数理经济学方法

——线性和非线性规划、不动点理论

【美】·J. 富兰克林 著

俞建
顾悦 译

贵州人民出版社

数理经济学方法

（美）J·富兰克林著
俞 建 顾 悦译
贵州人民出版社出版、发行
（贵阳市延安中路5号）
贵州工学院印刷厂印刷
787×1092毫米16开本 15.5印张 347千字
1985年9月第1版 1985年9月第1次印刷
印数1——5,000册
书号17115·70 定价3.40元

内 容 简 介

本书是数理经济学的一本入门书。全书共分为三个部分：线性规划、非线性规划和不动点定理。书中以较高的观点，介绍了与经济应用领域有联系的某些问题，论证严格而流畅，还附有300多个习题。

本书对数学、应用数学、计算数学、管理科学和工程设计的理论工作者和实际工作者、教师、研究生和大专院校的学生，都具有较好的参考价值。

序　言

1924年，*Julius Springer* 公司出版了 *Richard Courant* 和 *David Hilbert* 的《数学物理方法》第一卷（有中译本——译者注）。*Courant* 在序言中写道：

从十七世纪以来，物理的直观，对于数学问题和方法是富有生命力的源泉。然而近年来的趋向和时尚，已将数学与物理学间的关系减弱了；数学家离开了数学的直观根源，而集中在推理精致和着重于数学的公设方面，甚至有时忽视数学与物理学以及其它科学领域的整体性。在许多情况下，物理学家也不再理会数学家的观点。这种分裂，无疑对于整个科学是一个严重的威胁；科学发展的洪流，可能逐渐分裂成为细小而又细小的溪渠，以至乾涸。因此，有必要引导我们把努力转向于阐明许多有特点的各式各样的科学事实的共同点及其相互关联，以重新统一这种分离的趋向。只有这样，才可以使学者们掌握这些材料，从而为研究工作更进一步的有机发展准备下基础。

本书就是针对这个目的为供学习数学物理而作的，…作者并未企图作得完备，只是希望本书可以使读者接近一个丰富而重要的领域。

当我还是一个学生时，*Courant* 和 *Hilbert* 的书就是我的圣经。即使再用许多年，我也写不出这样一本书，它能与 *Courant* 在 *Hilbert* 讲授的激励下写出的这本书相比。但若模仿是称赞的最直率方式的话，那么对于模仿 *Courant-Hilbert*，我是可以被原谅的。

本书涉及经济学就像 *Courant-Hilbert* 涉及物理学一样。*Courant-Hilbert* 的书不是关于物理学的，本书也不是关于经济学的；两本书都是关于数学的。每本书介绍了一些与一个应用领域有联系的课题；两本书的目的都不在于完备性。

虽然我希望一些经济学家能够阅读它，但本书主要是作为数学系学生的教本，它是为大学生和一年级研究生写的。线性规划部分能够很容易地对大学二年级的学生们讲授，本书的其余部分也不是很困难的。

当我还是一个学生时，流行着并没称为"较高观点的初等数学"的课程。这看来恰好是我所需要的反面。我所需要的是初等观点的较高数学的课程。

例如，我想理解 *Brouwer* 不动点定理。这意味着我要选取拓扑学的课程，这是相当困难和花费时间的。*Brouwer* 定理在我看来是被称为拓扑学的监护人看守的无价之宝。当我试图接近这一宝石时，监护人则向我发出怒火。真感到灰心。*Brouwer* 不动点定理的叙述是如此简单，为什么它的证明竟如此困难？我决不选取拓扑学的课程。

以后，在 *Courant* 研究所，我从事比博士级更高的研究工作。我听了 *Louis Nirenberg* 关于非线性偏微分方程的讲演。他使每一件事情都依赖于 *Leray* 和 *Schauder* 著名妙极了的定理。我渴望着学习它们。我首先需要知道的是什么呢？当然是 *Brouwer* 不动点定理。又一次，没有办法，被缠住了。

十年之后，我的同事 *Adriano Garsia* 把他对 *Brouwer* 定理的简单证明告诉了我。我将在本书中为你们给出它；它在这以前未曾发表过。我也为你们给出 *Milnor* 惊

人的证明，它发表在最近1978年的杂志上。相信 *Milnor* 的证明差不多是太容易的了。

你们在这里看到 *Schauder* 定理可能会感到意外，这不是要求你们的学生要有泛函分析的背景吗？

不会的。我给他们讲连续函数具最大模的 *Banach* 空间。这只需五分钟来解释；也许要十分钟。这作为泛函分析的开始是足够的。以后，如果他们要学习泛函分析的课程，他们将不难推广到他们要知道的一般 *Banach* 空间。*Schauder* 定理是科学中最伟大的成就之一。它是近代非线性分析的基本工具，正如在 *Browder* 和他的助手的工作中所看到的那样。如此重要的结果，如此有用的工具，对所有想具备起码基础的数学系学生将是合用的。

在这一序言中，我与你们，我的将讲授这一课程的同事们谈论。在本书的所有其余部分，我直接与学生们谈论，我力求写得清楚、直接和有趣味些。

Pasadena, California *Joel Franklin*

目　录

第一章　线性规划

1　线性规划引言

我第一次听到线性规划，大约是在1958年前后。我作为一个付教授，刚来到 *Caltech*。我与我的上司，*Caltech* 新计算中心的领导 *Gilbert McCann* 教授一起，来到纽约。为了弄清计算机的主要工业用途，我们正考察大工业的计算机装置。我们计划访问的公司之一是 *Mobil* 石油公司。

当我们到达 *Mobil* 时，一个秘书告诉我们说，我们可以与 *Albert Sokolov* 博士（这不是他的真名——作者注）会面。

我想：天哪！他不会是我纽约大学的老朋友 *Al Sokolov* 吧？*Al* 和我曾经是纽约大学 *Courant* 研究所中从事比博士级更高研究工作的伙伴。我记得他是一个文静的伙伴，具有乐观的性格和精深的数学知识。

稍等一会之后，另一个秘书来带 *McCann* 和我去 *Sokolov* 博士的办公室。这真是一个很长的路程。在到达 *Sokolov* 办公室之前我们穿过许多走廊和经过许多较小的办公室。

Sokolov 办公室似乎象 *Pasadena* 的体育场那样大小。远处一个大办公桌的后面，我们看见了 *Sokolov* 博士本人。在厚地毯上作了较长的步行之后，我们终于在他的办公桌前就座。他确是 *Al*。

"*Al*"我说，"你已在国际上出名了。"

"啊，没有的事，…实在没有"他说道。

腼腆的样子还同以前一样，不过处境不同了。在纽约大学，*Al* 和我曾经在没有空调、满是灰尘的小办公室里工作。终究因为我们是学者，我们被预料将是清寒的。但是不知道什么缘故，*Al* 却没有应验这一预料。

在 *Mobil*，我们对计算机作了一次很好的畅谈。公司有一个巨大的新计算中心。我知道它一定价值数百万美元。它是值得的吗？我问他：

"*Al*，你们这里有一个巨大的装置，价值数百万美元。我知道石油公司有许多钱，但是无论是谁他们都不愿意浪费它。为收回你们在计算机上的投资，公司用了多久时间？"

他想了一会儿，显然进行了粗略的心算，然后他回答说：

"我们大约在两个星期内收回。"

"太令人惊奇了"我说道。"你们用这个计算机处理哪类问题？"

"主要是线性规划。"

Al 作了详细解释。应用线性规划，他们能够对生产作出最优决策，结果给公司带来很大的收益。这种决策过去是由付总经理作出的，作的不那么恰当。其它大石油公司正在做同样的工作；这对公司是很有利的。这对消费者也是有利的，因为产品的价格将有所降低。

以下我就来告诉你们什么是线性规划，并给你们举几个例子。

线性规划是关于线性不等式的。正如你们知道的那样，线性方程是一些象

$$3x_1-4x_2+9x_3=7$$

的式子，而线性不等式是一些象

$$3x_1-4x_2+9x_3\leqslant 7$$

的式子。线性代数是研究线性方程组的，而线性规划是研究线性不等式组的。

在实线性代数中，所有常数和未知数（变量）是实的——正的、负的或者零。方程的个数和未知数的个数是有限的。同样，在线性规划中，所有量是实的且整个系统是有限的。

线性规划比实线性代数更一般化。你们看到，任一实线性方程可以表示为两个线性不等式。例如方程 $x_1-2x_2=3$ 可以表示为两个不等式：$x_1-2x_2\leqslant 3$，$x_1-2x_2\geqslant 3$。

简单的考察表明了线性规划的重要性。你们已经知道线性代数是多么重要。没有人能够开出实线性代数的完全应用表。实线性代数是线性规划的一个特殊情形。但是反之是不对的：你们不能重新把线性不等式 $x_1-2x_2\leqslant 3$ 表示为线性方程组。

一个线性规划问题包括三个部分：

(i) 有限个未知数 $x_1,\cdots,x_n$ 的线性不等式或等式的一个有限集合；

(ii) 在上述未知数的子集——可能是它们的全部或者一个也没有——上的符号约束 $x_i\geqslant 0$；

(iii) 一个需要求其极小或者极大的线性函数。

满足前面两个条件的解 $x_1,\cdots,x_n$ 称为可行的；满足所有三个条件的解称为最优的。正如你们将看到的那样，仅仅前面两个条件通常有无穷多个可行解；但是三个条件一起一般只有一个最优解。

例 1 投资经营。在 1972 年，*Alfred Broaddus* 为 *Richmond* 联邦储备银行的每月评论写了一篇文章。它题为线性规划：银行有价证券经营的一个新方法。

Broaddus 需要对银行家们讲述线性规划。在 1960 年，银行家信托公司为了帮助经营者作出他们的投资决策，曾经发展了一个复杂的线性规划模型。这个模型已经证实是有用的，因而其他的银行家们都很感兴趣。

为阐明概念，*Broaddus* 用了一个非常简单化的例子，现在我给你们介绍它。

假设银行有 100（百万美元）。这些钱中的一部分将作为贷款（L），而另一部分将作为证券（S）。贷款赚得高利息。证券赚得低利息，但它们具有流通的方便：在任何时候，它们能够按市场价格出售。

在 *Broaddus* 的例子中，贷出的钱赚得 10%；投入证券的钱赚得 5%。令 L 和 S 是贷款和证券的钱。于是总盈利将是 $0.10L+0.05S$。银行要求在一定的约束条件下使这个总盈利为最大。

符号约束。我们应有

$$L\geqslant 0 \text{ 和 } S\geqslant 0 \tag{1}$$

总资金约束。假设对投资的可利用总量是 100（百万美元），我们必有

$$L+S\leqslant 100 \tag{2}$$

流动性约束。因为种种理由(如联邦信托公司的要求等等)，银行希望它的流动投资

资金至少保持在25%。这个意思是指$S \geqslant 0.25(L+S)$，或者

$$L-3S \leqslant 0 \tag{3}$$

贷款平衡约束。银行有确定的、决不使计划落空的大主顾。如果他们需要贷款，则他们一定能够得到它。银行估计它的主要的大主顾需要贷款为30（百万美元），因而必有：

$$L \geqslant 30 \tag{4}$$

这些全是约束。如果L和S满足所有四个约束，则L和S组成一个可行有价证券组。如果L和S是可行的，且

$$0.10L+0.05S=\text{maximum} \tag{5}$$

则L和S组成一个最优有价证券组。于是，一个最优有价证券组在约束条件下使总盈利为最大。

我们可以用作图来求解银行的问题。在L和S的笛卡儿坐标平面内，不等式$L \geqslant 0$表示右半平面；不等式$S \geqslant 0$表示上半平面。综合约束(1)表示这两个半平面的交，即第一象限。第二个约束（$L+S \leqslant 100$）表示在直线$L+S=100$下面的半平面。第三个约束（$L-3S \leqslant 0$）表示在直线$L-3S=0$上面的半平面。最后的约束（$L \geqslant 30$）表示直线$L=30$右面的半平面。

可行点（L，S）必须满足所有的约束。这意味着它们必须位于所有相应的半平面中。于是它们必须位于所有这些半平面的交中。这个交是图1中的三角形。这个三角形给出了可行解（L，S）。

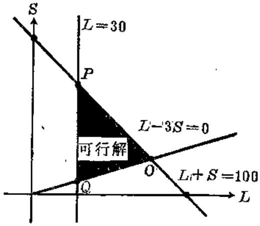

图 1

在三角形中哪个点是最优的呢？为找出它，我们画出常数盈利直线：

$$0.10L+0.05S=\text{常数}$$

这些即是直线$2L+S=$常数。在这些直线的每一条上所有的点（L，S）给出了相同的总盈利。这些直线都具有斜率-2，从而它们是相互平行的。

考察图1中的可行三角形。过顶点Q作具有斜率-2的直线；过顶点P和顶点O同样作斜率为-2的直线。这就给出了三条平行直线，在通过Q的直线上有最小的盈利，而在通过O的直线上有最大的盈利。三角形的其它点则有中间的盈利。点O是最优解。

作为检验，考虑顶点的笛卡儿坐标（L，S）：

$$Q=(30,\ 10),\quad P=(30,\ 70),\quad O=(75,\ 25)$$

总盈利（$0.10L+0.05S$）分别是

$$3.5<6.5<8.75$$

于是，最优有价证券$L=75$，$S=25$，且它产生的年盈利是8.75（百万美元）。

例2 饮食问题。在1945年，*George Stigler* 发表了一篇题为“生存的代价”的论文。这不是纯数学课题，它出现在农场经济的杂志中。它论述了世界食物供应的一个

基本经济问题：有营养的合理饮食的最小费用是什么？

假设我们将可用食物标为 1，2，…，n。每个人每天的饮食是各个分量 $x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$，…，$x_n\geqslant 0$ 的一个集合。于是，x_3 是每个人每天第三种食物的食量。

如果每克（或另外的单位）食物 j 的售价是 c_j，则分量 x_j 售价为 c_jx_j。饮食的全部费用是 $\sum c_jx_j$。我们希望使它达到最小。

一个合理的饮食至少必须提供每天所需的各种营养——热卡、多种维生素、蛋白质、脂肪、碘、粗纤维素、氨基酸、矿物质等等——的最小量。已知可用食物不同量地包含着所需的营养成分。

设 a_{ij} 是一克食物 j 中含有营养成分 i 的量，于是分量 x_j 包含了营养成分 i 的量是 $a_{ij}x_j$。由食物 x_1，…，x_n 提供营养 i 的总量是 $a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n$。

设 b_i 是营养成分 i 的最小日需要量（$i=1$，…，m）。于是一个合理的饮食 x 必须满足下列线性不等式：

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\geqslant b_i \ (i=1,\ \cdots,\ m) \tag{6}$$
$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0$$

在这些约束条件下，我们希望使费用最小：

$$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n=\text{minimum} \tag{7}$$

饮食问题是线性规划标准极小值问题的一个完整例子。在 1945 年，当 *Stigler* 的论文发表时，没有好的计算机算法来求解大型线性规划。当时也没有好的计算机。

线性规划是计算机时代的产物。在 1902 年，***Julius Farkas*** 曾经发表了一个理论结果，但是他从未梦想到他的结果会变得如此地重要，因为计算在当时是不可能实现的。*Farkas* 定理只是作为又一个纯数学的美妙珍品。然而以后出现了计算机——并用它得到了 *George Dantzig* 的单纯形法。单纯形法对线性规划的作用就如同高斯消去法对线性代数的作用一样：它给出了一种计算求解的方法。*Dantzig* 的方法出现于 1951 年，接着线性规划则迅速地形成。

例 3 运输问题。在这个例子中，未知数 x_{ij} 有两个下标。但是那没有关系；我们仍然是求满足线性不等式组和符号约束的有限个未知数。

假设不同地点——阿拉伯、委内瑞拉、墨西哥、阿拉斯加、…的某些工厂生产石油；s_i 是工厂 i 的石油供应量。又假设在某些市场——纽约、东京、伦敦、…需要石油；d_j 是市场 j 的需求量。我们假定整个供应量足够满足整个需求量：$\sum s_i\geqslant\sum d_j$。

设 c_{ij} 是每桶石油由工厂 i 运到市场 j 的费用，x_{ij} 是由工厂 i 运到市场 j 的桶数。于是整个运输费用是 $\sum\sum c_{ij}x_{ij}$。我们希望在供应量与需求量的约束条件下使总运输费用最小。

我们记工厂为 $i=1$，…，m，市场为 $j=1$，…，n。由工厂 i 输出的总量不能超过供应量 s_i：

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant s_i \qquad (i=1,\ \cdots,\ m)$$

输入市场 j 的总量必须至少满足需求量 d_j：

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\geqslant d_j \qquad (j=1,\ \cdots,\ n)$$

所有 $x_{ij}\geqslant 0$。我们希望使总运输费用最小：

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}=\text{minimum}$$

运输问题具有实用价值和理论上的重要性。不久，你们将知道如何求解它。

例 4 资源的最大利用。假设一个石油公司有各种粗制品（资源），供应量为 s_1，…，s_m。在炼油厂中，粗制品能够用于炼成各种精制品。公司能够以单位市价 p_1，…，p_n 出售这些精制品。问题是怎样利用这些粗制品来恰当地炼成各种精制品，使总售价最大。

假设一个单位的精制品 j 需要粗制品 i 的量为 a_{ij}。又假设我们要炼成精制品 j 的量为 x_j；于是 x_j 使用粗制品 i 的量为 $a_{ij}x_j$。对所有 $j=1$，…，n 求和，我们得到使用粗制品 i 的总量；它必须小于或等于可利用的供应量 s_i：

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\leqslant s_i\qquad(i=1,\ \cdots,\ m)$$

我们要求全部 $x_j\geqslant 0$，并要求使总售价为最大：

$$p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n=\text{maximum}$$

例 4 是线性规划的标准极大值问题。不久，你们将知道如何求解它——它比运输问题简单。

例 4 假设单位市价 p_j 与产量 x_j 无关。对于单独一个公司而言这是一个好的假定，但对整个国家的经济而言却是一个不好的假定。按照经济学家的观点，对微观经济是一个好的假定，对宏观经济就是一个不好的假定。例 4 是一个典型的线性经济模型。在整个应用数学中，原则上，线性模型适合于小的变化，而不适合于大的变化。线性规划对管理一个炼油厂是一个好的方法，但对管理一个国家却是一个不好的方法。

例 5 天文学和天体物理学是一本科学杂志的名称。1972 年在该杂志中，哈佛大学的天文学家 *S.M.Faber* 发表了一篇题为"二次规划应用于星系密度综合问题"的论文。理解它吗？

好啦，你们和我可以不懂天体物理学，但是我们能够懂得 *Faber* 博士的问题。她需要作最小二乘法计算。她必须取许多数据，且她需要在各种星系中找出星星的数目。

当她完成计算时，一些星系的密度出现了负数。坏了，星系密度决不会是负数。

因而她自问：如果我用未知数必须是非负的约束来作最小二乘法计算，不知会怎么样？

现在她的问题大致是这样：对于 $x_1\geqslant 0$，…，$x_n\geqslant 0$，使

$$\sum_{i=1}^{m}(a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n-b_i)^2=\text{minimum}$$

（这里 $m>n$；m 是数据的组数；n 是所研究星系的数目）。

如果没有符号约束（$x_j\geqslant 0$），*Faber* 的问题是一个经典最小二乘法的例子。高斯给出了解：

$$x=(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}b$$

但是与符号约束一起，问题便是一个二次规划的例子。

二次规划是非线性规划。你们没有指望二次规划问题能够用线性规划的单纯形法来

求解的权利。但是这个问题是可以这样做的；*Philip Wolfe* 指出了如何去做。

Wolfe 的文章发表在计量经济学杂志上。二次规划是作为数理经济学方法出现的，而现在它成了科学的工具。它迅速解决了 *Faber* 博士关于星系密度的问题。应用 *Wolfe* 的方法，计算大致象高斯的经典计算一样地快。

而且它们更一般化。我不给你们讲 *Faber* 问题的整个来历了。除了符号约束（$x_i \geqslant 0$）外，她还附加要求一组另外的约束，形如

$$\alpha_i \leqslant c_{i1}x_1 + \cdots + c_{in}x_n \leqslant \beta_i \qquad (i=1, \cdots, k)$$

不成问题，*Wolfe* 的方法也能够处理它。知道它是如此地容易，你们将大吃一惊。

一般地，线性规划已经显示了处理非线性问题的惊人能力。一个难以使人相信的例子是切比雪夫逼近问题。

例 6 切比雪夫逼近。*Edward Stiefel* 在关于数值分析的引论中，证明了线性规划能够用于求解这个问题：

给定一个超定线性方程组

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \qquad (i=1, \cdots, m)$$

我们有多于未知数的方程个数；所以不能期望精确地求解这些方程组。

不可避免地，将存在误差：

$$\varepsilon_i = b_i - (a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) \qquad (i=1, \cdots, m)$$

误差 ε_i 依赖于我们对数 x_j 的选取。我们定义最大绝对误差：

$$\mu \equiv \max(|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, \cdots, |\varepsilon_m|)$$

问题：选取 x_j 使作出的 μ 尽可能地小。

这个问题出现在许多领域中。在工程中，它正是你们所需要的安全计算。最坏的误差只是计算中的一种情形。那即是破坏桥梁或毁坏核反应堆的情形。在数值分析中，最坏的误差通常是子程序误差的最好度量。

切比雪夫逼近理论是很有名的；有许多存在与唯一性定理。但是没有一个能够给出怎样来求得解答。于是，在 1960 年前后，出现了 *Edward Stiefel*，他实际上说道：

注意，最大绝对误差 μ 满足

$$-\mu \leqslant \varepsilon_i \leqslant \mu \qquad (i=1, \cdots, m)$$

换句话说，μ 满足以下不等式

$$-\mu \leqslant b_i - a_{i1}x_1 - \cdots - a_{in}x_n \leqslant \mu \qquad (i=1, \cdots, m)$$

问题是选取 $x_1, \cdots, x_n$，使 μ 尽可能地小。

定义一个新未知数 $x_0 = \mu$，于是问题就变为：求数 $x_0, x_1, \cdots, x_n$，使满足线性不等式

$$\begin{aligned} x_0 + a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n &\geqslant b_i \\ x_0 - a_{i1}x_1 - \cdots - a_{in}x_n &\geqslant -b_i \end{aligned} \qquad (i=1, \cdots \ m)$$

且使

$$x_0 = \text{minimum}$$

这是线性规划问题；你们可以用单纯形法来求得解答。

好了，现在让我们来求解问题。

附录：向量，矩阵和线性代数

假定你们已有线性方程组的一些知识。这里我将不给你们讲授线性代数——它是值得单独开设的一门基础课程。反正对本书你们只需要一小部分的线性代数。现在我扼要地讲一下你们将需要知道的内容。

在本书中，所有数都是实的（正的、负的或者零）；我们不需要复数。实数有时被称为纯量。

向量 **x** 是一有限个实数 $x_1, \cdots, x_n$ 的有序集合。换句话说，**x** 是定义在整数 $i=1, \cdots, n$ 的有限集合上的实值函数（x_i）。数 x_i 称为 **x** 的分量。

如果 **x** 和 **y** 都有 n 个分量，则它们的内积

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

x 的欧氏长度是

$$|\mathbf{x}|=\sqrt{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})}=\sqrt{(x_1^2+\cdots+x_n^2)}$$

向量 **x**（用黑体字）可以用一个列向量 x（不用黑体字）或者用一个行向量 x^T 表示之。例如，如果 **x** 有两个分量 $x_1=7$ 和 $x_2=9$，则 **x** 可以用列向量

$$x=\begin{bmatrix}7\\9\end{bmatrix}$$

或用行向量 $x^T=[\,7\,,\;9\,]$表示。列向量是一个仅有一列的矩阵；行向量是一个仅有一行的矩阵。

一个 $m\times n$ 矩阵是数 a_{ij} 的一个矩形阵列，它有 m 行（$i=1, \cdots, m$）和 n 列（$j=1, \cdots, n$）。例如 $m=2$ 和 $n=3$，我们有矩阵

$$A=\begin{bmatrix}9 & -4 & 0\\ \sqrt{2} & \pi & 1\end{bmatrix}$$

这里 $a_{22}=\pi$，$a_{13}=0$。

这个矩阵的转置是

$$A^T=\begin{pmatrix}9 & \sqrt{2}\\ -4 & \pi\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

一般地，如果 $A=(a_{ij})$，则 $A^T=(b_{ij})$，其中 $b_{ji}=a_{ij}(i=1,\cdots,m;\;j=1,\cdots,n)$。

线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\qquad(i=1,\cdots,m)$$

可以用紧凑的形式 $Ax=b$ 表示，其中 A 是一个矩阵，x 和 b 是列向量。

如果 A 有元素 a_{ij}，则 λA 有元素 λa_{ij}。

如果 A 和 B 是两个 m 行和 n 列的矩阵，则 $A+B$ 是元素 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ 的矩阵。

如果 A 是一个 $p\times q$ 矩阵，B 是一个 $q\times r$ 矩阵，则 AB 是一个元素为

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{q}a_{ik}b_{kj}$$

的 $p\times r$ 矩阵。例如，如果 x^T 是 1×2 矩阵 [7，9]，则

$$x^Tx=(130)，但 xx^T=\begin{bmatrix}49 & 63\\ 63 & 81\end{bmatrix}$$

矩阵乘积是可结合的，但一般是不可交换的：

$$(XY)Z=X(YZ)，但（一般地），XY\neq YX$$

如果向量 $\mathbf{x}^1$，…，$\mathbf{x}^k$ 都有 n 个分量，则它们的线性组合

$$\mathbf{y}=c_1\mathbf{x}^1+\cdots+c_k\mathbf{x}^k$$

是一个分量为

$$y_i=\sum_{j=1}^{k}c_jx_i^{(j)}$$

的向量。例如，应用列向量表示，我们有

$$\begin{bmatrix}-5\\-1\end{bmatrix}=7\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$$

如果向量 $\mathbf{x}^1$，…$\mathbf{x}^k$ 中没有一个是其它向量的线性组合，则称为线性无关的。这意指仅当所有 $c_j=0$ 时

$$\sum_{j=1}^{k}c_j\mathbf{x}^j=0$$

具有 n 个分量的向量 $\mathbf{x}$ 构成实的 n 维向量空间 R^n。

R^n 的线性子空间是子集 L，它包含了所有它的点的线性组合。如果向量

$$\mathbf{b}^1，\cdots，\mathbf{b}^d$$

线性无关，且它们张成 L，即

$$L=\{\mathbf{y}:\mathbf{y}=c_1\mathbf{b}^1+\cdots+c_d\mathbf{b}^d\}$$

则称它们是 L 的一个基。

有定理证明 L 的每一个基都具有相同的向量个数，这个数 d 称为 L 的维数。如果 L 是 R^n 的一个线性子空间，则 L 的维数 d 满足 $0\leqslant d\leqslant n$。如果 L 只有唯一的向量 $\mathbf{x}=0$ 组成，则规定 $d=0$。

矩阵的秩。设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵。如果 A 有 r 个无关的列，但没有 $r+1$ 个无关的列，则我们称 A 的秩是 r，记为 $\operatorname{rank}A=r$。

有定理证明 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}A^T$。

如果 A 是一个 $n\times n$ 矩阵，则当且仅当 A 的 n 列无关($\operatorname{rank}A=n$)时，方程 $Ax=b$ 对于 R^n 中的每个 b 都有唯一的解 x。

如果 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，$b\in R^m$，则当且仅当 A 的秩在将向量 b 加入 A 中作为一个新列而不增加时，方程 $Ax=b$ 在 R^n 中有解 x。例如，方程

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}4\\8\end{bmatrix}$$

有解，因为

$$\text{rank}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}=\text{rank}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 6 & 8\end{bmatrix}$$

（两者秩均等于1）。

记号。对于线性规划，我采用列向量 x 和行向量 x^T。下标表示单个向量 x 的不同分量 x_i，但是上标表示不同的向量 x^i。

对于非线性规划和不动点定理，我用黑体字母 $\mathbf{x}$ 表示向量。于是 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 是一个向量的向量值函数，但是 $g(\mathbf{x})$（g 不用黑体字）表示一个向量的纯量值（实值）函数。

我用大写字母表示矩阵，同时对矩阵不用黑体字。

在 *Schauder* 定理的讨论中，黑体字向量符号 $\mathbf{x}$ 被用于表示 *Banach* 空间的点。对于空间的不同于实常数的点我用此法表示。例如，如果 $\mathbf{x}$ 代表余弦函数 $\cos t$ 和 $\mathbf{y}$ 代表正弦函数 $\sin t$，则 $a\mathbf{x}+b\mathbf{y}$ 表示某个形如

$$a\mathbf{x}+b\mathbf{y}=\sqrt{2}\cos t-8.9\sin t$$

的线性组合。这里很自然地把 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 设想为推广了的向量。

2 线性规划和它们的对偶

一个线性规划（或者线性规划问题）是这样的：第一，存在一组线性等式或不等式。第二，存在关于一些或者所有未知数的符号约束 $x_i\geqslant0$。第三，存在一个需要求其极小值或极大值的线性函数。

例1 给出下列方程：

$$\begin{aligned}x_1-2x_2+x_3&=4\\ -x_1+3x_2&=5\end{aligned}\qquad(1)$$

要求未知数满足符号约束

$$x_1\geqslant0,\qquad x_2\geqslant0,\qquad x_3\geqslant0\qquad(2)$$

满足条件（1）和（2）的向量 x 称为一个可行解。求一个满足

$$x_1+2x_2+3x_3=\text{minimum}\qquad(3)$$

的最优解 x。

这是一个典型极小值问题的例子，它是通常用计算机求解的线性规划的主要形式。一般地，一个典型极小值问题是下面这样的问题：

$$Ax=b$$

$$x\geqslant0\text{（意指所有分量 }x_i\geqslant0\text{）}$$

$$c^Tx=\text{minimum}$$

在我们的例子中，矩阵是

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -1 & 3 & 0\end{bmatrix}\qquad(4)$$

未知向量 x 是

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

已知的限定向量是

$$b=\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{6}$$

价值向量是

$$c^T=[1,\ 2,\ 3] \tag{7}$$

例 2 给出下列不等式：

$$\begin{aligned} y_1-y_2&\leqslant 1 \\ -2y_1+3y_2&\leqslant 2 \\ y_1&\leqslant 3 \end{aligned} \tag{8}$$

未知数 y_1，y_2 可以是任何实数——这里没有符号约束。满足不等式（8）的向量 y 称为一个可行解。求一个满足

$$4y_1+5y_2=\text{maximum} \tag{9}$$

的最优解 y。

这个规划看上去不同于第一个规划。在第一个规划中有等式（1）；这里有不等式（8）。在第一个规划中有符号约束；这里没有符号约束。第一个规划是一个极小值问题（3）；这个规划是一个极大值问题（9）。

我们可以用矩阵和向量来陈述这个问题。未知向量

$$y^T=[y_1,\ y_2] \tag{10}$$

不等式变为

$$y^TA\leqslant c^T \tag{8}$$

极大值条件是

$$y^Tb=\text{maximum} \tag{9}$$

恰巧，矩阵 A、向量 b 和 c^T 与前一例子相同；它们被（4）、（6）和（7）确定。但是这里它们以不同的方式出现。前面，A 被未知的 x 右乘；现在 A 被未知的行 y^T 左乘。前面，b 是一个限定向量；现在它是一个价值向量。前面，c 是一个价值向量；现在它是一个限定向量。

规划

$$y^TA\leqslant c^T,\ \ y^Tb=\max \tag{11}$$

称为规划

$$Ax=b,\ x\geqslant 0,\ c^Tx=\min \tag{12}$$

的对偶。你们以后将听到许多有关对偶和对偶性的原理。现在我不向你们作充分的论述；但是先给出一个结论。

两个最优值相等：

$$\text{原问题的 } \min\ c^Tx=\text{对偶的 } \max\ y^Tb \tag{13}$$

我们以后再来研究它。现在只讨论一些形式上的问题。

例 3 给出下列不等式：

$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3&\geqslant 4 \\ -x_1+3x_2\quad &\geqslant 5 \end{aligned} \tag{14}$$

符号约束

$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0,\quad x_3\geqslant 0 \tag{15}$$

求满足

$$x_1+2x_2+3x_3=\text{minimum} \tag{16}$$

的最优解。

这个例子与例 1 除了用不等式代替等式之外是相同的。利用例 1 的矩阵和向量，新规划具有形式：

$$Ax\geqslant b,\ x\geqslant 0,\ c^{T}x=\min \tag{17}$$

满足 $Ax\geqslant 0$，$x\geqslant 0$ 的向量 x 称为可行解；使 $c^{T}x$ 最小的可行解称为最优解。

（严格地讲，我们不应该说”最优解”，而只说“解”，因为线性规划问题本身就是一个最优化问题。但是较长的短语最优解是一个习惯用语，因此我们将沿用它）。

具有形式（17）的规划称为一个标准极小值问题。它的对偶有下列形式：

$$y^{T}A\leqslant c^{T},\ y\geqslant 0,\ y^{T}b=\max \tag{18}$$

除了符号约束 $y\geqslant 0$ 外，它与对偶（11）是相同的。

一般线性规划和它的对偶。原问题如下：我们有一定的不等式和等式约束：

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j&\geqslant b_i \qquad (i\in I_1) \\ &=b_i \qquad (i\in I_2) \end{aligned} \tag{19}$$

其中 I_1 和 I_2 是不相交的整数集合，它们的和是集合

$$I=I_1\cup I_2=\{1,\ 2,\ \cdots,\ m\} \tag{20}$$

我们有一定的符号约束

$$x_j\geqslant 0 \qquad (j\in J_1) \tag{21}$$

其中 J_1 是一个确定的指标子集

$$J_1\subset J=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\} \tag{22}$$

（如果 J_1 是空集，则不存在符号约束；如果 $J_1=J$，则所有的 $x_j\geqslant 0$）。一个可行解 x 满足（19）和（21）；一个最优解 x 是满足

$$\sum_{j=1}^{n}c_jx_j=\text{minimum} \tag{23}$$

的可行解。

相应的对偶问题是这样的：我们求一个分量为 $y_1,\ \cdots,\ y_m$ 的向量 y。满足

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m}y_ia_{ij}&\leqslant c_j \qquad (j\in J_1) \\ &=c_j \qquad (j\in J_2) \end{aligned} \tag{24}$$