微分形式与度数

余庆余　范先令

兰州大学出版社

微分形式与度数

余庆余　范先令　编著

兰州大学出版社

1988・兰州

内 容 提 要

本书把微分形式和度数结合在一起进行介绍，内容包括微分流形，Grassmann代数，外微分形式与外微分，外微分形式的积分，流形间映射的度数，流形上向量场的度数共六章。

可作为大学数学系高年级学生及研究生的选修课教材或参考书，也可供数学工作者或其它科学工作者参考。

微分形式与度数

余庆余　范先令　编著

兰州大学出版社

（兰州大学校内）

张掖河西印刷厂印刷　甘肃省新华书店发行

开本：850×1168毫米　1/32　印张：9

1989年4月第1版　1989年4月第1次印刷

字数：240　千字　印数：1—1000册

ISBN 7-311-00074-2/O·17　定价：2.90

目　　录

第一章 微分流形

古典数学分析研究的是欧氏空间中的微积分。从18世纪开始，人们以古典数学分析为工具研究欧氏空间中的光滑曲面（包括曲线），逐渐形成了曲面论这一数学分支。流形的概念就是以欧氏空间中的曲面为直观素材抽象出来的。从欧氏空间到曲面，进而到流形，是数学研究对象的重大发展。现在，流形理论已成为现代数学的重要基础，其重要性已为数学理论的发展及应用上的巨大成功所证实。

流形是一种特殊的拓扑空间，它是欧氏空间的推广。流形是“局部欧氏”的，即在其每一点的附近是与欧氏空间（或欧氏空间中的开集）同胚的。流形可看作是由“一块块”欧氏空间“粘连”而成的。一般说来，流形的整体性质与欧氏空间有着很大的不同。流形理论所关心的正是流形的整体性质。通常，古典分析学称为局部分析，而流形理论则属于大范围分析的范畴。

流形理论的内容十分丰富，这方面有很多专著可供参考（如见〔7，9，14，15，25，35，36〕），本书中只需用到其中某些基本概念与简单性质。作为本书的一个预备知识，在这一章里主要介绍如下一些概念：微分流形，流形间的光滑映射，切向量与切空间，向量场与余向量场，积分曲线，局部流，子流形，单位分解等。对于初学者来说，准确理解基本概念是至关重要的。在本书中，虽然我们对于基本概念也作了一些解释，但限于篇幅等原因，不可能把这些概念论述得很全面、很透彻，也未列举足够多的例子来说明。因此，还望初学者自己多加思索与体会，以

求理解得更深入一些。

§1 微分流形与光滑映射

欧氏空间中的微分学是读者所熟悉的，这里说明一下有关的术语与记号。

R表示实数空间，R^m表示m维欧氏空间，即

$$R^m=\{x=(x^1,x^2,\cdots,x^m)\mid x^i\in R,\ i=1,2,\cdots,m\}$$

为m维实向量空间，且在其中赋予欧氏范数

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{m}|x^i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

对每个$i=1,2,\cdots,m$，定义函数$x^i:R^m\to R$，称之为R^m上的第i个坐标函数，为

$$x=(x^1,x^2,\cdots,x^m)\in R^m\to x^i\in R$$

设U是R^m中的开集。若函数$f:U\to R$在U上所有的直到r阶的偏导数存在且连续，则称f为U上的C^r类函数，记作$f\in C^r(U,R)$，或简记为$f\in C^r$，其中r为非负整数。$f\in C^0$表示f是连续函数，若对任何正整数r，均有$f\in C^r$，则记为$f\in C^\infty$。

设$F:U\to R^n$是映射，对每个$i=1,2,\cdots,n$，令

$$F^i(x)=y^i(F(x))\quad \forall\ x\in U$$

其中y^i为R^n中的第i个坐标函数，函数$F^i:U\to R$称为映射F的第i个坐标函数。常表

$$F=(F^1,F^2,\cdots,F^n)$$

若对于每个$i=1,2,\cdots,n$，有$F^i\in C^r(U,R)$，则称F为C^r类映射，记作$F\in C^r(U,R^n)$，或简记为$F\in C^r$。其中r为非负整数或为∞。当$F\in C^r$（$r\geqslant 1$）时，用$DF(x)$记F在点$x\in U$的

Jacobi矩阵

$$\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(x)\right) \begin{matrix} i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m \end{matrix}$$

我们知道，也可把DF(x)看作是从R^m到R^n的线性算子，称之为F在点x的导算子。当m＝n时，矩阵DF（x）的行列式det〔DF(x)〕也记作

$$\left.\frac{\partial(F^1,\ F^2,\ \cdots,\ F^m)}{\partial(x^1,\ x^2,\ x^m)}\right|_x$$

在不致混淆时，下标x常省略。

下面我们先来介绍拓扑流形的概念，理解这一概念并不困难。

1.1.1 定义 设M是满足第二可数公理的Hausdorff拓扑空间。若M上的每一点都有一(开)邻域同胚于R^m中的一个开集（此种性质即所谓局部欧氏），则称M为m维拓扑流形。

1.1.2 注 1° 一个拓扑空间称为是满足第二可数公理的，指的是它有一个可数的拓扑基；拓扑空间称为是Hausdorff的，指的是它满足T_2分离公理，即它的任何两个不同的点均有相互不交的开邻域（见〔10〕）。易见，欧氏空间及其任何拓扑子空间都是满足第二可数公理的Hausdorff拓扑空间。

2° 易见，欧氏空间R^m是m维拓扑流形，R^m中的单位球面S^{m-1}是m－1维拓扑流形，特别，圆周S^1是一维拓扑流形。

3° 据定义1.1.1，拓扑流形M不必是某个欧氏空间的子集合。在研究欧氏空间中的曲面时，常要考虑该曲面在给定的欧氏空间中的某些特殊性质。例如，图1中的(a)与(b)所示的二曲线，若是局限于三维空间R^3中，二者之间总有某些不同之处。但作为一维流形，二者是同胚的，从流形理论的观点看，二者并无差别。

拓扑流形的概念是抓住欧氏空间中的一些曲面的“局部欧

氏”这一本质属性抽象出来的。在这个抽象过程中，摒弃了曲面所在的具体的欧氏空间的外在形式，流形理论所研究的是流形本身固有的内在属性。

(a)　　(b)

图 1

° 一个拓扑流形的维数是一个确定的数值。即，若M是m维拓扑流形，则M不能同时又是n（$n\neq m$）维拓扑流形。这是由于，依据著名的区域不变性定理(其证明颇不容易。如见〔21〕)，当$n\neq m$时，R^n中的开集不可能同胚于R^m中的开集。

1.1.3 定义 设M是m维拓扑流形。

1° 若U是M的开子集，$\varphi: U\to\varphi(U)\subset R^m$是同胚映射，$\varphi(U)$是$R^m$中的开集，则称（U，φ）为M的一个局部坐标系。这时，对点$p\in U$，令

$$u^i(p)=\varphi^i(p)\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

函数$u^i: U\to R$称为（U，φ）的第i个坐标函数。有序实数组（$u^1(p)$，$u^2(p)$，…，$u^m(p)$），也即$\varphi(p)$在R^m中的坐标，称为点p在局部坐标系（U，φ）中的局部坐标。

2° 设（U_α，φ_α）与（U_β，φ_β）为M的两个局部坐标系。当$U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi$时，映射

$$\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}: \varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$$

与

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$

有意义且互为同胚逆，称之为这两个局部坐标系之间的传递函数。

3° 设$\mathscr{D}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\mid\alpha$属于某指标集$\Gamma\}$是M的一些局部坐标系所成之集。若

$$\bigcup_{\alpha\in\Gamma}U_\alpha=M$$

则称$\mathscr{D}$为M的一个坐标复盖。记$\mathscr{D}_0$为M的所有局部坐标系所成之集，则$\mathscr{D}_0$是M的一个坐标复盖，称之为M的流形构造。

1.1.4 注 设M为m维拓扑流形。注意到当$(U,\varphi)\in\mathscr{D}_0$时，对于U中任何开子集V，必有$(V,\varphi|_V)\in\mathscr{D}_0$，可知$\mathscr{D}_0$中成员的个数一定是非可数的。另一方面，由于M满足第二可数公理，因此总存在M的某个坐标复盖$\mathscr{D}\subset\mathscr{D}_0$，使得$\mathscr{D}$中的成员个数至多可数。对于$M=R^m$这种特殊情形，若令$U=R^m$，$\varphi=I$为$R^m$上的恒同映射，则仅有一个成员的集合$\mathscr{D}=\{(R^m,I)\}$就是$M=R^m$的一个坐标复盖，这时的局部坐标系$(R^m,I)$其实就是$M=R^m$上的整体坐标系；若M是紧拓扑流形，则必存在由有限个成员构成的M坐标复盖$\mathscr{D}$。但这时，$\mathscr{D}$中的成员个数必定大于1，因为一个紧拓扑空间不可能与一个非紧的欧氏空间中的开集同胚。因而，一个紧拓扑流形不可能有一个整体坐标系。

稍加分析就会发现，拓扑流形的概念，或者说拓扑流形的构造$\mathscr{D}_0$，并不适合微分学的需要。原因在于$\mathscr{D}_0$中的传递函数虽是同胚但未必都是微分同胚。在很多情形，这是由于$\mathscr{D}_0$中的成员“太多”、“太杂”所致。为了能把欧氏空间中的微分学“移植”到流形上来，还需要对拓扑流形增补进一步的要求，使之成为能适合微分学需要的所谓微分流形，或者说，对流形构造$\mathscr{D}_0$进行适当的“精简改造”，使之成为所谓微分构造。这一工作可进行如下。

1.1.5 定义 设M是m维拓扑流形。

1° 设（U_α，φ_α）与（U_β，φ_β）是M的两个局部坐标系。若$U_\alpha \cap U_\beta = \phi$，或当$U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$时，其传递函数$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$与$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$是属于$C^r$类的,则称（$U_\alpha$，$\varphi_\alpha$）与（$U_\beta$，$\varphi_\beta$）是$C^r$相容的，其中r为非负整数或∞。

2° 设$\mathscr{D} \subset \mathscr{D}_0$,若$\mathscr{D}$中任何两个成员都是$C^r$相容的,则称$\mathscr{D}$是$C^r$相容的。

1.1.6 定义 设M是m维拓扑流形，$\mathscr{D}_0$是M上的拓扑流形构造，如果$\mathscr{D} \subset \mathscr{D}_0$满足下述条件

1° $\mathscr{D}$是M的坐标复盖。

2° $\mathscr{D}$是C^r相容的。

3° $\mathscr{D}$在下述意义下是极大的：由（U，φ）$\in \mathscr{D}_0$且（U，φ）与$\mathscr{D}$中每个成员均C^r相容,可推出（U，φ）$\in \mathscr{D}$。

那么就称$\mathscr{D}$是M上的一个C^r微分构造。

当M上给定了一个C^r微分构造$\mathscr{D}$时，则称M，或更确切地称（M，$\mathscr{D}$）,为一个m维C^r微分流形。这时，$\mathscr{D}$中的成员称为M的C^r相容的局部坐标系。今后，当谈到微分流形上的局部坐标系时，均是指这种相容的局部坐标系。

1.1.7 注 1° 拓扑流形的概念是Riemann在1854年著名的就职讲演中最早提出的。微分流形的概念最早由 H·Weyl 于1912年所提出，但真正完善这一概念并形成一种方法体系的（特别包括上述的定义1.1.6）是 H·Whitney 1936年的论文〔Differentiable manifolds, Ann. of Math., 37（1936）654—680〕。

2° 在微分构造$\mathscr{D}$的定义1.1.6的条件1°—3°中,前两个条件是基本的。因为,如果在M上给出了满足条件1°和2°的集合$\mathscr{D}' \subset \mathscr{D}_0$,那么,只要把$\mathscr{D}_0 \setminus \mathscr{D}'$中的那些与$\mathscr{D}'$中所有成员均是$C^r$相容

的成员添加进$\mathscr{D}'$中，就可得到M上的一个确定的C^r微分构造$\mathscr{D}$。我们把满足条件1°和2°的集合$\mathscr{D}'\subset\mathscr{D}_0$称为M的一个$C^r$微分构造基。由一个这样的基$\mathscr{D}'$可生成M上唯一确定的$C^r$微分构造。因此，为要给出M上的一个$C^r$微分构造，只需指出它的一个$C^r$微分构造基即可，当然，M上不同的$C^r$微分构造基有可能生成同一个微分构造。

3° 拓扑流形M也即C^0流形，$\mathscr{D}_0$即M上的C^0流形构造；若M是C^r微分流形，则M也是C^{r_1}（$0\leqslant r_1<r$）微分流形。这时，M上的C^r微分构造（或基）是M的一个C^{r_1}微分构造基。本书中，当谈到微分流形或光滑流形时，如不特别指明，均指C^∞微分流形。

4° 从微分流形的定义容易想到下面两个基本问题：第一个是微分构造的存在性问题，即，是否在任何一个拓扑流形上均存在微分构造；第二个是微分构造的唯一性问题。关于第一个问题，M·A·Kervaire 在1960年给出了反例，他造出了一个十维拓扑流形，证明了在其上不可能存在微分构造（见Comment. Math.Helv., 34 (1960) 257—270）。关于第二个问题的含义有必要进一步说清楚，因为，很容易看出，同一个拓扑流形确实可以有不同的微分构造。例如，当M＝R为实数空间时，若取φ与ψ：M→R分别为

$$\varphi(t)=t \quad 与 \psi(t)=t^3 \qquad \forall\ t\in M=R$$

则（M，φ）与（M，ψ）都是M上的整体坐标系。进而，$\mathscr{D}'_\varphi=\{(M,\varphi)\}$与$\mathscr{D}'_\psi=\{(M,\psi)\}$都是M上的$C^\infty$微分构造基，它们分别生成M上的微分构造$\mathscr{D}_\varphi$与$\mathscr{D}_\psi$。但由于$\varphi\circ\psi^{-1}(t)=t^{1/3}$在$t=0$不可微，故（M，φ）与（M，ψ）不是$C^1$相容的。从而$\mathscr{D}_\varphi$与$\mathscr{D}_\psi$是M上不同的微分构造。不过，这种例子其实是不足道的。因为可以证明，（M，$\mathscr{D}_\varphi$）与（M，$\mathscr{D}_\psi$）这两个微分流形是微分同胚的（见本节末的定义1.1.12及其后的说明）。

从微分拓扑的角度来分类，相互微分同胚的微分流形视为相同的。因此，前述第二个问题的确切提法是：在同一个拓扑流形M上是否能存在两个不同的微分构造$\mathscr{D}_1$与$\mathscr{D}_2$，使得微分流形（M，$\mathscr{D}_1$）与（M，$\mathscr{D}_2$）不是微分同胚的。J·Milnor在1956年解决了这一问题。他证明了在七维球面S^7上存在着多个互不微分同胚的微分构造（见Ann·of Math. 6 (1956) 399—405）。关于流形理论的这两个基本问题的研究在近年来取得了可喜的进展，特别是 Freedman—Donaldson 关于四维流形的研究结果引起了数学界极大的兴趣。他们的研究结果表明，在某些四维拓扑流形上不存在微分构造，在空间R^4中存在着与通常微分构造不微分同胚的微分构造。这方面的进一步讨论可见〔26〕。

1.1.8 例 1° 取$M=R^m$。令$\mathscr{D}'=\{(R^m, I)\}$，其中I为$R^m$上的恒同映射。则$\mathscr{D}'$是$R^m$上的一个微分构造基，它生成$R^m$上的微分构造$\mathscr{D}$，（$R^m$，$\mathscr{D}$）成为m维微分流形。通常当说到$R^m$是m维微分流形时，如不另加说明，其上的微分构造就是指这里的$\mathscr{D}$。

2° 设（M，$\mathscr{D}$）是m维微分流形，U是M的开子集。记

$$\mathscr{D}|_U=\{(U_\alpha\cap U,\varphi\alpha|_{U_\alpha\cap U})\,|\,(U\alpha,\varphi\alpha)\in\mathscr{D}\}$$

易见（U，$\mathscr{D}|_U$）是m维微分流形。它称为M的开子流形。请注意拓扑空间的第二可数性与 Hausdorff 分离性都是可遗传的，即具有此种性质的拓扑空间的任何拓扑子空间也具有此种性质。显然，一个流形的拓扑子空间可以不是流形。

3° 设（M_1，$\mathscr{D}_1$）和（M_2，$\mathscr{D}_2$）分别是m_1维和m_2维微分流形，$M=M_1\times M_2$为积空间。令

$$\mathscr{D}'=\{(U\alpha\times V_\beta,(\varphi\alpha,\psi_\beta))\,|\,(U\alpha,\varphi\alpha)\in\mathscr{D}_1,\ (V_\beta,\psi_\beta)\in\mathscr{D}_2\}$$

易见$\mathscr{D}'$是M上的一个微分构造基。由$\mathscr{D}'$生成M上的微分构造$\mathscr{D}$

$(M, \mathscr{D})$是m_1+m_2维微分流形，它称为$(M_1, \mathscr{D}_1)$和$(M_2, \mathscr{D}_2)$的积流形，常记为$(M_1 \times M_2, \mathscr{D}_1 \times \mathscr{D}_2)$。

欧氏空间中的光滑函数与光滑映射的概念可以合理地移植到微分流形上。

1.1.9 定义 设$(M, \mathscr{D})$是m维微分流形，$f: M \to R$是M上的实函数。

1° 设$p \in M$。若存在某$(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathscr{D}$，$p \in U_\alpha$，使得

$$f \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha) \to R \in C^r$$

则称f在点p是C^r光滑的。

2° 若f在M上每一点都是C^r光滑的，则称f是M上的C^r函数，M上的C^r函数的全体记作$C^r(M, R)$或$C^r(M)$。

上述定义是下述定义的特例。

1.1.10 定义 设$(M, \mathscr{D}_1)$与$(N, \mathscr{D}_2)$分别是m维与n维微分流形，$F: M \to N$是映射。

1° 设$p \in M$，若对于$F(p) \in N$的每一个局部坐标系$(V_\beta, \psi_\beta) \in \mathscr{D}_2$，存在点p的某个局部坐标系$(U_\alpha, \psi_\alpha) \in \mathscr{D}_1$，使得$F(U_\alpha) \subset V_\beta$，且

$$\psi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha) \to \psi_\beta(V_\beta) \in C^r$$

则称映射F在点p是C^r光滑的。

2° 若F在M上每一点都是C^r光滑的，则称映射$F: M \to N$为C^r映射。从M到N的C^r映射的全体记为$C^r(M, N)$。

1.1.11 注 1° 在定义1.1.9与1.1.10中，M和N均假设为C^∞微分流形，这只是为了方便。其实，当M和N是C^k微分流形时，就可以定义从M到N的C^r($r \leqslant k$)映射的概念。C^0映射即连续映射，C^r($r \geqslant 1$)映射常称为C^r光滑映射。不过，在本书中，凡提到光滑映射时，如不特别指明，均指C^∞映射。

2° 由M上的微分构造$\mathscr{D}$是C^∞相容的，可知在1.1.9的1°中

定义的f在点$p\in M$的C^r光滑性是与点p的局部坐标系$(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}$的选取无关的。还容易看出，下述三个条件相互等价：

i）$f\in C^r(M,R)$

ii）$f\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha)\to R\in C^r\quad\forall(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}$

iii）$f\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha)\to R\in C^r\quad\forall(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}'$，

其中$\mathscr{D}'$是$\mathscr{D}$的某个基。

3° 设M和N是微分流形，U是M的非空开子集，$F:U\to N$是映射。由于定义1.1.10之1°只用到映射在点p的局部性质，因此该定义对于映射$F:U\to N$也适用。若F在U中每点都是C^r的，就称$F:U\to N$是C^r映射，记作$F\in C^r(U,N)$。这也等价于把U视为M的开子流形时F是从微分流形U到N的C^r映射。有时，当D是M的任一非空子集（不必开）时，也谈到映射$F:D\to N$的C^r光滑性。这种术语的意思是指，存在M上的某开集$U\supset D$与C^r映射$\widetilde{F}:U\to N$，使得$\widetilde{F}|_D=F$。另外，容易看出，对于映射$F:R^m\to R^n$而言，F作为欧氏空间间的映射与作为微分流形间的映射的C^r光滑性是一致的。

4° 设(a,b)是实数开区间，它是一维微分流形。设M是m维微分流形，一个C^r映射$\sigma:(a,b)\to M$常称为M中的一条C^r曲线。本书中说到光滑曲线时系指C^∞曲线。

5° 设$(M_1,\mathscr{D}_1)$和$(M_2,\mathscr{D}_2)$是微分流形，$(M_1\times M_2,\mathscr{D}_1\times\mathscr{D}_2)$是积流形，定义$\pi_i:M_1\times M_2\to M_i\ (i=1,2)$为

$$\pi_i(p_1,p_2)=p_i\qquad\forall(p_1,p_2)\in M_1\times M_2$$

容易验证，投射π_1和π_2都是光滑映射。

6° 设M、N、P为微分流形，若$F\in C^r(M,N)$，$G\in C^r(N,P)$，则易于核验复合映射$G\circ F\in C^r(M,P)$。

7° 设M和N是微分流形，$F:M\to N$是映射。那么，由本

注之6°，若$F\in C^\infty(M, N)$，则有

$$f\circ F\in C^\infty(M) \qquad \forall f\in C^\infty(N)$$

请读者验证其逆也真。由此可得到$F\in C^\infty(M, N)$的另一等价定义。

1.1.12 定义 设M和N是微分流形。若$F: M\to N$是同胚映射，且F与F^{-1}都是$C^r(r\geqslant 1)$映射，则称$F: M\to N$为C^r微分同胚。

本书中，C^∞微分同胚简称为微分同胚。

在注1.1.7的4°中，曾给出了$M=R$上的两个不同的微分构造$\mathscr{D}_\varphi$与$\mathscr{D}_\psi$。若令$F:(R, \mathscr{D}_\varphi)\to(R, \mathscr{D}_\psi)$为

$$F(t)=t^{1/3} \qquad \forall\ t\in R$$

那么，$F:(R, \mathscr{D}_\varphi)\to(R, \mathscr{D}_\psi)$显然是微分同胚。

设(U, φ)是m维微分流形M的任一局部坐标系。则易见$\varphi: U\to\varphi(U)$是微分同胚。这里U和$\varphi(U)$分别是M和R^m的开子流形。

§2 切向量与切空间

本节的任务是在微分流形的每一点定义切向量与切空间的概念。先来考察一下欧氏空间中的光滑曲面的情形，以便从中得到启示。

设M是R^n中的一个光滑曲面，点$p\in M$。这时可以很直观地给出M在点p的切向量与切空间的定义如下。设$\sigma:(-\delta, \delta)\to M\subset R^n$，$\sigma\in C^\infty$（$\sigma$作为从实区间$(-\delta, \delta)$到$R^n$中的映射其光滑性是有意义的），$\sigma(0)=p$。映射通常称为M上的过点P的光滑曲线。$\dot\sigma(0)=\frac{d\sigma}{dt}(0)$是$R^n$中的一个向量，称之为σ在

$t=0$的速度向量。把向量$\dot{\sigma}(0)$的起点平移到点p，那么它正代表了光滑曲线σ在点p的切线方向。因此，我们把$\dot{\sigma}(0)$称为M在点p的一个切向量。光滑曲面M在点p的所有切向量组成一个向量空间，称之为M在点p的切空间。切空间的几何意义就是光滑曲面M在点p的切面。记

$$\Gamma_p=\left\{\sigma \mid \sigma:(-\delta,\ \delta)\to M,\ \sigma\in C^{\infty},\ \sigma(0)=p\right\} \qquad (1)$$

显然，Γ_p中不同的元σ_1和σ_2有可能对应着同一个切向量$\dot{\sigma}_1(0)=\dot{\sigma}_2(0)$。如果在$\Gamma_p$中引入关系“～”为

$$\sigma_1\sim\sigma_2 \iff \dot{\sigma}_1(0)=\dot{\sigma}_2(0), \qquad (2)$$

那么，“～”是Γ_p的等价关系，$\Gamma_p/\sim$中的每个元〔σ〕确定M在点p的一个切向量$\dot{\sigma}(0)$，$\Gamma_p/\sim$中不同的元对应着不同的切向量。于是，M在点p的一个切向量其实就相当于$\Gamma_p/\sim$中的一个元〔σ〕。

对于一般的m维微分流形（M，$\mathscr{D}$）与点$p\in M$，按（1）式定义的Γ_p仍有意义。但这时$\sigma\in\Gamma_p$的速度向量尚无意义。因此，上述在Γ_p中按（2）式定义等价关系的办法现在不再适用。为克服这一困难，自然会想到求助于局部坐标系。记

$$\mathscr{D}_p=\left\{(U_\alpha,\ \varphi_\alpha)\in\mathscr{D} \mid p\in U_\alpha\right\}$$

设（U_α，φ_α）$\in\mathscr{D}_p$，则对任意的$\sigma\in\Gamma_p$，有

$$\varphi_\alpha\circ\sigma:(-\delta,\ \delta)\to R^m\in C^{\infty}$$

$\varphi_\alpha\circ\sigma$是$R^m$中的光滑曲线，它的速度向量

$$\frac{d(\varphi_\alpha\circ\sigma)}{dt}(0)\in R^m$$

有意义。于是我们考虑在Γ_p中按如下方法定义等价关系“～”：