童忠钫 俞可龙 编著

浙江大学出版社

Zhen Dong

机械振动学

（随机振动）

机械振动学

（随机振动）

童忠钫　俞可龙　编著

浙江大学出版社

1992年·杭州

（浙）新登字10号

内容简介

本书共分六章，内容有随机过程理论、线性时不变系统的随机振动分析、随机响应的穿越率和峰值等的统计分析、非线性系统的随机振动分析、随机系统分析、非平稳随机振动。书中对许多定理的证明、重要公式的推导都有详细的叙述。

本书可作为工科有关专业研究生或高年级本科生的教科书或参考书，也可供有关工程技术人员和研究人员自学或参考。

机械振动学

（随机振动）

童忠钫 俞可龙编著

责任编辑 尤建忠

浙江大学出版社出版

德清第二印刷厂印刷

浙江省新华书店经销

开本850×1168 1/32 印张：14.75 字数357千

1992年9月第1版 1992年9月第1次印刷

印数：0001-3000

ISBN 7-308-00939-4

TH·031 定价：4.75元

前 言

随机振动是振动理论中研究不确定性振动现象的一个分支。它的理论和方法由于工程技术发展的需要，特别是尖端技术和高科技发展的需要，自本世纪六十年代以来有了很大的发展，其中线性系统的随机振动理论已臻于完备。由于它在工程上的应用日益广泛，在高等工科院校中已开始设置独立的课程向机械、运输、动力、建筑和海洋工程等类专业的研究生和本科高年级学生讲授随机振动的理论、方法和应用。本书是机械振动学丛书的组成篇，是作者根据1978年以来在机械类专业的研究生中讲授随机振动课的体会，在原编教材基础上经过多次修改写成的。

考虑到工科专业的研究生普遍地缺乏系统的和较深入的随机过程理论知识，本书用了相当多的篇幅系统地介绍学习随机振动理论和方法所必需的有关平稳随机过程、高斯随机过程、泊松过程、马尔可夫过程和随机过程模拟的基础知识。全书以线性随机振动即线性时不变系统的随机响应分析为基本内容，并扼要讲述研究和分析非线性随机振动、随机系统振动和非平稳随机振动的理论和方法，尽可能反映随机振动理论在这些方

DAGPSM

向的最新进展。

本书的编写考虑到课程主要以自学和课堂讨论相结合的方式进行教学，对诸如定理的证明、重要公式的推导以及学习的难点等给予了较详细的叙述，以便读者能在有限的课时内掌握和理解这些内容。

本书第一、四、五、六章由童忠钫编写，第二、三两章由俞可龙、童忠钫共同编写。在本书的编写和出版过程中，得到了有关各方的关心和支持；张士聪同志誊写了全部书稿；唐任仲同志审定了全书的插图。在此谨向他们表示衷心的感谢。

由于编著者水平所限，书中不妥和错误之处，敬请读者给予批评指正。

童忠钫　俞可龙

1991年10月于杭州

目　　录

第一章　随机过程概论

第二章 线性时不变系统的随机振动分析

第三章 随机响应的穿越率和峰值等的统计分析

第四章　非线性系统的随机振动分析

第五章　随机系统的分析

第六章　非平稳随机振动

第一章

随机过程概论

第一节　随机过程的基本概念

在客观世界中事物都在不断发展变化，这种变化作为一个过程来观察，可以概括地分成两类。

一类变化过程具有确定的形式，或者说有必然的变化规律。用数学语言来说，就是事物变化的过程可以用一个（或几个）时间 t 的确定的函数来描绘。这种过程称为确定性过程。很多大家熟知的物理现象和物理定律，如真空中的自由落体运动，加热时水的温度变化，电容器通过电阻放电时电容两端的电压变化，等等，都是确定性过程的例子。

另一类过程则没有确定的变化形式，没有必然的变化规律。亦就是说事物变化的过程不能用一个（或几个）时间 t 的确定的函数来加以描绘。或者说对事物变化的全过程进行一次观测得到的结果是一个时间 t 的函数，但对同一事物的变化过程独立地重复进行多次观察所得到的结果是不相同的。我们在此举几个例。

例1　漂浮在液面上的花粉或其他微粒，由于受到大量随机的、相互独立的液体分子的碰撞，碰撞的次数多到每秒10^{21}次，便不断地进行着无规则的运动。花粉或其他微粒的这种运动，称为布朗运动。若用$(x(t),\ y(t))$表示时刻 t 时花粉的位

置，则在相同条件下，进行多次观察后可以发现对于固定的 t，$(x(t), y(t))$是个二元随机变量。当变化 t 时，得到的是一族无限多个二元随机变量。

例2 在电气线路中的电阻，工作时由于其中自由电子的随机运动，导致电阻两端的电压有一个随机的起伏。这一起伏的电压称为热噪声电压。以$x(t)$表示这一电压，则从多次观察得到的记录可以看到，固定 t 后$x(t)$是一个随机变量，而变动 t 后，则是一族无限多个随机变量。

例3 若用$x(t)$表示某电话交换总机在时刻 t 以前已经接到的呼唤次数。很显然对每一固定的 t，$x(t)$是一个随机变量，t 变动后则是依赖于时间 t 的一族无限多个随机变量。

例4 考虑纺机纺出的长为 l 的棉纱条的横截面的直径，若用$A(x)$表示长等于x处的直径，则对固定的x，由于工作条件随时间变化而起伏不同，$A(x)$是一个随机变量。x 变动后则是依赖于纱条长 x 的一族无限多个随机变量。

上述各例所示的这类过程均可视为是一类依赖于一个变动参数的一族无穷多个随机变量。而这类依赖于一个变动参数的一族无穷多个、相互有关的随机变量就称为随机过程，记作$\{\xi(t), t\in T\}$，也可称它为随机函数，其中T为参数集。随机过程也常常记为$\{\xi(t)\}$，以示与确定性过程的区别。有时为方便起见，亦简单地记为$\xi(t)$。参数集T是一个无穷集合。最常见的有：

1） $T=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$

2） $T=\{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$

3） $T=[a, b]$

其中a，b可以是$\pm\infty$。当T可数时，称随机过程$\{\xi(t), t\in T\}$为随机序列。

我们知道对于多元随机变量，除了要研究其中每个随机变

量的性质外，还必须研究这些随机变量之间的关系。同样，在随机过程的研究中，不仅要研究其中每一个随机变量，而且还需要研究它们之间的关系。由于对随机过程来说，随机变量的数目变为无限，情况更要复杂得多，但仍然可以用分布函数完整地描述随机过程的统计规律性。

对于每一个固定的$t(t\in T)$，$\xi(t)$是一个随机变量，因此对任一固定的t，随机变量$\xi(t)$的分布函数

$$F_t(x)=P\{\xi(t)<x\} \tag{1-1}$$

应该是确定的。此外，为了描述随机过程$\{\xi(t),\ t\in T\}$中，无穷多个随机变量相互之间的关系，还要求确定对于任意指定的n及对应于T中任意的n个参数$t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n$的随机变量$\xi(t_1),\ \xi(t_2),\ \cdots,\ \xi(t_n)$的联合分布函数

$$\begin{aligned}&F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\\&=P\{\xi(t_1)<x_1,\ \xi(t_2)<x_2,\ \cdots,\ \xi(t_n)<x_n\}\end{aligned} \tag{1-2}$$

由于n及$t_1,\ t_2\cdots,\ t_n$都是任意的，因此得出的是一族无限多个分布函数，记为

$$\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\}$$

并称它为随机过程$(\xi(t),\ t\in T)$的有穷维分布函数族。这一族分布函数不仅刻画出了对应于每一个固定的t的随机变量$\xi(t)$的统计规律性，而且也刻画出了各个$\xi(t)$之间的相互关系。因此，随机过程的统计规律性可以用它的有穷维分布函数族完整地描述出来。

这种用有穷维分布函数族来刻画随机过程的统计特性的方法，也适用于T是一个多维欧几里德空间中的点集的情况。此时，只须将式(1-2)中的$t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n$理解为多维欧氏空间中的点即可。

实际的随机过程常通过多次观察来研究。每次实验观察得

到的结果是表示该随机现象的一个时间历程，称为样本函数。严格地讲，实际进行观察的时间区间总是有限的，这时得到的时间历程，则称为样本记录。随机现象可能产生的全部样本函数的集合（总体），即为随机过程。这是从另一个角度得出的关于随机过程的概念。图1-1所示为热噪声电压的样本记录，它们的集合 $\{v_k(t)\}$ 即表示一个随机过程。当 k 固定时，$v_k(t)$ 表示的是一次实验观察的结果，即为一个样本记录（样本函数）。当 t 固定时，$v_k(t)$ 表示的是一个随机变量。如果 k， t 均固定，则 $v_k(t)$ 表示的只是一个数。

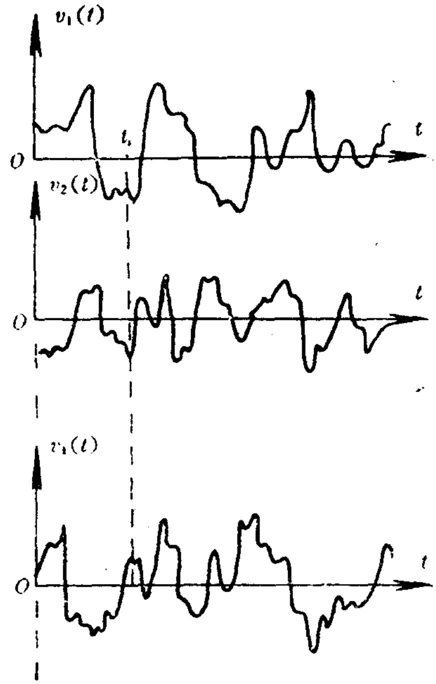

图1-1

第二节　平稳随机过程

一、定义及其数字特征

平稳过程是很重要和很基本的一类随机过程，在工程技术领域内有着广泛的应用。现考察第一章第一节的例 4，随着时间的推移，工作条件不断发生变化（原料的质量、机器性能、操作者的态度、温湿度的变化，等等）纺出的纱条的横截面直

径便会发生波动。但如工作条件基本稳定，没有剧烈的变化，则当我们同时观察 n 根纱ω_1，ω_2，…，ω_n，并以$A_x(\omega_i)$表示纱ω_i在 x 处的横截面的直径时，如果用$G_x(a)$来记在 x 处横截面直径不超过定数 a 的纱的根数与 n 的比，即

$$G_x(a)=\frac{\text{满足“}A_x(\omega_i)<a\text{”的}i\text{的个数}}{n}$$

那么，对充分大的 n，就会发现，对任意实数v

$$G_x(a)\approx G_{x+v}(a)$$

就是说，这个比值在不同的位置基本上是不变的，或者说，是稳定的。因此导出平稳过程的一般的定义如下：

设随机过程$\{\xi(t), -\infty<t<\infty\}$的一切有穷维分布函数$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，当点$t_1$，$t_2$，…，$t_n$沿时间轴作一平移时皆不改变，即对任何 n 及任意的t_1，t_2，…，t_n与τ，皆有

$$\begin{aligned}&F_{t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_n+\tau}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\\&=F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\end{aligned}\tag{1-3}$$

则称$\{\xi(t), -\infty<t<\infty\}$为平稳随机过程，或简称为平稳过程。

由以上定义直接可知，平稳过程的所有一维分布函数有$F_{t+\tau}(x)=F_t(x)$，而对于所有的二维分布函数，则$F_{t_1+\tau,t_2+\tau}(x_1, x_2)=F_{t_1,t_2}(x_1, x_2)$，这些关系表示，平稳过程的所有一维分布函数$F_t(x)$与 t 无关，而所有二维分布函数$F_{t_1,t_2}(x_1, x_2)$只与时间间隔t_1-t_2有关。粗略地讲，平稳过程就是一类统计特性不随时间的平移而变化（或者说不随时间原点的选取而变化）的随机过程。

在实际问题中，按照式(1-3)来判定一个随机过程的平稳性是很困难的。一般情况下，如果产生随机现象的一切主要条件基本上稳定，没有急剧的变化时，这种随机现象或过程可以认

为是平稳的。例如，在高度为 h 的水平面上飞行的飞机，由于受到大气湍流的影响，实际飞行高度$H(t)$在h水平面上下随机波动。因为飞机飞行时有很大的惯性，$H(t)$可看作是平稳过程，但论及的时间范围必须排除飞机的升降阶段(过渡阶段)，因为在升降阶段内飞行的主要条件明显地起了变化，$H(t)$在这时便成了非平稳的过程。随机过程的平稳性在实验记录上亦可得到反映，即平稳过程的所有样本记录曲线都在某一水平直线周围随机地波动。

严格地讲，要掌握随机过程的全部统计特性，就必须知道它的一切有穷维分布函数。但在实际问题中要确定随机过程的有穷维分布函数族并加以分析，往往比较困难，甚至是不可能的，而且从实际应用方面说也常常没有这样做的必要。在许多应用场合中，只要知道随机过程的某些数字特征就可以了。当然，这些数字特征应该既能刻画随机过程的重要特征，同时又便于进行运算和实际测量。因此，就导致了对随机过程数字特征的研究，它是随机过程理论的一个重要部分。

下面，我们来介绍随机过程的m阶矩。

如果对于任何非负整数n，m_1，m_2，…，m_n，$m=m_1+m_2+\cdots+m_n$及任意实数t_1，t_2，…，t_n，随机变量$(x(t_1)^{m_1}$，$x(t_2)^{m_2}$，…，$x(t_n)^{m_n})$的数学期望存在，也就是说，积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}dF_{t_1,\cdots,t_2,\cdots,t_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

绝对收敛，则称此积分为随机过程$(x(t),-\infty<t<\infty)$在点t_1，t_2，…，t_n上的一个m阶矩，并记之为$\mu_{m_1,m_2,\cdots,m_n}(t_1, t_2, \cdots, t_n)$，即

$$\mu_{m_1,m_2,\cdots,m_n}(t_1,t_2,\cdots,t_n) = E[x(t_1)^{m_1}\cdot x(t_2)^{m_2}\cdots x(t_n)^{m_n}]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n} dF_{t_1, t_2, \cdots, t_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (1\text{-}4)$$

其中，$m_1 + m_2 + \cdots + m_n = m$。

数字特征中最重要的是一阶矩和二阶矩，随机过程的相关理论就是研究仅与随机过程的一阶矩和二阶矩有关的性质的理论。一阶矩$\mu_1(t)$实际上就是随机过程$\{x(t)\}$的数学期望，它表示随机过程在各个时刻的分布集中位置或者摆动中心，如图1-2所示。按式(1-4)，有

$$\mu_1(t) = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_t(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_t(x) dx \quad (1\text{-}5)$$

对于平稳过程$F_{t+\tau}(x) = F_t(x)$，所以$\mu_1(t)$与t无关，为一常数，记为μ_1。在图上将以平行于时间轴的直线出现。

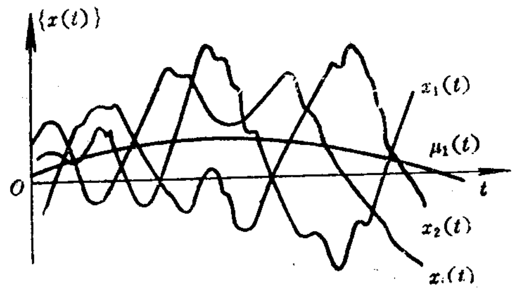

图1-2

对于二阶矩，有这样几种情况：

1)二阶原点矩，记作$\psi^2(t)$，即

$$\psi^2(t) = \mu_2(t) = E[x^2(t)] \quad (1\text{-}6)$$

它称为随机过程$\{x(t)\}$的均方值。

2)二阶中心矩，记作$\sigma^2(t)$，即

$$\sigma^2(t) = D[x(t)] = E\{[x(t) - \mu_1(t)]^2\} \quad (1\text{-}7)$$

它称为随机过程$\{x(t)\}$的方差。方差的平方根$\sigma(t)$称为随机过

程的均方差，它表示随机过程在各个时刻对于数学期望或者均值$\mu_1(t)$的偏离程度。

以上的数学期望和方差是刻画随机过程在各个时刻的统计特性的数字特征。为了揭示随机过程在任意两个不同时刻的状态之间的联系，可引入以下数字特征。

3）二阶原点混合矩，记为$R(t_1, t_2)$，按式(1-4)，有

$$R(t_1, t_2) = \mu_{1,1}(t_1, t_2) = E[x(t_1) \cdot x(t_2)]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 dF_{t_1,t_2}(x_1, x_2)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{t_1,t_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \qquad (1\text{-}8)$$

它称为随机过程的自相关函数，或简称为相关函数。

4）二阶中心混合矩，记为$C(t_1, t_2)$或$\mathrm{Cov}(t_1, t_2)$，即

$$C(t_1, t_2) = E\{[x(t_1) - \mu_1(t_1)] \cdot [x(t_2) - \mu_1(t_2)]\} \qquad (1\text{-}9)$$

它称为随机过程$\{x(t)\}$的自协方差函数，简称为协方差函数。

自相关函数和自协方差函数刻画的是随机过程自身在任意两个不同时刻的状态之间的线性依从关系的数字特征。

由(1-5)～(1-9)式定义的数字特征之间有如下的关系：

$$\psi^2(t) = E[x^2(t)] = R(t, t) \qquad (1\text{-}10)$$
$$\sigma^2(t) = C(t, t) = R(t, t) - \mu_1^{\,2}(t) \qquad (1\text{-}11)$$
$$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - \mu_1(t_1)\mu_1(t_2) \qquad (1\text{-}12)$$

所以上述各数字特征中最主要的是数学期望和自相关函数。

一阶矩、二阶矩只能粗略地刻画过程的性质，远远不能决定有穷维分布函数族，也就是说仅仅研究一阶矩（数学期望）和二阶矩（自相关函数等）是不能代替对整个随机过程的研究的。虽然如此，由于它们确实刻画了随机过程的主要统计特性，在许多实际问题中，往往只需要过程的二阶矩性质（即能