信号分析

〔美〕A·帕波利斯 著

海洋出版社

内 容 提 要

本书从经典的傅里叶分析到数字计算机系统的模拟技术作了深入的讨论，是信号分析的理论著作。全书共分为十二章，分别介绍现代信号分析中的数字系统、快速傅里叶变换、z变换、系统模拟、递归滤波以及谱分析等最重要的新课题，汇编了有关感兴趣的带限函数、扁球函数、模糊度、不确定性原理、因式分解等专题，有较多的实例和丰富的习题，并附有答案。

本书供从事信号处理的研究和教学人员参考，也可作为有关专业研究生的教科书。

信 号 分 析

〔美〕A·帕波利斯 著

李启虎 孙允恭 宋健宁 译
徐为方 梁祖威

海洋出版社出版

（北京复兴门外海贸大楼）

山西省新华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1981年6月第一版 1981年6月第一次印刷

开本：787×1092 1/16 印张：$22\frac{3}{8}$

字数：550,000 印数：1—3,057

统一书号：13193·0067 定价：3.30元

译　者　序

信号分析理论是无线电工程及其它应用科学的一门基础理论，从事应用科学方面工作的科学工作者和工程技术人员都需要掌握这门理论。信号分析理论的内容十分广泛，从经典的傅里叶分析到近年来才发展起来的数字计算机系统模拟技术都是它所讨论的课题。

本书是美国纽约工学院教授A·帕波利斯的近作。作者在书中以统一的方法处理模拟和离散的线性系统。内容包括了现代信号分析中的一些最重要的课题：数字系统、快速傅里叶变换、z 变换、系统模拟、递归滤波以及谱估计等。同时，作者在书中汇集了散见于其它一些专著中的与信号分析有关的专题，如带限函数、扁球函数、模糊度、不确定性原理、因式分解问题等。全书结构紧凑，说理清楚，有较多的实例。

本书对于我国从事信息论、雷达、声纳、地震探测、天文学、生物工程、海洋地质、晶体结构等专业的科技人员有一定的参考价值，也可作为有关专业研究生的教科书。

本书作者从事信号处理方面的教学与研究工作多年，曾在宾夕法尼亚州立大学、斯坦福大学和西德达姆斯塔特大学执教。作者著作很多，重要著作有《傅里叶分析及其应用》、《随机变量及随机过程导论》、《系统、变换及其在光学中的应用》等。这些著作曾分别译成日、俄、意、波兰文等。作者曾于1980年初应邀来我国访问过。

本书翻译工作由五位同志合作完成，其中第一、四、五章由李启虎翻译，第二、三章由徐为方翻译，第六、十一、十二章和习题解答由梁祖威翻译，第七、八章由宋健宁翻译，第九、十章由孙允恭翻译。由于译者水平有限，难免有错误与不当之处，欢迎读者批评指正。

译　者

1980.3

序　言

从事教育工作的人一般都认为，为了使工科学生作好充分的准备，能够胜任未来的工作，他们不仅需要在本专业方面受到训练，而且也要在一些涉及面非常广泛的学科方面受到训练。信号分析就是这样一门既有丰富的理论而应用又十分广泛的学科，它可以应用于天文学、海洋学、结晶学、生物工程、天线设计、通信技术、系统理论、计算机科学以及其它许多领域。

在这一时兴的学科中，我选取了一些与傅里叶变换和线性系统有关的专题，力图作一简洁而清晰的介绍。本书就是这一尝试的结果。

书中多数结论都是从少数一些有明确定义的概念严格推导出来的，但是在有一些地方，我也只给出了粗略的证明，仅仅将结果与熟知的概念联系起来。这种为了叙述上的简明扼要而偶尔牺牲严格性的做法，即使在纯粹数学问题中也并不少见；例如，约当曲线定理总是被作为不证自明的事实而接受下来，而且避而不谈选择公理。

全书分为三个自成一体而又互相紧密联系的部分。各部分的难易程度相差不大，但繁简程度却视内容的重要性和新旧程度不同而有差异。在有些场合，我用了加括号的“从略”二字来表示该处的说明已经从简。

本书包括了一些应用课题，其中有一些是新的。不过，由于我首先是一名教师，所以我最关心的是如何尽可能透彻地讲清楚有普遍意义的概念，而不是每一专题的详细内容。

在撰写本书过程中，我曾与许多学生和同事作过长时间有益的讨论。在这里，我特别要向R.Haddad教授、A.E.Laemmel 教授和 D.C.Youla 教授表示感谢。加利福尼亚大学洛杉矶分校的 G.Temes 教授向我提出过许多建设性的意见，我也借此向他表示谢忱。

A·帕波利斯

目　　录

第一编 信号、系统和变换

在这一编，我们要叙述连续系统和离散系统理论以及傅里叶变换和 z 变换，重点是离散-连续形式的对照关系以及数字滤波器在模拟信号处理中的作用。

我们把一个系统定义为从一个集合 F（输入）到另一个集合 G（输出）的映象。如果 F 和 G 的元素是一个连续变量的函数，那么该系统就是连续的或者说是模拟的；如果 F 和 G 的元素是数的序列，那么该系统就是离散的或者说是数字的。傅里叶变换和 z 变换是作为这些系统的本征值（系统函数）而引入的。

这一编材料包括了纽约工业学院的研究生学习的初期阶段一学期课程的内容，所需要的基础知识是普通微积分和一些电路理论知识。

第一章 引 论

在这一章里，我们将扼要介绍离散系统和连续系统理论的基本概念。

在 1-1 节，我们要阐述线性的离散形式，建立线性系统的卷积和端点特性之间的等价关系，并引进作为系统函数的 z 变换[1)]。在 1-2 节中，对于连续系统和傅里叶变换[2)]的情况重复了这种讨论。在 1-3 节，我们解释模拟系统的数字模拟的原理。

这些内容在以后儿章中还将作比较详细的讨论。

1-1 离散信号和离散系统

符号 $f[n]$ 表示对所有整数n定义的实数的或复数的数列。数列 $f[n]$ 也叫作离散信号或数字信号，而标号 n 是离散时间。

下列特殊数列将经常用到（图 1-1）：

阶梯序列

$$U[n]=\begin{cases}1 & n\geqslant 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

δ 序列

$$\delta[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

我们要注意，当 $n=3$ 时 $\delta[n-3]=1$，当 $n\neq 3$ 时 $\delta[n-3]=0$。对于任何k，

$$\delta[n-k]=\begin{cases}1 & n=k\\ 0 & n\neq k\end{cases} \tag{1-1}$$

在上述式子中，我们把 n 理解为离散的时间，而 k 是一个常数参量。

从（1-1）式可以推出，任意一个序列 $f[n]$ 都可以写作 δ 序列的一个加权和式：

---

1) B.Gold and C.Rader, "Digital Processing of Signals," McGraw-Hill Book Company, New York, 1969.

2) L.E.Franks, "Signal Theory," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1969.

$$f[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f[k]\delta[n-k] \tag{1-2}$$

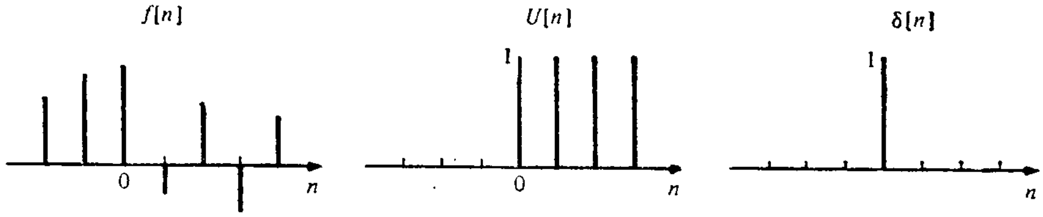


图 1-1

关于这一点请看图 1-2 。

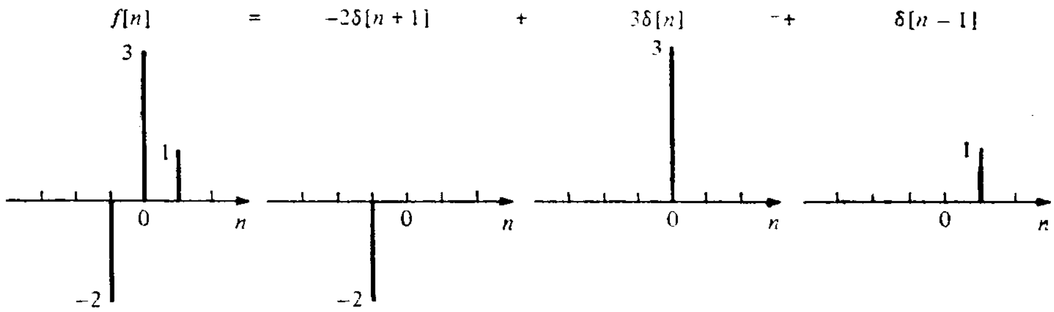


图 1-2

离散系统

一个离散系统可以按一定规则把一个序列 $f[n]$ 转换成另一个序列 $g[n]$，也就是说，离散系统是从序列 $f[n]$ 到序列 $g[n]$ 的一个映象（变换）。我们将采用符号

$$g[n]=L\{f[n]\}$$

来表示这种映象。序列 $f[n]$ 称为输入，序列 $g[n]$ 称为输出或响应（图1-3）。

一般说来，为了对特定的 n 确定输出 $g[n]$ 的值，我们必须知道所有的 n 的输入 $f[n]$，包括过去和将来的输入值。但是，正象我们在下面例子中会看到的那样，这并非总是必要的。

例1-1

(a) $g[n]=f^2[n]$。这个系统是非线性的，输出 $g[n]$ 的现在值仅依赖于 $f[n]$（无记忆系统）。

(b) $g[n]=nf[n]$。这是一个线性的、无记忆的时变系统。

(c) $g[n]=2f[n]+3f[n-1]$。$g[n]$ 的现在值依赖于 $f[n]$ 和它的前一个值 $f[n-1]$。这个系统有有限的记忆。

在例 1-1 的（非递归的）系统里，$g[n]$ 直接由 $f[n]$ 表示出来。

例1-2

$$g[n]+2g[n-1]=f[n]$$

在这个例子里，为了求得 $g[n]$，我们不仅要知道 $f[n]$，还要知道 $g[n-1]$。因此，$g[n]$ 是由解递归方程而得到的。事实上，我们有联立的无穷多个方程，每一个 n 有一个。我们将要证明，在某些条件下（因果律），这些方程有唯一的解，所以它们确定了一个（递归的）系统。

图 1-3

下面的简单系统特别有意义：

延时单元	乘数器
$g[n]=f[n-1]$	$g[n]=af[n]$

这两个系统将用图 1-4 中的方块图来表示。代表乘数器

的三角形中的字母 a 是乘数器的增益；代表延时单元的方块中的字母 z^{-1}（系统函数）的意义下面就要讨论到。

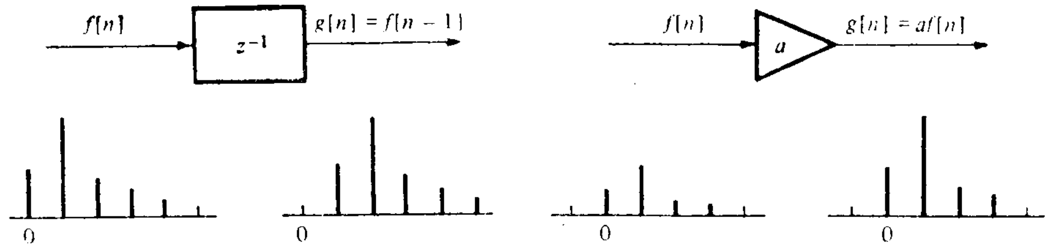


图 1-4

后面我们将要证明，一个任意的线性系统可以用延时单元和乘数器的一个组合来实现。作为一个例子，图 1-5 给出了系统 $g[n]=2f[n]+3f[n-1]$ 的实现。

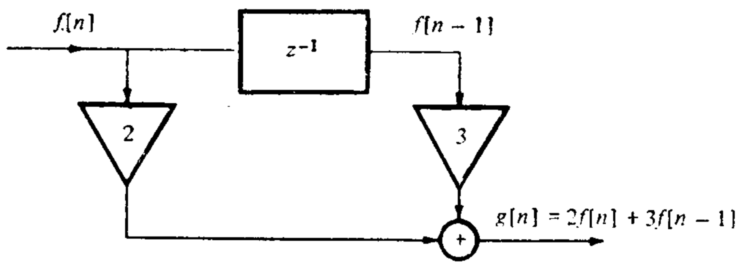


图 1-5

线性　一个系统 L 是线性的，如果对于任何 a_1，a_2，$f_1[n]$ 和 $f_2[n]$ 都有

$$L\{a_1f_1[n]+a_2f_2[n]\}=a_1L\{f_1[n]\}+a_2L\{f_2[n]\} \qquad (1\text{-}3)$$

根据这个定义，系统 L 对于 $af[n]$ 的响应是 $ag[n]$。其次，若 $g_1[n]$ 和 $g_2[n]$ 分别是 L 对于 $f_1[n]$ 和 $f_2[n]$ 的响应，那么 L 对于 $f_1[n]+f_2[n]$ 的响应等于 $g_1[n]+g_2[n]$。

非时变性　一个系统是非时变的，如果对任何 k 有

$$L\{f[n-k]\}=g[n-k] \qquad (1\text{-}4)$$

换句话说，输入的移位在输出产生一个相等的移位。

例1-3

(a) 系统 $g[n]=|f[n]|$ 是非线性的（试解释之），但却是非时变的。

(b) 系统 $g[n]=nf[n]$ 是线性的，但却是时变的，这是因为对 $f[n-k]$ 的响应是 $nf[n-k]$，而 $g[n-k]=(n-k)f[n-k]$。

(c) 系统 $g[n]=2f[n]+3f[n-1]$ 是线性的和非时变的。

在下面，凡称“线性系统”或简称“系统”的，指的都是线性的、非时变系统。

δ 响应　我们将用 $h[n]$ 来表示一个系统对 δ 序列 $\delta[n]$ 的响应（图1-6）：

$$L\{\delta[n]\}=h[n] \qquad (1\text{-}5)$$

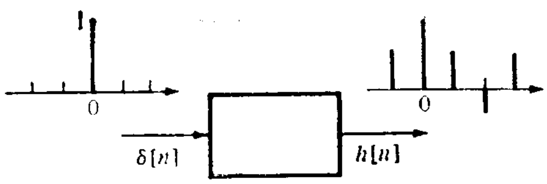


图 1-6

我们要注意，当 $n<0$ 时，序列 $h[n]$ 不一定是零。如果

$$h[n]=0 \quad 对 \quad n<0 \qquad (1\text{-}6)$$

我们就说这个系统是有因的*。

例1-4

$$g[n]=2f[n]+3f[n-1]$$

在这个例子中，$g[n]$直接由$f[n]$表示出来（非递归系统）。设$f[n]=\delta[n]$，我们就得到δ响应$h[n]$：

$$h[n]=2\delta[n]+3\delta[n-1]$$

例1-5

$$g[n]=f[n]+\frac{1}{2}f[n-1]+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^k f[n-k]+\cdots \tag{1-7}$$

类似于例 1-4，

$$h[n]=\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^k\delta[n-k]+\cdots=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^n & n\geqslant 0\\ 0 & n<0\end{cases}=\left(\frac{1}{2}\right)^n U[n]$$

例1-6　我们希望求出象

$$g[n]-\frac{1}{2}g[n-1]=f[n] \tag{1-8}$$

这样的有因系统的δ响应$h[n]$。

从（1-5）及（1-6）式得到

$$h[n]-\frac{1}{2}h[n-1]=\delta[n]\quad 对所有n,$$

$$h[n]=0\quad 对\ n<0$$

令 $n=0, 1, \cdots$，并注意到 $h[-1]=0$，我们得到

$n=0$：$h[0]=1$

$n=1$：$h[1]-\frac{1}{2}h[0]=0$，　$h[1]=\frac{1}{2}$

$n=2$：$h[2]-\frac{1}{2}h[1]=0$，　$h[2]=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

一般来说，当 $n>0$ 时，$h[n]=\frac{1}{2}h[n-1]$。通过简单的归纳法，我们就能得到

$$h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n U[n] \tag{1-9}$$

在第二章，我们将叙述一种确定 $h[n]$ 的更简便的方法。在图1-7中，我们给出了实现上述系统的方块图。

我们要注意，（1-7）和（1-8）式所表示的两个系统有相同的δ响应$h[n]$，所以它们是等价的。也就是说，它们对于相同的输入有相同的响应〔参看(1-11)式〕。(1-7)式的系统是非递归的，但是为了实现它，需要无穷多个延时单元。(1-8) 式的系统（递归的）仅用一个延时单元便可实现。

* “有因的”一词原文是“causal”，它表示系统符合因果律，也译作“表因的”。——译者

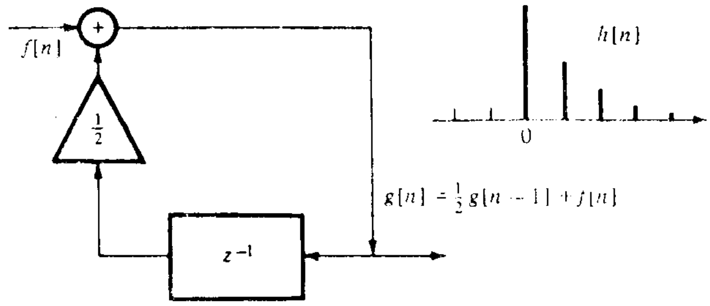


图 1-7

离散卷积 我们将把一个线性系统对任意输入 $f[n]$ 的响应 $g[n]$ 用 $h[n]$ 和 $f[n]$ 表示出来。

我们注意到，对任何k，系统对于 $\delta[n-k]$ 的响应等于$h[n-k]$（非时变性）：

$$L\{\delta[n-k]\}=h[n-k] \tag{1-10}$$

因此，对$f[k]\delta[n-k]$的响应等于$f[k]h[n-k]$（线性）。由上述式子及（1-2）式，得到

$$g[n]=L\{f[n]\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f[k]L\{\delta[n-k]\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f[k]h[n-k]$$

最后一个求和式是 $f[n]$ 和 $k[n]$ 的离散卷积，这种运算我们将用 $f[n]*h[n]$ 来表示。容易看出，它是可以交换的。于是我们得到一个重要的结论：

$$g[n]=f[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f[k]h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f[n-k]h[k] \tag{1-11}$$

例1-7

$$h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n U[n],\quad f[n]=U[n]-U[n-4]=\begin{cases}1 & 0\leqslant n<4\\ 0 & 其\ 它\end{cases}$$

对 $n=2$ 及 $n=5$，试求出

$$g[n]=f[n]*h[n]$$

为求出 $g[2]$，我们将 $f[k]$ 乘以 $h[2-k]$，并对所有 k 求和。从图 1-8(a) 可知

$$g[2]=f[2]h[0]+f[1]h[1]+f[0]h[2]=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

类似地，

$$g[5]=f[3]h[2]+f[2]h[3]+f[1]h[4]+f[0]h[5]=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

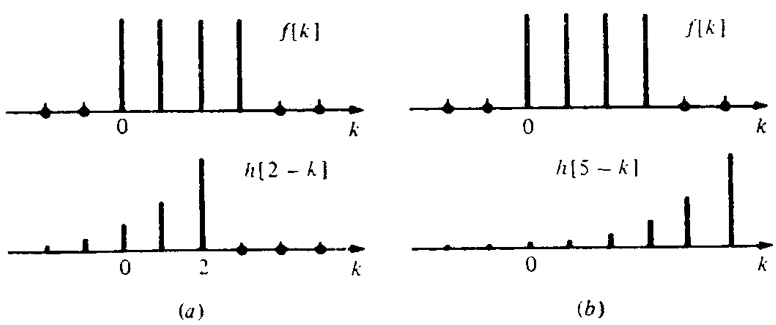


图 1-8

我们注意到，如果对于 $n<0$ 有 $h[n]=0$，那么

$$g[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} f[k]\,h[n-k]=\sum_{k=0}^{\infty} f[n-k]h[k] \tag{1-12}$$

另外，如果对于 $n<0$ 还有 $f[n]=0$，那么对于 $n<0$，$g[n]=0$；对于 $n\geqslant 0$，有

$$g[n]=\sum_{k=0}^{n} f[k]\,h[n-k]=\sum_{k=0}^{n} f[n-k]h[k] \tag{1-13}$$

特别是

$$g[0]=f[0]h[0],\quad g[1]=f[0]h[1]+f[1]h[0]$$
$$g[2]=f[0]h[2]+f[1]h[1]+f[2]h[0]$$

例1-8

$$f[n]=U[n]-U[n-3]=h[n]$$

求 $g[n]$。

容易看出，当 $n<0$ 和 $n>4$ 时，$g[n]=0$。

对于 $0\leqslant n\leqslant 2$：$g[n]=\sum_{k=0}^{n} 1\cdot 1=n+1$

对于 $2<n\leqslant 4$：$g[n]=\sum_{k=n-2}^{2} 1\cdot 1=5-n$

如图 1-9 所示。

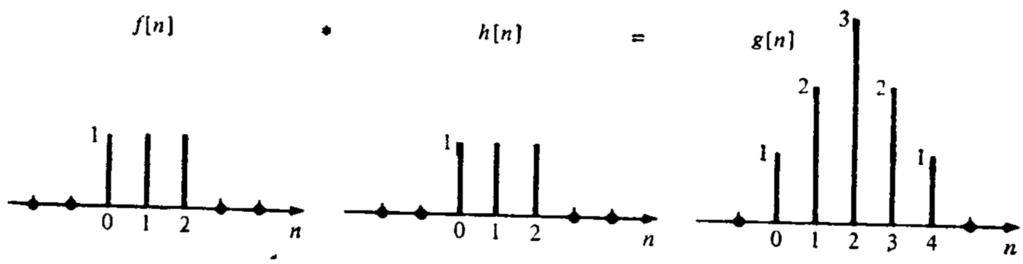


图 1-9

例1-9

$$f[n]=2^n,\quad h[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n U[n]$$

从（1-12）式得到

$$g[n]=\sum_{k=0}^{\infty} 2^{n-k}\left(\frac{1}{3}\right)^k=\frac{6}{5}\times 2^n$$

系统函数

假定一个线性系统的输入是一个几何级数：

$$f[n]=r^n$$

那么由（1-11）式可以知道，它的响应

$$g[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{n-k}\,h[k]=r^n\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]r^{-k} \tag{1-14}$$

也是一个几何级数，它的系数是序列 $h[n]$ 的 z 变换

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]z^{-n} \tag{1-15}$$

的值$H(r)$。

根据（1-14）式我们得出，对于任何实的或复的z，只要（1-15）式中的级数收敛，就有

$$L\{z^n\}=H(z)z^n \tag{1-16}$$

我们将称因子$H(z)$为系统函数，这个函数可以由(1-15)或(1-16)式确定。为了从（1-16）式求出$H(z)$，我们令输入为$f[n]=z^n$，响应$H(z)z^n$中z^n的系数就是$H(z)$。

对于延时单元，$H(z)=z^{-1}$。实际上，如果$f[n]=z^n$，那么$g[n]=f[n-1]=z^{n-1}=z^{-1}z^n$。

对于乘数器，$H(z)=a$。如果$f[n]=z^n$，则$g[n]=af[n]=az^n$。

例1-10 递归方程

$$6g[n]+5g[n-1]+g[n-2]=f[n]$$

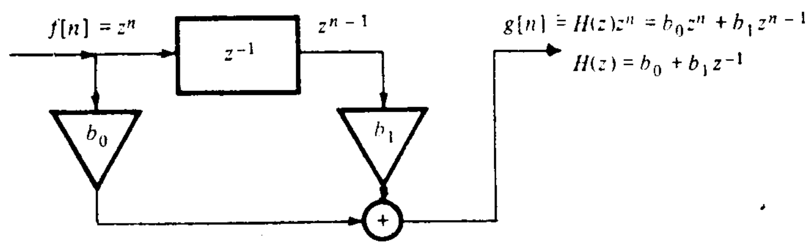
定义了一个输入为$f[n]$、输出为$g[n]$的系统。如果$f[n]=z^n$，则$g[n]=H(z)z^n$。代入上式，我们得到

$$6H(z)z^n+5H(z)z^{n-1}+H(z)z^{n-2}=z^n$$

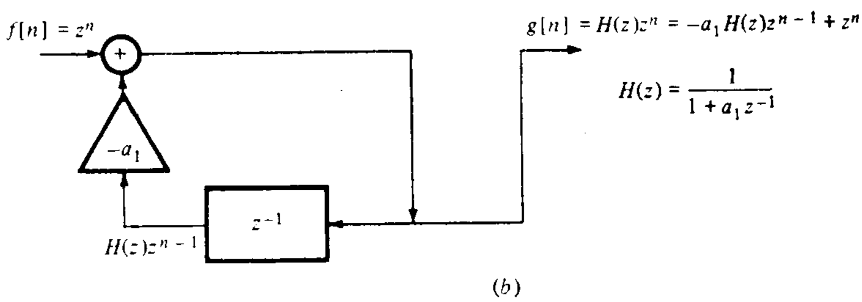
所以

$$H(z)=\frac{1}{6+5z^{-1}+z^{-2}}$$

在图1-10中，我们有四个由方块图所给定的系统，在(a)（非递归系统）中，$H(z)$可以直接由z^n的表示式求出。在(b)（递归系统）中，$H(z)$由解一个方程式求出。第三个例子是前面两个系统的组合（级联）。至于(d)，必须引进一个具有系统函数$H_1(z)$的辅助输出，并求解一个包含两个方程的方程组。系统(c)及(d)有同样的系统函数，因此它们最终是等价的。但是(c)包含两个延时单元，而(d)只包含一个。

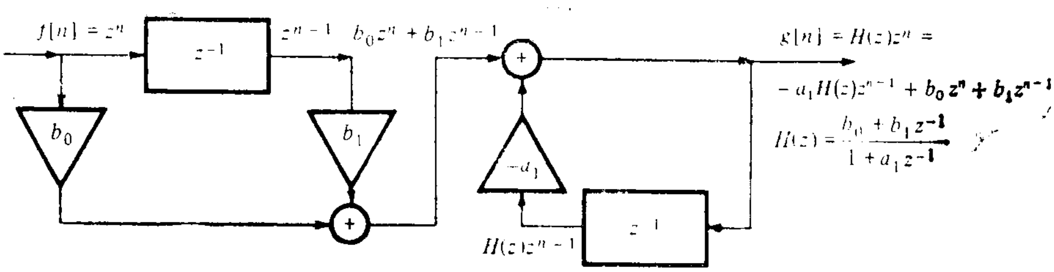


(a)

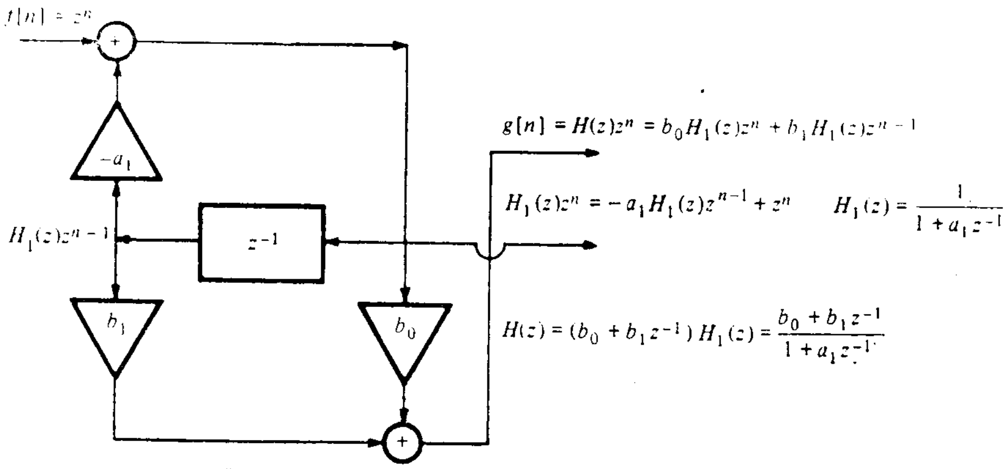


(b)

图 1-10



(c)



(d)

图 1-10

级联式系统 如果一个系统的输出是另一个系统的输入，那么这两个系统称为是级联的。用 $h[n]$和$H[z]$ 分别表示这样联接的系统的 δ 响应和系统函数，利用图1-11中的解释，有（从略）

$$h[n]=h_1[n]*h_2[n],\quad H(z)=H_1(z)H_2(z) \tag{1-17}$$

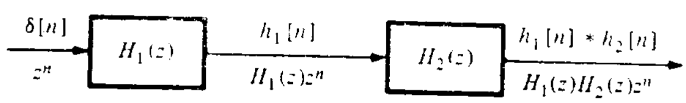


图 1-11

卷积定理 由定义，$H(z)$，$H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 分别是 $h[n]$，$h_1[n]$ 和 $h_2[n]$ 的 z 变换。因为 $h_1[n]$和$h_2[n]$是任意的，所以从（1-17）式得知，两个序列卷积的 z 变换等于它们的 z 变换的乘积。

这还导致这样的结论：如果

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f[n]z^{-n},\quad G(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}g[n]z^{-n}$$

是系统$H(z)$的输入$f[n]$和输出$g[n]$的 z 变换，那么

$$G(z)=F(z)H(z) \tag{1-18}$$

因为

$$g[n]=f[n]*h[n]$$

因此，我们有关于系统函数 $H(z)$ 的下述三个等价的定义：

1. $H(z)$是$h[n]$的 z 变换。

2. 如果$f[n]=z^n$，则$H(z)$是响应$g[n]=H(z)z^n$的系数。

3. $H(z)$等于比值$G(z)/F(z)$。

1-2 模拟信号和模拟系统

连续信号或模拟信号这个词指的是对所有实数 t 定义的实的或复的函数 $f(t)$。下列信号将经常用到（图1-12）：

阶跃函数　　符号函数　　矩形脉冲

$$U(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}\qquad \operatorname{sgn}t=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\end{cases}\qquad p_a(t)=\begin{cases}1 & |t|<a\\ 0 & |t|>a\end{cases}$$

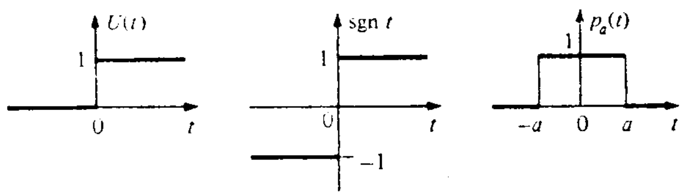


图 1-12

δ 函数$\delta(t)$　这个重要概念将在附录 3-C 中讨论。我们在这里只指出，$\delta(t)$ 可以看作是一族函数 $f_c(t)$的极限，这族函数对于任何在原点连续的函数 $\varphi(t)$ 都满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_c(t)dt=1,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}f_c(t)\varphi(t)dt\xrightarrow[c\to 0]{}\varphi(0) \tag{1-19}$$

关于 $\delta(t)$ 的这种解释引出恒等式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\varphi(t)dt=\varphi(0) \tag{1-20}$$

由这个关系式，$\delta(t)$ 的所有形式上的特性都可以推演出来。

模拟系统

一个模拟系统可以按一定规则把一个函数 $f(t)$ 转换成另一函数 $g(t)$，所以模拟系统就是把输入 $f(t)$ 映射成输出或响应$g(t)=L[f(t)]$的变换。

线性　一个系统 L 是线性的，如果对于任何a_1，a_2，$f_1(t)$和$f_2(t)$都有

$$L[a_1f_1(t)+a_2f_2(t)]=a_1L[f_1(t)]+a_2L[f_2(t)] \tag{1-21}$$

非时变性　一个系统 L 称为非时变的，如果对于任何实数 t_0有

$$L[f(t-t_0)]=g(t-t_0) \tag{1-22}$$

例1-11

(a) $g(t)=|f(t)|$（整流器）：非线性，非时变。

(b) $g(t)=t^2f(t)$：线性，时变。

(c) $g(t)=f(t-a)$（延迟线）：线性，非时变。

注： 如果一个系统是线性的并且 $f(t)\equiv 0$，那么 $g(t)\equiv 0$；这是因为 $f(t)=2f(t)$，所以 $g(t)=2g(t)$。但是，如果只有当 $t\leqslant t_0$ 时 $f(t)=0$，我们不能得出 $g(t_0)=0$，因为$g(t_0)$依赖于$f(t)$的所有值（过去的和将来的值）。

因果性　如果对于 $t<0$，函数 $f(t)=0$，那么我们称这个函数是有因的。如果一个有因的输入产生一个有因的输出，我们就称这个系统是有因的。因此，有因的系统有以下特性〔参看(1-22)式〕：

$$\text{如果对于 } t\leqslant t_0 \text{ 有 } f(t)=0\text{，则对于 } t\leqslant t_0 \text{ 有 } g(t)=0 \tag{1-23}$$

推论　如果一个系统是有因的，且对于 $t\leqslant t_0$ 有 $f_1(t)=f_2(t)$，则对于 $t\leqslant t_0$ 有 $g_1(t)=g_2(t)$。这是因为，对于 $f(t)=f_1(t)-f_2(t)$ 的响应等于 $g_1(t)-g_2(t)$，而当 $t\leqslant t_0$时$f(t)=0$。

如果 t 表示时间，那么一个实际系统总是有因的。然而，并不是一切实际系统都是有因的。比如，若 L 是一个光学系统，它的输入$f(x)$表示一个在$x\leqslant 0$左半平面，$f(x)=0$ 的物体，那么它的输出（象）在 $x\leqslant 0$ 却可能不是零。

真实性　如果系统对于实的输入$f(t)$的响应是一实函数 $g(t)$，那么我们称这个系统是实的。根据这个定义以及系统的线性，我们知道，如果$f_1(t)$和$f_2(t)$是两个实函数，且

$$L\{f_1(t)+jf_2(t)\}=g_1(t)+jg_2(t)$$

那么

$$g_1(t)=L\{f_1(t)\},\quad g_2(t)=L\{f_2(t)\} \tag{1-24}$$

微分方程　线性系统的一个重要的特殊情况，是一个具有零初始条件的常（系数）微分方程。比如，假定

$$g'(t)+\alpha g(t)=f(t) \tag{1-25}$$

如果这个方程对所有 t 都成立，而且，若 $t\leqslant t_0$时，$f(t)=0$ 就有$t\leqslant t_0$时，$g(t)=0$，那么它就定义了一个以$f(t)$为输入、$g(t)$为输出的线性有因系统。如果方程 (1-25) 仅对 $t\geqslant 0$ 成立，且 $g(0)=0$（零初始条件），那么，令 $t<0$ 时 $f(t)=0$，我们就可以假定它对所有 t 都成立。当 α 是实数时，这样定义的系统是实的。

在图1-13中，我们对单位面积函数 $f(t)$的两个特殊形式给出了 (1-25) 式的解：

$$f_1(t)=\frac{1}{c}[U(t)-U(t-0)],\quad g_1(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha c}(1-e^{-\alpha t}) & 0\leqslant t<c\\[2ex] \dfrac{1}{\alpha c}(e^{\alpha c}-1)e^{-\alpha t} & t>c\end{cases}$$

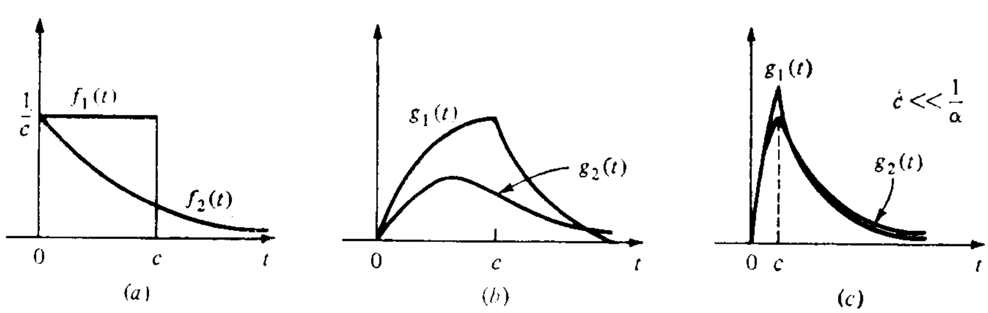


图 1-13

$$f_2(t)=\frac{1}{c}e^{-t/c}U(t),\quad g_2(t)=\frac{1}{1-\alpha c}(e^{-\alpha t}-e^{-t/c})\quad t>0$$

可以很有趣地看到，如果 c 很小，那么

$$g_1(t)\approx g_2(t)\approx e^{-\alpha t}U(t)\quad 当\ t\gg c$$

于是，对于这两个输入，当 $c\to 0$ 时，响应都趋于同样的极限值 $e^{-\alpha t}U(t)$。这一重要的事实导致了脉冲响应的概念。

脉冲响应 对任意一个线性系统 L，我们输入一个如（1-19）式中所给出的单位面积的序列

$$f_c(t)=\frac{1}{c}f_0\left(\frac{t}{c}\right)\tag{1-26}$$

所得到的响应 $g_c(t)$ 是一个依赖于系统 L、输入形式 $f_0(t)$ 和比例因子 c 的信号。能够证明〔参看(4-9)式〕，当 $c\to 0$ 时，$g_c(t)$ 趋于一个极限：

$$L[f_c(t)]=g_c(t)\to h(t)\quad c\to 0$$

这个极限 $h(t)$ 依赖于系统 L，但是与输入的形式无关，只要它的面积等于 1 。因为 $f_c(t)$ 趋于 $\delta(t)$〔参看(1-19)式〕，所以我们说 $h(t)$ 是系统 L 对 δ 函数 $\delta(t)$ 的响应：

$$h(t)=L[\delta(t)]\tag{1-27}$$

我们把函数 $h(t)$ 称作这个系统的脉冲响应。

由以上的叙述可以推断出，如果一个系统的输入是一个任意形式的信号，但是它的持续时间相对于 $h(t)$ 来说足够短[1]，那么所得到的响应近似等于 $Ah(t)$，这里 A 是 $f(t)$ 的面积。

如果 $f(t)$ 取不可忽略的值不是在靠近零点的地方，而是象图1-14所示那样靠近 t_0 点，那么（由非时变性）其近似响应等于 $Ah(t-t_0)$。

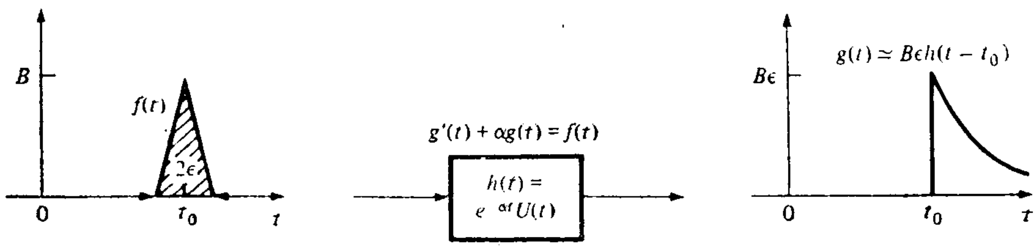


图 1-14

例1-12 方程 $g'(t)+\alpha g(t)=f(t)$ 定义了一个脉冲响应为 $e^{-\alpha t}U(t)$ 的线性、有因系统。若 $f(t)$ 是一个面积为 $A=B\varepsilon$ 的三角形（如图1-14），且 $\varepsilon\ll\frac{1}{\alpha}$，那么

$$g(t)\approx Ah(t-t_0)=B\varepsilon e^{-\alpha(t-t_0)}\quad t>t_0+\varepsilon$$

卷积 我们要证明，一个线性系统 L 对任意输入 $f(t)$ 的响应由下式给出：

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)d\tau\tag{1-28}$$

1）“$f(t)$ 的持续时间相对于 $h(t)$ 来说足够短”这句话，粗略的意思指的是 $f(t)$ 在 $|t|>\varepsilon$ 时可以忽略，而 $h(t)$ 在任何长为 2ε 的区间里近似为一个常数。