高等师范院校教学参考书

复变函数论

李锐夫　程其襄　编

人民教育出版社

高等师范院校教学参考书

复变函数论

李锐夫　程其襄 编

人民教育出版社

内 容 提 要

本书第二版对1960年第一版作了少量修改。前三章是准备知识。第四至十章是复变函数论的基础及其应用。第十一章讨论整函数和半纯函数。第十二、十三章讨论解析开拓与多值函数。附录叙述物理应用、史略并给出部分习题答案。可作高等师范院校数学专业教学参考书之用。

高等师范院校教学参考书
复 变 函 数 论
李锐夫　程其襄 编
*
人民教育出版社出版
新华书店上海发行所发行
上海日历印刷厂印装
*
开本787×1092　1/32　印张7 10/16　字数183,000
1960年3月第1版
1979年10月第2版　1980年3月第3次印刷
印数28,001—78,000
书号 13012·0392　　定价 0.56元

再版前言

本书出版以来已近二十年。人民教育出版社决定再版发行。我们的同事张奠宙、曹伟傑、宋国栋、戴崇基等同志通过多年采用这本书的教学实践，提出意见，协助修改，每章增添若干较易的习题，且将全部习题演算一遍，编出习题答案附在书末。特此志谢。

原书计划作为高等师范院校数学系的《复变函数论》教材，86学时授完。如教学时数较少，可将目录中附有“*”号的内容略去。

作者于上海师范大学

一九七九年六月

序

复变函数论的范围非常广阔，是由过去一百年来许多数学家根据歌西、魏尔斯脱拉斯及黎曼三家的主要观点出发而发展起来的。歌西的工作从在一个区域内为单值可导的复变函数出发，建立了其著名的积分定理与公式，并证明这样的函数在其定义区域内以任一点为心的充分小圆内可用泰勒级数来表达。魏尔斯脱拉斯的工作是从泰勒级数及其解析开拓所定义的函数出发，并尽可能系统地利用泰勒级数研究其性质。歌西方法是限于研究完全解析函数的单值分枝，因此必须通过解析开拓的补充，才能得到和魏尔斯脱拉斯相同的结果。黎曼的工作是从几何方面出发，奠定了复变函数的几何理论基础，给出保形映射的基本定理和调和函数的物理解释。本书是作者年来在华东师范大学担任复变函数论的讲稿，根据一九五六年教育部召开的复变函数论教学大纲讨论会所通过的大纲草案整理而成。主要内容是歌西、魏尔斯脱拉斯及黎曼在复变函数论方面古典工作的结合。目的在作高等师范学校数学系复变函数论的教本。

第一章到第三章的内容是学习复变函数论的准备知识。第四章定义正则函数，是复变函数论的出发点。第五章将实变数域的初等函数推广到复变数域，一方面研究初等函数间的联系，另一方面为以后的讨论准备具体例子。第六章研究正则函数的几何特征。第七章至第九章是解析函数理论的中心。第十章介绍以上理论的应用。第十一章启发读者如何将有理函数的两种表示法推广到整函数与半纯函数的表示法，并用这种方法来处理初等超越函数。第十二章与第十三章密切联系，使读者对多值复变函数得到

一个比较有系统的理解。作者的愿望是使读者通过这一门课程的学习，能够认识到数学分析从实数域扩充到复数域的必要性与正则函数具有强烈的内在联系，从而在数学分析基础上获得系统的提高；既有助于将来对数学教学有关问题的解决，并能从事于独立进修工作。全书叙述力求简单明了与重点突出，尤注意于问题的提出与交代。定理的证明尽可能做到严密。因限于篇幅或工具知识而不能证明的定理，亦都指出参考资料。每章之后附有习题。习题的大部分是书中定理及公式的直接应用，小部分是可以用简单方法证明的次要定理，目的在培养读者独立思考能力。

书末附有附录三则。附录 I 略论复变函数论在物理学中的应用，导出流体力学、电学及热学中的复势，使读者初步了解这些方面的问题可以利用复变函数论的工具来研究。如教学时间许可，这个附录可以在 4.6 节之后讲述。附录 II 介绍复变函数论发展史略。附录 III 列有复变函数论的参考书目，俾读者作进一步研求的参考。这些参考书亦是作者编写本书的参考资料；有些定理的证明和例题、习题的选择，系直接采自这些书中。

本书初稿完成于一九五七年七月，曾经北京师范大学范会国教授、浙江大学徐瑞云教授与华东师范大学吴逸民教授校阅，提出许多宝贵意见。两年以来在浙江师范学院与华东师范大学印为讲义，试教数次。浙江师范学院王传芳同志与华东师范大学张奠宙同志通过教学实践，又指出若干疏忽之处，使作者得作进一步的修改。对以上诸位同志，表示衷心感谢！但作者谫陋，错误之处仍所难免。希望数学界的同志们予以指正。

作者于华东师范大学

一九五九年十一月

目　录

第一章　复　　数

1.1. 复数　在数学分析中读者已经知道实数系统。有理数的建立方法是最初引出自然数，然后把分数 p/q 作为具有顺序的一对自然数，定义出有理数的算术运算法则。十九世纪 40 年代，数学家汉弥尔敦（Hamilton）利用实数，依类似的方法建立复数理论的基础。

具有一定顺序的一对实数 a 和 b 的组合叫做一个复数。设 A 表这个复数，则用符号 $A=(a,b)$ 表示。当 $b=0$ 时，$(a,0)$ 定义为实数 a，即 $(a,0)=a$。因此全部实数是全部复数的一部分。

对于这样建立起来的复数，我们必须规定其运算方法。由于实数是复数的特例，规定复数算术运算的一个基本问题是要求复数运算的结果如推到实数特例时，能够和实数运算的结果相符合，同时也要求复数算术运算能够满足实数算术运算的一般公理以构成复数体。

1.2. 复数的算术运算　1. 设

$$A=(a,b),\quad B=(c,d)$$

是任意两个复数，则当而只当

$$a=c,\quad b=d$$

时，A 和 B 叫做相等，写为

$$A=B。$$

如 $A=B$，则 $B=A$；若 C 是另一个复数，而 $A=B$，$B=C$，则 $A=C$。

任意两个复数间是没有大小关系的，但如两个复数 A 和 B 不

相等，则写为

$$A \neq B_{\circ}$$

2．所谓两个复数的算术运算是一种结合，由它可以产生第三个复数。

设 $A=(a, b), B=(c, d), C=(e, f), \cdots$

为任何复数。第一种结合是 $A+B$，叫做 A 加 B，其结果命为 $(a+c, b+d)$，叫做 A, B 的和。所以

$$(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d) \tag{1}$$

求和的方法叫做加法。

显然加法是可能且唯一的。它是适合于下列两个运算律：

Ⅰ．交换律：$A+B=B+A$；

Ⅱ．结合律：$A+(B+C)=(A+B)+C$。

加法的反运算叫做减法。设由 A，B 两个复数求另一个复数 $X=(x, y)$，使满足方程

$$A+X=B_{\circ}$$

这个方程是相当于下列两个方程：

$$a+x=c, \quad b+y=d_{\circ}$$

因此 X 是存在且唯一的，其结果写为

$$X=B-A,$$

就是

$$(c, d)-(a, b)=(c-a, d-b)_{\circ} \tag{2}$$

如 $A=B$，则等式(2)的右端是(0, 0)，这个数叫做零，用符号 0 表示，即 $0=(0,0)$。零在加法运算中有以下的性质：

$$A+0=0+A=A_{\circ}$$

零的存在是唯一的；因为有一个 0，且

$$A+0=A,$$

已如上面所说，假定另有一个零 $0'$ 存在，则应有

$$A+0'=A,$$

在这两个方程中分别令 $A=0'$ 和 $A=0$，得

$$0'+0=0' \quad 和 \quad 0+0'=0,$$

由加法交换律

$$0+0'=0'+0,$$

得

$$0'=0,$$

所以只能有一个零。

对每一个复数 $A=(a,\ b)$ 有一个而只有一个复数 $(-a,\ -b)$ 和它对应，这叫做负 A，写为 $-A$；就是

$$-A=(-a,\ -b)。$$

A 和 $-A$ 满足下列关系式：

$$A+(-A)=0=(-A)+A。$$

不难证明一个复数的负数是该数本身的必要和充分条件是该数为 0。

3．两个复数 A 和 B 的第二种结合是 $A\cdot B$，或写为 AB，这叫做 A 乘 B，其结果命为 $(ac-bd,\ ad+bc)$，叫做 A 和 B 的积。所以

$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)。\qquad (3)$$

求积的方法叫做乘法。

显然乘法是适合于下列三个运算律：

Ⅰ．交换律：$AB=BA$；

Ⅱ．结合律：$A(BC)=(AB)C$；

Ⅲ．分配律：$(A+B)C=AC+BC$。

乘法的反运算叫做除法，就是已知两个复数 A 和 B，求一个复数 $X=(x,\ y)$，使满足方程：

$$AX=B。$$

如 $A\neq0$，除法是可能且唯一的；因为以上方程相当于下列两

个方程:

$$ax-by=c, \qquad bx+ay=d_{\circ}$$

这个方程组的系数行列式是 $a^2+b^2\neq 0$, 所以他们对 x, y 有唯一的解, 就是

$$x=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}, \qquad y=\frac{ad-bc}{a^2+b^2}。$$

因此, 当 $A\neq 0$, 我们用符号 $\frac{B}{A}$ 代表 X, 就是

$$\frac{(c,d)}{(a,b)}=\left(\frac{ac+bd}{a^2+b^2}, \ \frac{ad-bc}{a^2+b^2}\right)。\tag{4}$$

在等式(4)中当 $A=B$, 命其结果为 I, 即

$$\mathrm{I}=(1,0)$$

这叫做单位数或一。它在乘法运算中有以下的性质:

$$A\cdot \mathrm{I}=\mathrm{I}\cdot A=A。$$

4. 由 1.1 节, 我们定义 $(a, 0)=a$, 它包括 $0=(0, 0)$ 和 $\mathrm{I}=(1,0)$。就复数的观点说, 我们将 $(a,0)$ 叫做复数域中的实数。设 $a=(a,0), b=(b,0)$, 则

$$a\pm b=(a\pm b, 0),$$

$$ab=(ab, 0),$$

$$\frac{b}{a}=\left(\frac{b}{a}, \ 0\right) \quad a\neq 0。$$

因此复数域中的实数四则运算的结果亦是复数域中的实数。所以复数域中的实数不但与实数是一一对应, 而且在四则运算上亦成同构的。

5. 由乘法

$$(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1,$$

因此复数 $(0, 1)$ 和 $\sqrt{-1}$ 的性质相同, 它是方程 $x^2+1=0$ 的一个根。命

$$(0,1)=i,$$

i 叫做虚数单位。

由于 $$(0,1)(b,0)=(0,b),$$

所以 $$(0,b)=ib。$$

因 $$A=(a,b)=(a,0)+(0,b),$$

我们将复数 A 写为

$$A=a+ib。$$

由以上的规定，复数的算术运算法则和实数的算术运算法则完全一致，只是将符号 i 看做一个数，而将其平方代以 -1。

当 $A=a+ib$，a 叫做 A 的实数部，b 叫做 A 的虚数部，写为

$$a=RA,\qquad b=IA。$$

1.3. 共轭复数，绝对值，不等式 1. 设 $A=a+ib$，则 $a-ib$ 叫做 A 的共轭复数。用符号 $\bar{A}$ 表示，即

$$\bar{A}=a-ib。$$

显然，$\bar{A}$ 的共轭复数是 A，所以 $\bar{\bar{A}}=A$。A 是实数的必要与充分条件是 $A=\bar{A}$。

容易证明

$$\overline{A+B}=\bar{A}+\bar{B} \tag{1}$$

及

$$\overline{AB}=\bar{A}\bar{B}。 \tag{2}$$

若 $AC=B$，因 $\bar{A}\bar{C}=\bar{B}$，得

$$\overline{\left(\frac{B}{A}\right)}=\frac{\bar{B}}{\bar{A}}。 \tag{3}$$

由此，设 $R(A,B,C,\cdots)$ 表示对复数 $A,B,C,\cdots$ 进行算术运算的结果，则

$$\overline{R(A,B,C,\cdots)}=R(\bar{A},\bar{B},\bar{C},\cdots)。\tag{4}$$

作为一个应用，若 ζ 是方程

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n=0\tag{5}$$

的一个根，则 $\bar{\zeta}$ 是方程

$$\bar{a}_0z^n+\bar{a}_1z^{n-1}+\cdots+\bar{a}_n=0$$

的根。

特例，若 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是实数，则 ζ 与 $\bar{\zeta}$ 都是方程 (5) 的根。所以实系数整方程如有复数根，则其共轭复数亦是它的根。

2．因 $A\bar{A}=a^2+b^2\geqslant 0$，$a^2+b^2$ 的算术平方根是非负实数，它叫做 A 的绝对值，或模，用符号 $|A|$ 表示，即

$$|A|=+\sqrt{a^2+b^2}。$$

由此

$$A\bar{A}=|A|^2。\tag{6}$$

应用等式(6)，对任何两个复数 A, B

$$|AB|^2=(AB)(\bar{A}\bar{B})=(A\bar{A})(B\bar{B})=|A|^2\cdot|B|^2,$$

由于绝对值不为负数，故得

$$|AB|=|A|\cdot|B|,\tag{7}$$

这个结果可以推广到任意有限个复数乘积的绝对值。

如 $A\neq 0, AB=C$，由 $B=\dfrac{C}{A}$，得

$$\left|\frac{C}{A}\right|=\frac{|C|}{|A|}。\tag{8}$$

对于复数相加的绝对值不如乘除的简单。因

$$|A+B|^2=(A+B)(\bar{A}+\bar{B})=A\bar{A}+(A\bar{B}+\bar{A}B)+B\bar{B},$$

故得

$$|A+B|^2=|A|^2+|B|^2+2R(A\bar{B})。\tag{9}$$

同样