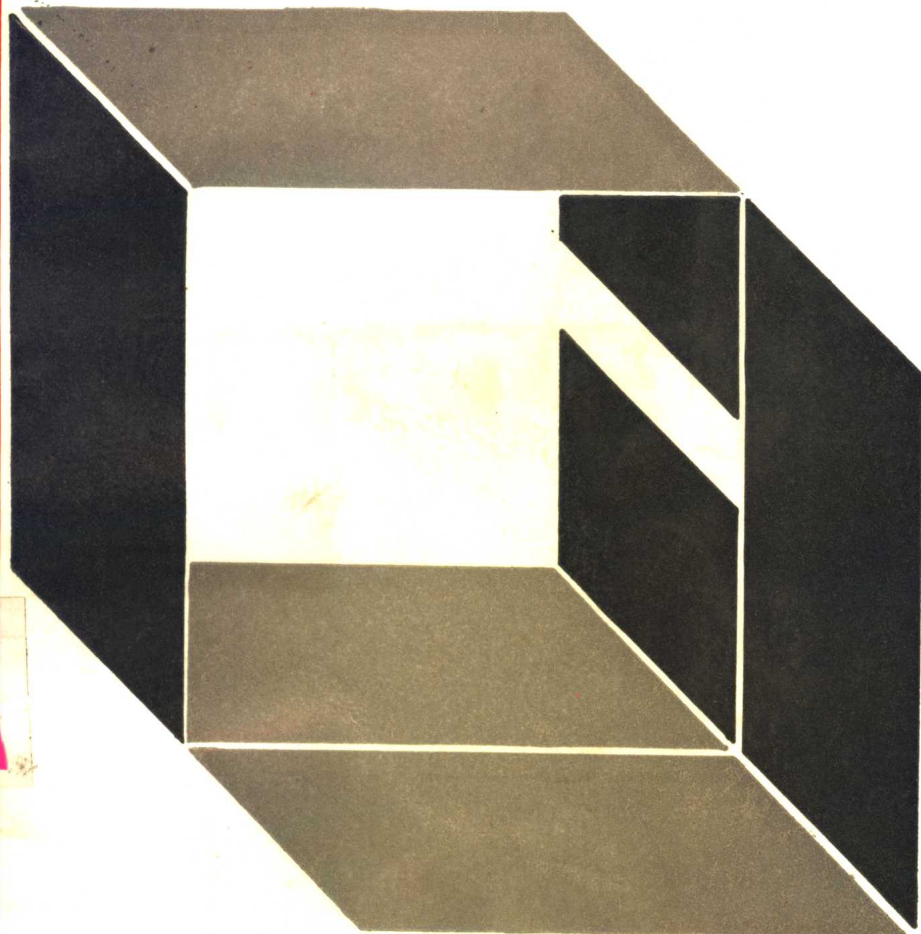


夹层壳非线性理论

刘人怀 朱金福 著



机械工业出版社

夹层壳非线性理论

刘人怀 朱金福 著

江苏工业学院图书馆
藏书章



机械工业出版社

(京) 新登字054号

本书系统地论述了夹层薄壳的非线性理论,其内容大多是作者自己的研究成果。

全书共有七章,内容分为两部分。前一部分,即前三章是根据“能量误差一致”原则和夹层壳的构造特点,建立了一致有效的夹层壳非线性理论。后一部分,即第四章至第七章是应用第一部分所建立的理论,分析夹层圆柱壳的非线性弯曲和稳定性问题。

本书适合力学以及宇航、航空、船舶制造和包装等工程的教学、科研、设计人员和研究生、本科高年级学生阅读。

夹层壳非线性理论

刘入怀、朱金福 著

责任编辑: 贡吉勤 版式设计: 冉晓华

封面设计: 易洪波 责任校对: 肖新民

责任印制: 路琳

*

机械工业出版社出版 (北京阜成门外百万庄南街一号)

(北京市书刊出版业营业许可出字第117号)

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 $850 \times 1168^{1/32}$ ·印张 $8^{1/4}$ ·字数 215 千字

1993年2月北京第1版·1993年2月北京第1次印刷

印数 00,001—1200·定价: 11.00元

*

ISBN 7-111-03342-6/O·79

前 言

夹层板壳是一类新型的结构元件，具有重量轻、强度高、刚性大等许多突出的优点，因而在近几十年中，愈来愈广泛地应用于宇航、航空、船舶制造、包装、军事等工程中。然而遗憾的是，迄今为止的国内外反映夹层板壳理论进展的论文与书籍，却由于研究的困难，大多限于线性理论范围，而关于它们的非线性理论的著述则是凤毛麟角。显然，这种状况远不能满足科学技术迅猛发展的需要。

作者从70年代开始研究夹层板壳的非线性理论，至今已获得一系列研究成果，同时还先后在中国科学技术大学和上海工业大学讲授包含夹层板壳非线性理论内容的《板壳非线性力学》课程。本书是在上述工作的基础上，将我们在夹层薄壳方向的研究成果进行系统整理，编写而成。

在本书出版之际，作者首先要对钱伟长教授的亲切关怀、指导和支持表示衷心的感谢。同时，还对周光泉教授的热情支持、赵志文副教授对手稿所提出的宝贵意见以及邓超讲师在绘图方面的协助一并表示感谢。

限于作者的水平，本书难免存在谬误，深望读者不吝指教。

刘人怀 朱金福

1991年3月24日

本书主要符号说明

$a_{\alpha\beta}$ 和 $b_{\alpha\beta}$	参考中面的度量张量分量和曲率张量分量
$\epsilon^{\alpha\beta}$	参考构形中的二维Eddington张量的逆变分量
$g_{\alpha\beta}$	参考构形中壳体空间的度量张量分量
$\bar{a}_{\alpha\beta}$ 和 $\bar{b}_{\alpha\beta}$	瞬时构形中“中面”的度量张量分量和曲率张量分量
$\bar{g}_{\alpha\beta}$	瞬时构形中壳体空间的度量张量分量
u_α	定义在参考构形中中面面内位移分量
w_δ 、 w_s 和 w	弯曲变形引起的挠度、横向剪切变形引起的挠度和总挠度
$e_{\alpha\beta}$	Green薄膜应变张量分量
$\chi_{\alpha\beta}$	壳体中面的曲率改变张量分量或叫弯曲应变张量分量
$\lambda_{\alpha\beta}$	横向剪切变形引起的附加弯曲应变张量分量
$D^{\alpha\beta\gamma\mu}$	正交各向异性夹层壳的抗弯刚度
$D_I^{\alpha\beta\gamma\mu}$	正交各向异性夹层壳表层自身的抗弯刚度
$E^{\alpha\beta\gamma\mu}$	正交各向异性夹层壳抗拉伸刚度
$\bar{E}$ 、 $\bar{D}$ 和 D_I	各向同性夹层壳的抗拉伸刚度、抗弯刚度和表层自身的抗弯刚度
E_I 和 ν_I	表层材料的弹性模量和泊松比
G_I 和 G_c	表层和夹芯的切变模量
$F_N^{\alpha\beta}$	薄膜内力张量分量
$M^{\alpha\beta}$	内力矩张量分量
F_Q^α	横向剪力分量
K_D	各向同性夹层壳的无量纲抗弯刚度参数
K_C	各向同性夹层壳的无量纲横向抗剪刚度参数
Z	夹层圆柱壳的Batdoff几何参数
n_x 、 n_y 和 n_{xy}	无量纲薄膜内力
F 和 f	内力函数和无量纲内力函数
λ_α	夹层圆柱壳的无量纲轴向外载
λ_ρ	夹层圆柱壳的无量纲侧压外载
λ_θ	夹层圆柱壳的无量纲扭转外载

β_a^c , β_p^c 和 β_s^c	分别是轴压、侧压和扭转屈曲周向波数
λ_a^c , λ_p^c 和 λ_s^c	分别是轴压、侧压和扭转屈曲的无量纲临界载荷
λ_1 和 λ_2	初始过屈曲载荷参数或叫过屈曲系数
ρ_1	几何缺陷影响系数
h	夹层壳的厚度
t 和 h_c	表层和夹芯的厚度
θ_1	无量纲小参数 $\theta_1 = G_c/G_f$
θ_2	无量纲小参数 $\theta_2 = t/h_c$
$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$	参考中面的二维Christoffel符号
R	夹层圆柱壳的参考中面的半径或一般壳体的最小曲率半径

12445-26

目 录

前言

本书主要符号说明

第一章 引论	1
§ 1-1 弹性薄壳理论	1
§ 1-2 夹层壳理论	5
§ 1-3 稳定性理论	6
第二章 计及横向剪切变形的壳体几何学和运动学	10
§ 2-1 引言	10
§ 2-2 未变形壳体几何学	11
§ 2-3 变形壳体几何学	20
§ 2-4 壳体的变形协调条件	28
§ 2-5 几何关系	33
§ 2-6 小应变中转动条件下的几何关系	45
第三章 夹层壳的大挠度理论	53
§ 3-1 引言	53
§ 3-2 小应变中/中转动的二阶近似理论	54
§ 3-3 小应变中/中转动的一阶近似理论	76
§ 3-4 小应变中/小转动的一阶近似理论	83
§ 3-5 夹层板的大挠度理论	90
§ 3-6 夹层圆柱壳的小应变中/中转动一阶近似理论的场方程	97
§ 3-7 小应变中/小转动一阶近似理论的物理分量场方程	103
第四章 夹层圆柱壳的基本方程和稳定性理论	107
§ 4-1 引言	107
§ 4-2 夹层圆柱壳大挠度理论的基本方程	108
§ 4-3 夹层圆柱壳的屈曲分析方程	119
§ 4-4 初始过屈曲理论	123
§ 4-5 夹层圆柱壳的初始缺陷分析	136

第五章 屈曲前夹层圆柱壳的轴对称变形和内力	148
§ 5-1 引言	148
§ 5-2 基本方程与边界条件	148
§ 5-3 均匀轴压和均布外压作用下夹层圆柱壳的轴对称变形	153
§ 5-4 位移、内力和内力矩	164
§ 5-5 夹层圆柱壳的扭转屈曲前变形与内力	170
第六章 夹层圆柱壳的轴压和外压屈曲问题	172
§ 6-1 引言	172
§ 6-2 基本方程和边界条件	172
§ 6-3 轴对称屈曲	175
§ 6-4 非轴对称分支屈曲问题	183
§ 6-5 对稳定性方程的初步分析	196
§ 6-6 稳定性方程的数值分析	202
第七章 扭转稳定性及缺陷敏感性	210
§ 7-1 引言	210
§ 7-2 基本方程和边界条件	210
§ 7-3 屈曲问题的解	212
§ 7-4 稳定性方程的数值分析	219
§ 7-5 初始过屈曲分析	224
§ 7-6 几何缺陷对扭转稳定性的影响	237
附录 有关函数的定义与性质	240
参考文献	244

第一章 引 论

所谓壳体是一种曲面薄壁结构，可用它承受或传递载荷。在我们周围有许多自然的和人造的壳体，如地壳、蛋壳、螺壳、飞机机身、船身、导弹壳、屋顶等。壳体的种类很多，根据壳体“中面”形状划分有：柱壳、旋转壳、扁壳和螺旋面壳等等；根据壳体的结构划分有：光壳、加筋壳、夹层壳和网壳等；根据壳体的材料划分有：各向异性壳、各向同性壳和复合材料层合壳等；根据壳体厚度与面内尺寸的相对大小划分有：薄壳、中厚壳和厚壳等等。本书的任务是研究夹层薄壳的一般非线性理论，以及用之于夹层圆柱壳的分析。为此，本书将要涉及到以下一些力学分支：①弹性薄壳理论；②夹层壳理论；③弹性结构的稳定性理论。这几方面的内容都是相当丰富的，本章将首先简单介绍这三方面的有关问题，以便为后续各章建立一定的基础。

§ 1-1 弹性薄壳理论

一般公认Love^[1, 2]最先奠定了经典薄壳理论的基础，尽管Aron^[3]在1874年就建立了扁壳方程。Love将Kirchhoff假设推广到壳体理论，从而系统地建立了薄壳的一般线性方程。这些方程都是壳体理论的经典方程，现在工程实际中还常引用。由于Love对壳体理论作出了突出贡献，故经典壳体理论的基本假设便叫做Kirchhoff-Love假设（简称K-L假设）。

1910年Von Kármán^[4]首先以内力函数和挠度为基本未知量，建立了平板的非线性偶合方程。Donnell^[5]引进了类似于Aron^[3]的近似假设，建立了圆柱壳的大挠度方程。Margu-
erre^[6]在稍晚一些的时候建立了扁壳的非线性方程。紧接着Von Kármán和钱学森^[7, 8]把壳体的非线性理论用于球壳和圆柱壳

的屈曲和过屈曲分析，得出了令人瞩目的结果。从此开始了壳体非线性理论和分析的研究。

但是那时候壳体的非线性理论还很不完善，缺乏系统的研究。钱伟长^[9]以张量分析为工具，首次在壳体理论中引进了拖带（或叫随体）坐标，并用壳体薄膜应变张量和“中面”曲率改变张量为基本未知量，系统地建立了壳体的平衡方程和协调条件。由于整个理论不涉及位移，因而叫做板壳的内禀理论。内禀理论对任意大的位移都是成立的（只要应变是小的）。钱伟长的这一工作对壳体理论产生了深远的影响。从此人们认识到张量分析和拖带坐标是研究壳体大挠度理论的强有力的工具，而用薄膜应变张量和曲率改变张量为基本未知量则可以建立任意大挠度的方程，并且可以对方程作系统的简化。

壳体的大挠度严格方程是相当复杂的，针对具体的问题进行合理的简化也是壳体理论的一个重要方面。钱伟长^[10, 11]在1944年就独树一帜地对他在参考文献^[9]中建立的严格壳体理论作了系统地简化。那以前已存在的各种壳体方程，都只是钱伟长方程的特殊情况。他首先将基本变量——薄膜应变张量和曲率改变张量以及“中面”几何参数看作是厚度小参数 ϵ 的函数，并将它们展成 ϵ 的幂级数。对不同类型的板壳问题，这些展开式的首项的 ϵ 幂次不同。根据这些展开式的首项的 ϵ 幂次的高低，钱伟长将平板和壳体理论分别分成了12类和35类，并且给出了各类板壳理论的方程。这些方程不但包括了当时存在的各种壳体方程，而且还给出了一些新的壳体方程。钱伟长的分类和简化方法，本质上是根据各类量的相对量阶大小进行分类和简化的方法，这是钱伟长对板壳理论作出的杰出贡献之一。

一个长期困惑板壳理论工作者的难题是K-L假设到底给板壳理论带来了多大误差。这个问题一直到1965年以后才得到初步解决，这当中John^[12, 13]、Koiter^[14~17]、Danielson^[18]、Budiansky^[19]、Koiter和Simmonds^[20]等作出了突出贡献。John^[12]应用泛函分析方法对壳体内部（远离边界的部分）应力

及其导数在不受切向载荷和法向突变载荷作用的条件下进行了精确的量阶估计。Koiter和Simmonds^[20]等根据John的结果提出了K-L假设的内禀误差估计问题,并得到了内禀误差界。他们指出:K-L假设的内禀误差与Love一阶近似理论的误差是一致的,进而形成了“能量误差一致”原则,用以指导壳体理论的建立与简化。参考文献[17~19]和[21~23]是这方面工作的典范。Sanders^[23, 24]在Koiter^[17]之前就得到了与Koiter相同的结果,但那时还缺乏有关的理论基础。现在Sanders-Koiter方程已为人们熟知,其线性形式还被Budiansky和Sanders^[25]称为是“最好”的理论,并被叫做Sanders-Budiansky方程。

用“能量误差一致”原则考察Love一阶近似方程,可以发现它不是一致有效的。这种不一致有效性早已被Reissner等^[26~29]所认识。

根据“能量误差一致”原则建立壳体的一致有效理论的基本方法是:在建立了严格的几何方程和本构方程后,根据能量误差界和John^[12]和Koiter^[16, 17]等的研究结果对其进行一致简化,然后用简化结果建立一致有效的能量泛函,再通过变分分析导出平衡方程和边界条件。从而建立完整的一致有效理论。用“能量误差一致”原则建立的一致有效理论在线性形式下的平衡方程与协调方程将具有静力—几何模拟关系,在非线性形式下可能不具备明显的静力—几何模拟关系,但从量阶上它们应具备静力—几何对应关系^[20]。

本世纪70年代后期,Pietraszkiewicz^[30~33]、Schmidt^[34]等用有限变形场论建立了壳体的有限转动变形理论,提出了根据转动的相对量阶把壳体的小应变大挠度理论分为小转动、中转动、大转动和有限转动等几类。这种分类和简化方法与钱伟长分类法^[10, 11]本质上是相似的。

在壳体理论的发展过程中,从60年代中期开始出现了两种令人瞩目的理论,一种是矢量内禀理论,一种是Cosserat曲面理论。对这两种理论的研究至今方兴未艾。矢量内禀理论的代表作有:

Reissner^[35, 36]、Simmonds和Danielson^[37]、Libai和Simmonds^[38, 39]和Axelrad等^[40~43]。这种壳体理论以薄膜应变矢量和“中面”曲率改变矢量为基本未知量，研究壳体理论的内禀表示。Cosserat曲面理论的代表有：Naghdi^[44, 45]、Green和Naghdi^[46~49]、Yamamoto^[50]、Crochet^[51~53]和Eriksen^[54]等等。这种理论以定义有方向子(director)矢量的二维物质流形作为壳体的模型，研究壳体的一般理论。方向子的运动代表了壳体在横向的变形(包括法向变形和横向剪切变形)，但这种理论急需试验数据的支持，否则材料常数只能从三维理论推导出来。

需要提一下的是陈至达^[55~56]长期以来一直坚持研究有限变形问题，系统地提出了他的位移梯度“和分解”理论，对板壳理论产生了一定的影响。前苏联的力学工作者也为壳体理论的发展作出了重要贡献，这里不再赘述，请参见Goldenweizer^[57]、Luré^[58]、Novozhilov^[59]、Mushtari和Galimov^[60]等的著作。

上面所述的各种壳体理论都是近似的。无论采用什么方法研究壳体理论都不可能是绝对精确的，即使是Cosserat曲面理论也是如此。因为壳体本质上是三维物体，只是由于壳体的横向尺寸相对其他两维很小，因而人们可以通过建立二维理论来近似研究它。研究壳体理论的目的是要建立这样一种近似的二维理论：①它尽可能简单，②它必须在允许误差的范围内足够精确地表达出壳体的主要特性。

对不同的问题可能用不同的壳体方程。学习壳体理论，要特别注意弄清各种壳体理论的适用范围。不能把某种壳体理论看作普遍正确而应用到它的适用范围以外去，也没有必要对简单的壳体问题采用复杂的壳体理论。因为此时简单的壳体理论已具有足够的精度，采用复杂的壳体理论不但增加了许多计算工作量，而且精度并不会增加。这些是学习壳体理论时必须建立的概念。

§ 1-2 夹 层 壳 理 论

由于约一个世纪的研究,各向同性均质单层薄壳理论已相当完善,从Dikman^[61]的近作可看到现代壳体理论的概貌。但夹层壳理论的研究工作相对较少。尽管关于夹层壳理论的研究在本世纪40年代末就已开始^[62],但由于夹层壳是由三层壳组合而成,且三层壳的材料性质和厚度可以各不相同,这便给统一研究造成了较大的困难。非线性理论的研究困难更大。

50年代前从事夹层壳理论工作的主要有 Reissner^[62]和 C-T Wang^[63]。

在参考文献[62]中, Reissner讨论了夹层壳的小挠度理论。该理论适用于表层同厚同质且很薄、夹芯很软的各向同性夹层壳。这种壳体是构造上最简单的夹层壳。针对这种夹层壳的结构特点, Reissner采用了如下假设

1) 表层是薄膜。

2) 夹芯是只承受横向剪切应力的三维连续介质。

在此假设的基础上, Reissner建立了平衡方程和余能表达式,然后用拉氏乘子法将平衡方程并入应力余能,由变分原理导出了本构关系,从而建立了完整的小挠度理论——Reissner理论。C-T Wang^[63]则采用Reissner方法,将 Reissner理论推广到大挠度问题,建立了夹层壳的大挠度理论。到1977年, Reissner^[64]受Cosserat曲面理论的影响,又重新考虑了他在参考文献[62]中的工作,在他的理论中引入了法向应变的影响,并作了一些改进和简化。

本世纪60年代后,人们开始研究更复杂的夹层壳。Schmidt^[65]考虑了表层自身抗弯刚度,即修正了Reissner的第一条假设,不是将表层看作薄膜,而是看成薄壳。Wempner^[66]推导了表层不等厚也非同质的夹层壳的中等大挠度理论。Reese和 Bert^[69]考虑了表层和夹芯皆为正交各向异性的夹层壳。Roman和 Kao^[70]则推导了夹芯是正交各向异性的夹层壳的非线性方程。

Rao^[71]以及王震鸣等^[72~75]进一步讨论了表层由多层复合材料构成的夹层壳理论。

虽然夹层壳理论有了一定的发展,但仍不成熟。主要表现为:①缺乏系统的理论研究和各种精度范围的理论。②缺乏用来研究夹芯抗弯刚度、横向抗剪刚度及表层自身抗弯刚度对夹层壳性能影响的方程。许多研究者假设夹芯很软,因而忽略了夹芯的抗弯刚度和抗拉伸刚度,但对因此而产生的误差胸中无数。实际工程结构中夹层壳的夹芯的“硬度”是千差万别的,研究夹心“硬度”对夹层壳力学性能的影响是十分必要的。

§ 1-3 稳定性理论

像薄壳这样的薄壁结构,人们除了关心它的位移和应力外,更关心它的稳定性。因为这类构件往往不是因为强度不足而发生破坏,而是在足够强度下屈曲,使构件的刚度大减,并导致灾难性的后果。这方面的实例可见参考文献^[76, 77]。正因为如此,稳定性问题一直很受重视。本世纪60年代和70年代期间掀起了稳定性分析热,至今不衰,文献之浩瀚不胜枚举。本书的参考文献只列了很少的但相当重要的一部分。

关于板壳结构的弹性稳定性研究,我们在这里要提到有突出影响的三大贡献:

第一,在本世纪30年代末以前,大多采用线性理论分析板壳结构的稳定性问题,但得到的载荷临界值一般都高于试验值。1939年和1941年Von Kármán和钱学森^[7, 8]先后发表了他们用非线性壳体理论对球壳外压和柱壳轴压作屈曲分析的结果。这个结果表明,薄壳的后屈曲路径可能存在一个最低点,该最低点的载荷值大大低于临界值。因此他们指出壳体的屈曲应该是一种非线性现象,同时提出用后屈曲路径的最低点对应的载荷值作为壳体的承载能力。Kármán和钱学森的这项划时代的研究工作将壳体稳定性的研究大大地向前推进了一步。接着,钱伟长^[78~80]使用能量法处理了更困难的问题,即在对称线布载荷作用下扁球

壳的稳定问题, 为推动壳体非线性稳定理论的发展作出了重大贡献。1965年叶开源和刘人怀^[81~83]提出了修正迭代法, 成功地求解了扁球壳的非线性稳定问题。此后, 刘人怀等^[84~92]又用此法解决了开顶扁球壳、双金属旋转扁壳和网状扁球壳的非线性稳定问题。

第二, 60年代初期, Stein^[93, 94]提出了他的非线性前屈曲一致理论, 在力学界又一次引起了很大反响。因为在那以前, 对壳体进行屈曲分析时通常忽略屈曲前变形的影响, 假设壳体处于薄膜状态。这样的假设使得分析大为简化了, 但边界条件往往不能满足(薄膜假设的不一致性)。这样会过高地估计载荷临界值。因此Stein提出, 对壳体的屈曲分析必须计及屈曲前变形的影响, 并且要考虑屈曲前变形的非线性的影响。这样边界条件可得到满足, 因此叫做前屈曲一致理论。用前屈曲一致理论分析壳体的屈曲, 可使临界载荷比经典临界值下降10%~20%。如果壳体试件的形状做得十分精确, 前屈曲一致分析的结果将与试验结果十分吻合。

第三, 1945年Koiter^[95]的博士学位论文对壳体稳定性理论作出了另一个划时代的贡献。在参考文献^[95]中, Koiter系统地提出了初始过屈曲分析和初始缺陷分析理论。指出初始缺陷的存在是薄壳实际临界载荷与理论值不符的主要原因, 而边界条件的影响对不是很短的壳来说是次要的。但是语言上的困难妨碍了Koiter理论的传播(Koiter是荷兰人)。直到1963年Koiter^[96]用英文向外界介绍了他的工作, 特别是他的博士论文被翻译成英文发表后^[95], 他的著名理论才被科学界所知晓, 并获得了广泛传播和进一步的发展。

值得指出的是, Donnell等^[97]在1950年也认识到了初始缺陷对壳体屈曲的影响。

除了Koiter本人曾多次发表文章介绍他的理论外^[96, 98, 99], Budiansky和Hutchinson^[100]以及Budiansky^[101]还从虚功原理出发, 用简洁易懂的方式改写了Koiter理

论; Danielson^[102]的文章是一篇Koiter理论很好的入门读物; Seide^[103]的文章则较详细地介绍了Koiter理论并作了某些发展。

Koiter的经典理论忽略了屈曲前变形的影响, 将屈曲前壳体看作处于薄膜状态, 并忽略边界条件的影响。这样做大大地简化了分析, 分析结果在许多情况下是有用的, 但在有些情况下可能产生不可忽视的误差。因此Fitch^[104]和Cohen^[105]分别独立地提出了考虑屈曲前变形影响的分析方法。这一方法在Budiansky^[105]的论文中得到了系统的阐述和发挥。

60年代后期, 随着初始后屈曲分析热的出现, Koiter理论被用于分析各种壳体在各种载荷条件下的稳定性问题^[104, 107~123]。就像Budiansky和Hutchinson^[124]所说的那样: “人人都爱做屈曲。”

Arbocz和Bobcock等对圆柱壳的初始缺陷进行了大量的测量和研究工作, 建立了缺陷数据库。Arbocz在参考文献^[125]中对这一工作作了详细的阐述, 在参考文献^[109, 126, 127]中也有论述。参考文献^[128, 129]对局部缺陷和随机缺陷的影响作了研究。关于这方面的工作还可参见Budiansky和Hutchinson^[124]以及Hutchinson和Koiter^[130, 131]写的综述文章。参考文献^[132~134]对当时的屈曲和过屈曲问题的研究现状作了阐述, 并指出了发展趋势。

Yamaki和Singer等专门对圆柱壳在各种基本载荷和各种边界条件下的稳定性问题进行了长期的理论和试验研究。Yamaki在他的专著^[135]中对他的研究成果系统地作了论述。

在我国, 周承倜^[136]等对Koiter的初始过屈曲理论和初始缺陷分析理论也开展了卓有成效的研究工作。

Esslinger和Geier的论著^[137]也是很好的过屈曲理论的参考书。这本书并不注重理论阐述, 而是通俗易懂地阐述各种挠性结构的过屈曲现象及其机理和一些试验结果。

在屈曲和初始过屈曲分析中, 多屈曲模态和多临界点十分接

近的问题是一个还未彻底解决的难题。Koiter^[99, 119]和Ho^[138, 139]在这方面作了许多有益的工作。Hui和Chen^[140]把Koiter在参考文献^[119]中提出的改进理论作了推广应用。

在连续介质系统的稳定性理论中, 稳定性判据是另一个没有彻底解决的问题^[141, 142]。多数问题中能量泛函的二次变分的正负号是可靠的判据。

与单层壳相比, 夹层壳稳定性的研究就远不够了。

夹层圆柱壳在各种载荷下的屈曲分析的早期工作见Eringen^[143]和C-T Wang^[144, 145]。稍后工作可见Reese、Bert^[69, 146]和Baker^[147]等。参考文献^[71, 148]则是较近的工作。Y-Y Yu^[149~151]在振动分析方面做了不少工作。

1964年前在夹层结构方面做的工作由Habip^[152]作了很好的综述。

本世纪60年代后期才开始对夹层壳作非线性分析和初始过屈曲分析^[148, 153~156]。Kan和Huang^[157]用摄动法求得了夹层矩形板的大挠度渐近解析解。刘人怀^[158~162]求得了夹层圆板大挠度问题的相当精确的解, 同时他还讨论了夹层矩形板的非线性弯曲和振动以及夹层扁球壳的非线性稳定问题^[163~165]。

中国科学院力学研究所的《夹层板壳的弯曲、稳定和振动》^[166]是论述夹层板壳的专著。这本书比较全面地总结了1977年前国内外在夹层板壳方面所做的研究工作。但该书在非线性分析方面的工作介绍很少, 事实上关于夹层壳非线性方面的工作至今仍不多见。本书的第一部分将为夹层壳建立一致有效的非线性理论, 后面部分将研究夹层圆柱壳的稳定性问题。