可写成

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{(p_1p_2p_3)}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中 $\sum\limits_{(p_1p_2p_3)}$ 取遍所有的三级排列时，对形如 $(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 的项求和。

仿此可以给 n 阶行列式下定义。

定义 1.4 设有 n^2 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n)$ 将它们排成 n 行、n 列的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.8}$$

式(1.8)称为 n **阶行列式**。它表示所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的代数和。其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是一个 n 级排列，$p_1p_2\cdots p_n$ 为偶排列的项取正号；$p_1p_2\cdots p_n$ 为奇数排列的项取负号。因此，n 阶行列式可表示为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{(p_1p_2\cdots p_n)}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1.9}$$

式(1.9)称为 n 阶行列式的表达式(亦称完全展开式)。

因为由 $P_1P_2\cdots P_n$ 组成的 n 级全排列有 $n!$ 个，所以 n 阶行列式共有 $n!$ 项，其中带正号与带负号(不计元素本身的符号)的项各占一半。

行列式有时简记为 $|a_{ij}|$。我们还规定由一个元素 a 构成的一阶行列式 $|a|$ 就是 a 本身。

例 4 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (a_{ii} \neq 0,\ i = 1,2,\cdots n) \tag{1.10}$$

解：根据定义 1.4

$$D = \sum_{(p_1p_2\cdots p_n)} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

上面的和数中，只有当 $P_n = n,\ P_{n-1} = n-1\cdots P_2 = 2, P_1 = 1$ 时，乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 才不等于零。因此

$$D = (-1)^{\tau(1\,2\,3\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

具有(1.10)形状的行列式称为上三角形行列式。行列式中从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**。主对角线上的各元素 $a_{ii}(i = 1,2,\cdots n)$ 称为**主对角元素**。

主对角线以外的元素均为零的行列式，称为**对角形行列式**。根据例 4，对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

即上三角形行列式及对角形行列式都等于主对角线上元素的积。

在 n 阶行列式的定义中，每一项里的 n 个元素是按它们的行标成自然序排列，即

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1.11}$$

由于数的乘法有交换律，因此也可以把这 n 个元素按列标成自然序列，即项(1.11)也可以写成

$$a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \tag{1.12}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 是一个 n 级排列。因为项(1.12)就是项(1.11)，所以它前面所带符号为 $(-1)^{\tau(p_1p_1\cdots p_n)}$。试问：能不能直接由项(1.12)的行标所成排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 来决定项(1.12)所带的符号呢？下面的定理回答了这个问题。

定理 1.2 如果 n 阶行列式(1.9)的某一项的 n 个元素，其列标按自然序排列，则这一项前面所带的符号由行标所成排列的奇偶性决定，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1i_2\cdots i_n)} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \tag{1.13}$$

（证明略）

§1.2 n 行列式的性质

利用行列式的定义来计算较高阶的行列式，计算量是相当大的，因此有必要研究行列式的性质，以简化行列式的计算。这些性质在理论上也具有重要意义。

本节列举的行列式的性质，一般仅以四阶行列式为例加以证明，对于一般的 n 阶行列式，可以仿照此证法进行证明。

性质 1 将行列式的行、列互换，行列式的值不变，即设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ & \cdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $D = D^T$。行列式 D^T 称为行列式 D 的**转置行列式**。

证明 设行列 D^T 中位于第 i 行、第 j 列的元素为 b_{ij}，显然有 $b_{ij} = a_{ji}(i,j = 1,2,\cdots n)$ 根据 n 阶行列式的定义，有

$$D^T = \sum_{(p_1p_2\cdots p_n)}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}$$

$$= \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

由上节定理 1.2，得 $D = D^T$

性质 1 说明行列式的行和列的地位是相同的。也就是说，对于“行”成立的性质，对于“列”一定成立。

性质 2 行列式某一行(列)的所有元素都乘以数 k，等于数 k 乘此行列式。

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \sum_{(p_1p_2p_3p_4)} (-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)} a_{1p_1} a_{2p_2} (ka_{3p_3}) a_{4p_4} \\ &= k \sum_{(p_1p_2p_3p_4)} (-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4} \\ &= \text{右边} \end{aligned}$$

推论 1 若行列式中有一行(列)为零,则这个行列式值为零。

性质 3 行列式中若有某一行(列)是两组数的和,则此行列式等于两个行列式的和。这两个行列式的这一行(列),分别是第一组数和第二组数,而其余各行(列)与原来行列式的相应各行(列)相同。

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 & b_4+c_4 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

(2) 式的证明：

$$\text{左边} = \sum_{(p_1p_2p_3p_4)}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}(b_{p_2}+c_{p_2})a_{3p_3}a_{4p_4}$$

$$= \sum_{(p_1p_2p_3p_4)}[(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}b_{p_2}a_{3p_3}a_{4p_4} + (-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}c_{p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}]$$

$$= \sum_{(p_1p_2p_3p_4)}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}b_{p_2}a_{3p_3}a_{4p_4} + \sum_{(p_1p_2p_3p_4)}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}c_{p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$$

$=$右边

我们知道 4321 的逆序数是偶数，但 3421 的逆序数却是奇数，这就是说，把 4321 的 4 与 3 互换而成为 3421，它们逆序数的奇偶性就变了。一般情况也是这样，把排列中任意两个数互换，排列逆序数的奇偶性就改变这是逆序数的一个重要性质，其证明较繁，这里省略。

引用这个性质根据定义我们容易证明。

性质 4 互换行列式的两行(列)，行列式的值反号。

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \tag{3}$$

(3) 式的证明：

设(3)式左边、右边的行列式分别记为 D 与 D_1，往证 $D = -D_1$

在 D 中任取一项

$$(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4} \tag{4}$$

现在来证

$$-(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4} \tag{5}$$

是 D_1 的一项,因为

$$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4} = a_{1p_1}a_{4p_4}a_{3p_3}a_{2p_2} \tag{6}$$

显然,这是 D_1 中取自不同行、不同列的 4 个元素的乘积,而且(6)式右端的 4 个元素是按它们在 D_1 中所处的行的自然顺序排好的,因此

$$(-1)^{\tau(p_1p_4p_3p_2)}a_{1p_1}a_{4p_4}a_{3p_3}a_{2p_2} \tag{7}$$

是 D_1 中的一项。

因为排列 $p_1p_4p_3p_2$ 可由排列 $p_1p_2p_3p_4$ 经过对换 (p_2,p_4) 得到,根据前述性质,排列 $p_1p_2p_3p_4$ 与排列 $p_1p_4p_3p_2$ 的奇偶性相反,所以有

$$(-1)^{\tau(p_1p_4p_3p_2)} = -(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}$$

于是

$$(-1)^{\tau(p_1p_4p_3p_2)}a_{1p_1}a_{4p_4}a_{3p_3}a_{2p_2}$$
$$= -(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4})$$

从而 $-D = D_1$,即 $D = -D_1$

推论 2 如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式的值为零。

证明:交换行列式的这两行,有 $D = -D$,由此得 $D = 0$

推论 3 如果行列式有两行(列)的对应元素成比例,则此行列

式的值为零。

性质 5 把行列式的某一行(列)的所有元素乘以数 k 加到另一行(列)的相应元素上,行列式的值不变。

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21}+ka_{41} & a_{22}+ka_{42} & a_{23}+ka_{43} & a_{24}+ka_{44} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \tag{8}$$

式(8)的证明:由性质 3 及推论 3 可直接得证。

例 1 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (a_{ii} \neq 0,\ i = 1,2,\cdots n)$$

这种主对角线上方的元素全为零的行列式称为**下三角形行列式**。

解:根据性质 1,有 $D = D^T$,即