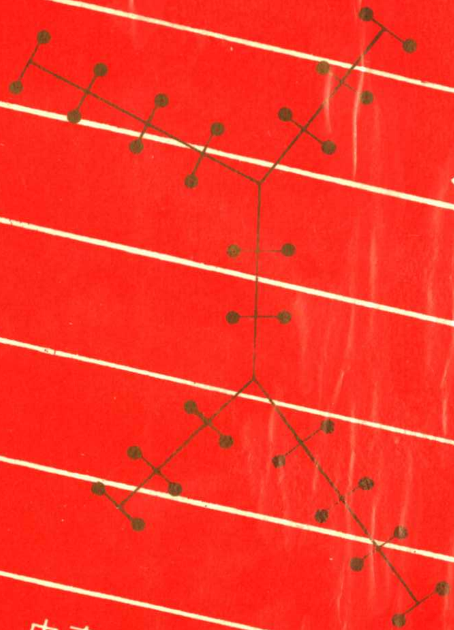
力学分析的高效计算法

力学分析的高效计算法

钟 掘 杨勇学 著



中南工业大学出版社

内 容 简 介

本书提出一种计算力学的高效算法，它以高效传递矩阵为核心，并可与有限单元法组合，在多种静、动力学问题的分析中，取得高精度、高效率的计算效果。

本书由三部分内容构成，第一部分阐明高效传递矩阵的原理及应用，第二部分讨论高效传递矩阵与有限单元的组合，第三部分提出一种力与位移同步求解法。

本书可供理工院校师生和从事数学、力学、机械、建筑等研究的工程技术人员阅读。

力学分析的高效计算法

钟 掘 杨勇学 著

责任编辑：周兴武

*

中南工业大学出版社出版发行

湖南省地质测绘印刷厂印装

湖 南 省 新 华 书 店 经 销

*

开本：787×1092/32 印张：5.125 字数：120 千字 插页1

1989年7月第1版 1989年7月第1次印刷

印数：0001—1500

*

ISBN 7-81020-238-3/O·037

定价：2.00元

序　言

结构的静、动力分析方法目前已有多种，但应用于大型、复杂构件仍有繁冗之感，本书贡献的高效计算方法，将获得高的计算精度和计算效率。

高效计算方法建立在传递矩阵运算的基础上，传递矩阵法用于结构的力学分析具有计算简单、内存少的优点，但是应用中存在计算精度与计算效率的矛盾，并且不能排除漏根的可能性。本书引用一个单调收敛迭代函数，使传递矩阵的收敛速度大幅度提高，并在基本解决漏根问题的基础上获得高的计算精度，由此形成一种新的传递矩阵高效计算法（EFFICIENCY TRANSFER MATRIX METHOD），简称为ETM法。

作者成功地将这种方法应用于结构的静、动力学分析，并且应用于有限单元分析中，从而将其中的高阶矩阵运算转换为低阶矩阵的简单运算，大幅度减少所需计算机内存。

本书由三部分组成，第一部分阐明传递矩阵高效计算法的原理、算法及程序，第二部份讨论ETM与有限单元法组合形成一种高效传递矩阵与有限单元法，简称为E-FETM法。第三部份提出一种力与位移同步传递的思想，运用ETM法，形成一种结构的力与位移同步求解法。

作者试图在力学计算方法上作一些新的探索，本书中的一些观点与方法是我们近几年在学术研究与科学实践中形成的，尚有待考核与发展，匆匆完成此著，不妥之处恳请批评指正。

作　者

一九八九年二月于长沙

目　录

传递矩阵高效计算法

对机械系统进行振动分析有诸多方法，其中传递矩阵法以方法简明，计算工作量小而著称。它的基本设计思路为：假定一系列频率值，根据机械系统一端的边界条件，由传递矩阵逐级推算出另一端的状态矢量值，若某一假定的频率值能满足两端的边界条件，该值即为系统的一个固有频率。全部计算过程只需对一些低阶传递矩阵进行连续的矩阵乘法运算和行列式计算，但是这种方法在实际应用中存在两个问题：

· 迭代步长不足够小时，计算结果可能丢根，得不到系统全部固有频率值。

·迭代步长过小，计算工作量急剧增加，机时极不经济。

问题的症结在于使用了一个固定的迭代步长，而此步长的选取又无规律可循。以致对计算结果带来了不可知误差，限制了传递矩阵法的广泛应用。

针对上述问题，本文提出一种传递矩阵高效计算法，其基本观点为：

· 引入一种可自动调节迭代步长的频率迭代函数，此迭代函数单调收敛于固有频率值，从而保证计算结果不丢根，并同时获得高的计算速度。

· 建立一种与上述迭代函数相适应的新型传递矩阵，使此传递矩阵内含更为丰富，并具有更好的运算适应性。

由此构成的计算方法，无论在计算精度或是计算速度上都表现出高效功能。

一、单调收敛迭代函数

1. 迭代函数的建立

设$\lambda^{(k)}$为所求某阶固有频率的平方值，将$\lambda^{(k)}$构成为一种函数，其参变量为前次迭代原函数的剩余函数及剩余函数的一、二阶导数，表示为：

$$\lambda^{(k)}=\lambda^{(k-1)}+\frac{\mathrm{abs}(R)}{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2-R\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\lambda^2}}} \tag{1}$$

其中：$\lambda^{(k-1)}$——前一次迭代值频率ω的平方；

$\lambda^{(k)}$——当前迭代值；

R——剩余函数；

$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\lambda}$、$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\lambda^2}$　剩余函数对λ的一次、二次导数。

式（1）中第二项即为迭代步长。

由（1）式确定的迭代函数具有两个特性：

- $\lambda^{(k)}$ 最终必收敛于所求的k阶固有频率，由此保证计算结果不遗失任何固有频率值。
- 计算过程的迭代步长可根据收敛情况自动调整大小，计算工作量因此大为减少。

迭代函数$\lambda^{(k)}$的引入，使传递矩阵的运算从方法到结果都产生本质的变化，根据此方法在计算中的高运算速度和计算结果的高精度，称之为传递矩阵高效计算法。

2. 迭代函数的收敛特性及证明

由于剩余函数R是系统固有频率λ_i（ω_i^2）（$i=1, 2, 3, \cdots, n$）的一个多项式，这个多项式可以表达为一个简单形式：

$$R=\prod_{i=1}^{n}(1-\lambda/\lambda_i) \tag{2}$$

则 $$\frac{dR}{d\lambda}=\sum_{j=1}^{n}\left(-\frac{1}{\lambda_j}\right)\prod_{i\neq j}(1-\lambda/\lambda_i) \tag{3}$$

$$\frac{d^2R}{d\lambda^2}=\frac{dR}{d\lambda}\sum_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)^{-1}-R\sum_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)^{-2} \tag{4}$$

由于

$$\left(\frac{|R(\lambda)|}{\sqrt{\left(\frac{dR}{d\lambda}\right)^2-R\frac{d^2R}{d\lambda^2}}}\right)^2=\frac{R^2}{\left(\frac{dR}{d\lambda}\right)^2-R\frac{d^2R}{d\lambda^2}}$$

$$=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)^{-2}}>0 \tag{5}$$

所以

$$\frac{|R|}{\sqrt{\left(\frac{dR}{d\lambda}\right)^2-R\frac{d^2R}{d\lambda^2}}}\text{一定非负} \tag{6}$$

假设$\lambda^{(0)}$是位于两个相邻的固有频率根值λ_k，λ_{k+1}之间的一个初始点，那末代入（1）式有迭代值为：

$$\lambda^{(1)}=\lambda^{(0)}+\left(\frac{|R|}{\sqrt{\left(\frac{dR}{d\lambda}\right)^2-R\frac{d^2R}{d\lambda^2}}}\right)_{(\lambda^{(0)})} \tag{7}$$

由于 $$\sum_{i=1}^{n}(\lambda^{(0)}-\lambda_i)^{-2}>(\lambda^{(0)}-\lambda_{k+1})^{-2} \tag{8}$$

两边同时开方，整理有：

$$\lambda_{k+1}-\lambda^{(0)} > \sqrt{\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\lambda^{(0)}-\lambda_{i}\right)^{-2}}} = \lambda^{(1)}-\lambda^{(0)} \tag{9}$$

得到：$\lambda^{(0)} < \lambda^{(1)} < \lambda_{k+1}$　　(10)

重复上述过程，可得

$$\lambda^{(0)} < \lambda^{(1)} < \lambda^{(2)} < \cdots\cdots < \lambda^{(r)} < \lambda_{k+1} \tag{11}$$

设$\lambda^{(r)}$的上限为μ，则$\mu \leqslant \lambda_{k+1}$，由上述收敛性表明：当$r \to \infty$时，$\lambda^{(r+1)}-\lambda^{(r)} \to 0$。

那末由

$$\lambda^{(r+1)} = \lambda^{(r)} + \left(\frac{|R|}{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\lambda}\right)^{2} - R\frac{\mathrm{d}^{2}R}{\mathrm{d}\lambda^{2}}}}\right)\left(\lambda^{(r)}\right)$$

可知：当$\lambda^{(r)} \to \mu$时，$\dfrac{|R|}{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\lambda}\right)^{2} - R\frac{\mathrm{d}^{2}R}{\mathrm{d}\lambda^{2}}}} \to 0$

如果$\lambda^{(r)} = \mu$，则$\dfrac{|R|}{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\lambda}\right)^{2} - R\frac{\mathrm{d}^{2}R}{\mathrm{d}\lambda^{2}}}} = 0$

所以$\mu = \lambda_{k+1}$，也就是讲$\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(r)}$收敛于下一根$\lambda_{k+1}$。

为了确定迭代式的收敛阶数，首先假定$\lambda^{(r)}$收敛于单一零点μ，即$R=0$，而R'，R''各阶导数在此点不为0，这样对于在μ的足够小邻域内有：

$$\lambda^{(r+1)} - \mu = \lambda^{(r)} - \mu + \frac{\mathrm{abs}(R)}{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\lambda}\right)^{2} - R\frac{\mathrm{d}^{2}R}{\mathrm{d}\lambda^{2}}}}$$

$$=\lambda^{(r)}-\mu+\{(\lambda^{(r)}-\mu)^{-2}+0(1)\}^{-\frac{1}{2}}$$
$$=(\lambda^{(r)}-\mu)[2+0(\lambda^{(r)}-\mu)^{2}]$$

即有 $e^{(r+1)}\sim 2e^{(r)}$ （12）

对单一零点根，迭代过程收敛于有放大系数2的下一根μ。

对于多重零点，设多重零点的阶数为p，有：

$$\lambda^{(r+1)}-\mu=\lambda^{(r)}-\mu+\{p(\lambda^{(r)}-\mu)^{-2}+0(1)\}^{-\frac{1}{2}}$$
$$=(\lambda^{(r)}-\mu)(1+p^{-\frac{1}{2}})+0(\lambda^{(r)}-\mu)$$

即 $e^{(r+1)}\sim(1+p^{-\frac{1}{2}})e^{(r)}$ （13）

可见，在可能有的各种情况下，该迭代式都具有单调收敛的特性，即在（λ_k，λ_{k+1}）（$k=1,\cdots,n-1$）间，从任何初始点开始，应用这一迭代公式，其迭代过程都将收敛于λ_{k+1}。

二、扩展型传递矩阵

1．扩展型传递矩阵的建立

用标准传递矩阵分析振动问题时，可表达为：

扭转振动 直线振动

$$\left.\begin{array}{l}
\text{状态矢量} Z_i=\begin{pmatrix}Q\\T\end{pmatrix}_i\\[2ex]
\text{点矩阵} P_i=\begin{pmatrix}1&0\\-\omega^2 I&I\end{pmatrix}_i\\[2ex]
\text{场矩阵} F_i=\begin{pmatrix}1&1/K\\0&0\end{pmatrix}_i
\end{array}\right\}(14)\quad
\left.\begin{array}{l}
Z_i=\begin{pmatrix}X\\F\end{pmatrix}_i\\[2ex]
P_i=\begin{pmatrix}1&0\\-\omega^2 M&1\end{pmatrix}_i\\[2ex]
F_i=\begin{pmatrix}1&1/K\\0&1\end{pmatrix}_i
\end{array}\right\}(15)$$

对系统第i个惯性元件有：

$$Z_i^L = F_{i-1} Z_{i-1}^R; \qquad Z_i^R = P_i Z_i^L \tag{16}$$

为适应上述迭代函数计算的需要，引入一种新型传递矩阵：

对（16）式求$\omega^2(\lambda)$的一阶、二阶导数

$$\dot{Z}_i^L = F_{i-1} \dot{Z}_{i-1}^R; \qquad \dot{Z}_i^R = \dot{P}_i Z_i^L + P_i \dot{Z}_i^L \tag{17}$$

$$\ddot{Z}_i^L = F_{i-1} \ddot{Z}_{i-1}^R; \qquad \ddot{Z}_i^R = 2\dot{P}_i \dot{Z}_i^L + P_i \ddot{Z}_i^L \tag{18}$$

将（16），（17），（18）组合即可得到新型传递矩阵

$$\left.\begin{aligned}
\begin{pmatrix} Z \\ \dot{Z} \\ \ddot{Z} \end{pmatrix}_i^L &= \begin{pmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}_{i-1} \begin{pmatrix} Z \\ \dot{Z} \\ \ddot{Z} \end{pmatrix}_{i-1}^R \\
\begin{pmatrix} Z \\ \dot{Z} \\ \ddot{Z} \end{pmatrix}_i^R &= \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ \dot{P} & P & 0 \\ 0 & 2\dot{P} & P \end{pmatrix}_i \begin{pmatrix} Z \\ \dot{Z} \\ \ddot{Z} \end{pmatrix}_i^L
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

（19）式即为所求的新型传递矩阵，它包含了更多的信息，具有更强的渗透力和计算适应性，又称为扩展型传递矩阵。

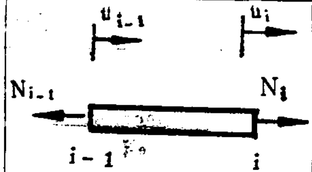
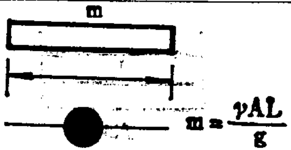
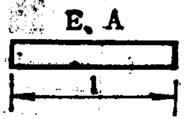
三、典型振动系统的扩展型传递矩阵

1. 杆的纵向振动（参见表1）

2. 杆的扭转振动（参见表2）

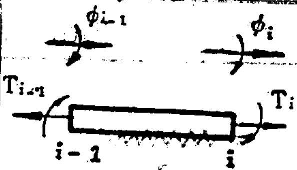
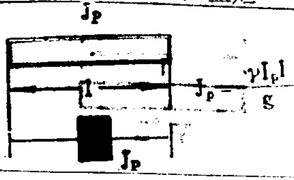
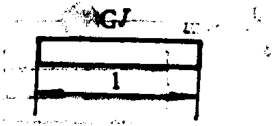
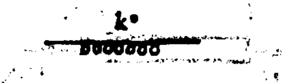
3. 梁和轴的弯曲振动（参见表3）

表 1

基　　本	 u: 位移, N: 力	标准传递矩阵 $Z=\begin{pmatrix} u \\ N \end{pmatrix}$ $Z_i=T_iZ_{i-1}$	新 型 传 递 矩 阵
集中质量		$T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -m\omega^2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} Z \\ \dot{Z} \\ \ddot{Z} \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} T & 0 & 0 \\ \dot{T} & T & 0 \\ 0 & 2\dot{T} & T \end{pmatrix}_i \begin{pmatrix} Z \\ \dot{Z} \\ \ddot{Z} \end{pmatrix}_{i-1}$
无质量杆		$T=\begin{pmatrix} 1 & 1/EA \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} Z \\ \dot{Z} \\ \ddot{Z} \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T \end{pmatrix}_i \begin{pmatrix} Z \\ \dot{Z} \\ \ddot{Z} \end{pmatrix}_{i-1}$
弹　　簧		$T=\begin{pmatrix} 1 & 1/k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} Z \\ \dot{Z} \\ \ddot{Z} \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T \end{pmatrix}_i \begin{pmatrix} Z \\ \dot{Z} \\ \ddot{Z} \end{pmatrix}_{i-1}$

* ——备注见P9。

表 2

		标准传递矩阵	新型传递矩阵
基　本	 ϕ：扭角，T：扭矩	$Z=\begin{bmatrix}\phi\\T\end{bmatrix}$ $Z_i=T_iZ_{i-1}$	
集中转动惯量*		$T=\begin{bmatrix}1 & 0\\-J_p\omega^2 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}Z\\\dot{Z}\\\ddot{Z}\end{bmatrix}_i=\begin{bmatrix}T & 0 & 0\\\dot{T} & T & 0\\0 & 2\dot{T} & T\end{bmatrix}_i\begin{bmatrix}Z\\\dot{Z}\\\ddot{Z}\end{bmatrix}_{i-1}$
无质量杆		$T=\begin{bmatrix}1 & 1/GJ\\0 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}Z\\\dot{Z}\\\ddot{Z}\end{bmatrix}_i=\begin{bmatrix}T & 0 & 0\\0 & T & 0\\0 & 0 & T\end{bmatrix}_i\begin{bmatrix}Z\\\dot{Z}\\\ddot{Z}\end{bmatrix}_{i-1}$
扭转弹簧		$T=\begin{bmatrix}1 & 1/k^*\\0 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}Z\\\dot{Z}\\\ddot{Z}\end{bmatrix}_i=\begin{bmatrix}T & 0 & 0\\0 & T & 0\\0 & 0 & T\end{bmatrix}_i\begin{bmatrix}Z\\\dot{Z}\\\ddot{Z}\end{bmatrix}_{i-1}$

*——备注见P9，

表1 备注：

A：截面积　　k：弹簧常数

E：纵向弹性模量　　l：杆长

g：重力加速度　　m：集中质量

r：比　重

ω：园频率

$\dot{Z}$、$\ddot{Z}$ 分别为状态矢量一、二阶导数

边界条件　$N=0$　自由　$u=0$　固定

表2 备注：

GJ：扭转刚度　　Jp：惯性矩

g：重力加速度　　k^*：扭转弹簧常数

Ip：截面二次极矩　　l：杆长

r：比重

ω：角频率

$\dot{Z}$、$\ddot{Z}$ 对λ的一阶、二阶导数

边界条件　$T=0$　自由　$\Phi=0$　固定

表3 备注：

A：截面积　　I_p：极惯性矩

E：纵向弹性模量　　k：线弹簧常数

G：横向弹性模量　　k'：扭转弹簧常数

g：重力加速度　　k^*：弹性铰链的弹簧常数

I：截面二次矩　　k_s：剪切刚度的形状系数

I_d：直径轴惯性矩

l：长度

m：质量

r：比重

ω：园频率

$\dot{Z}$、$\ddot{Z}$ 分别是对λ的一阶、二阶导数

四、典型系统的剩余函数式及迭代函数

应用扩展型传递矩阵可以得到不同系统，各种边界条件下的剩余函数式。

1．杆轴的纵向振动系统（参见表4）

2．杆轴的扭转振动系统

若将表4中的u，N相应换成φ、T，即得杆袖扭振系统的剩余函数式，且不同边界条件的迭代式形式也完全相同，在此不再赘述。

3．梁、轴的弯曲振动系统

利用（19）式新型传递矩阵，则弯曲振动系统可得到：

$$\begin{Bmatrix} Z \\ \dot{Z} \\ \ddot{Z} \end{Bmatrix}_n = \left[a_{ij} \right]_{12\times 12} \begin{Bmatrix} Z \\ \dot{Z} \\ \ddot{Z} \end{Bmatrix}_0 \qquad (20)$$

进行分块矩阵，有

$$\left.\begin{aligned} Z_n &= A_1 Z_0 + A_2 \dot{Z}_0 + A_3 \ddot{Z}_0 \\ \dot{Z}_n &= B_1 Z_0 + B_2 \dot{Z}_0 + B_3 \ddot{Z}_0 \\ \ddot{Z}_n &= C_1 Z_0 + C_2 \dot{Z}_0 + C_3 \ddot{Z}_0 \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

标准传递矩阵

$$Z_n = T Z_0 \qquad (22)$$

一阶导数

$$\dot{Z}_n = \dot{T} Z_0 + T \dot{Z}_0 \qquad (23)$$

二阶导数

$$\ddot{Z}_n = \ddot{T} Z_0 + 2\dot{T}\dot{Z}_0 + T\ddot{Z} \qquad (24)$$

设左端状态矢量：$\dot{Z}_0 = \ddot{Z}_0 = 0$

从而得到

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= T \\ B_1 &= \dot{T} \\ C_1 &= \ddot{T} \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

$$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{pmatrix} \qquad (26)$$

$$B_1=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dot{t}_{11} & \dot{t}_{12} & \dot{t}_{13} & \dot{t}_{14} \\ \dot{t}_{21} & \dot{t}_{22} & \dot{t}_{23} & \dot{t}_{24} \\ \dot{t}_{31} & \dot{t}_{32} & \dot{t}_{33} & \dot{t}_{34} \\ \dot{t}_{41} & \dot{t}_{42} & \dot{t}_{43} & \dot{t}_{44} \end{pmatrix} \qquad (27)$$

$$C_1=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \ddot{t}_{11} & \ddot{t}_{12} & \ddot{t}_{13} & \ddot{t}_{14} \\ \ddot{t}_{21} & \ddot{t}_{22} & \ddot{t}_{23} & \ddot{t}_{24} \\ \ddot{t}_{31} & \ddot{t}_{32} & \ddot{t}_{33} & \ddot{t}_{34} \\ \ddot{t}_{41} & \ddot{t}_{42} & \ddot{t}_{43} & \ddot{t}_{44} \end{pmatrix} \qquad (28)$$

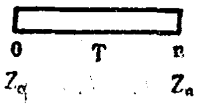
边界条件为：

自由—自由时

$$F(\lambda)=t_{31}t_{42}-t_{32}t_{41}=a_{31}a_{42}-a_{32}a_{41} \qquad (29)$$

表 4

系统的传递矩阵	边界条件



$$\begin{Bmatrix} Z \\ \dot{Z} \\ \ddot{Z} \end{Bmatrix}_n = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ \dot{Z} \\ \ddot{Z} \end{Bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} & t_{25} & t_{26} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} & t_{35} & t_{36} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} & t_{45} & t_{46} \\ t_{51} & t_{52} & t_{53} & t_{54} & t_{55} & t_{56} \\ t_{61} & t_{62} & t_{63} & t_{64} & t_{65} & t_{66} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} Z \\ \dot{Z} \\ \ddot{Z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ N \\ \dot{u} \\ \dot{N} \\ \ddot{u} \\ \ddot{N} \end{Bmatrix}$$

自由——自由

$$\begin{Bmatrix} u \\ N \\ \dot{u} \\ \dot{N} \\ \ddot{u} \\ \ddot{N} \end{Bmatrix}_0 = \begin{Bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} u \\ N \\ \dot{u} \\ \dot{N} \\ \ddot{u} \\ \ddot{N} \end{Bmatrix}_n = \begin{Bmatrix} u \\ 0 \\ \dot{u} \\ \dot{N} \\ \ddot{u} \\ \ddot{N} \end{Bmatrix}$$

自由——固定

$$\begin{Bmatrix} u \\ N \\ \dot{u} \\ \dot{N} \\ \ddot{u} \\ \ddot{N} \end{Bmatrix}_0 = \begin{Bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} u \\ N \\ \dot{u} \\ \dot{N} \\ \ddot{u} \\ \ddot{N} \end{Bmatrix}_n = \begin{Bmatrix} 0 \\ N \\ \dot{u} \\ \dot{N} \\ \ddot{u} \\ \ddot{N} \end{Bmatrix}$$

固定——自由

$$\begin{Bmatrix} u \\ N \\ \dot{u} \\ \dot{N} \\ \ddot{u} \\ \ddot{N} \end{Bmatrix}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ N \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} u \\ N \\ \dot{u} \\ \dot{N} \\ \ddot{u} \\ \ddot{N} \end{Bmatrix}_n = \begin{Bmatrix} u \\ 0 \\ \dot{u} \\ \dot{N} \\ \ddot{u} \\ \ddot{N} \end{Bmatrix}$$

固定——固定

$$\begin{Bmatrix} u \\ N \\ \dot{u} \\ \dot{N} \\ \ddot{u} \\ \ddot{N} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ N \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} u \\ N \\ \dot{u} \\ \dot{N} \\ \ddot{u} \\ \ddot{N} \end{Bmatrix}_n = \begin{Bmatrix} 0 \\ N \\ \dot{u} \\ \dot{N} \\ \ddot{u} \\ \ddot{N} \end{Bmatrix}$$