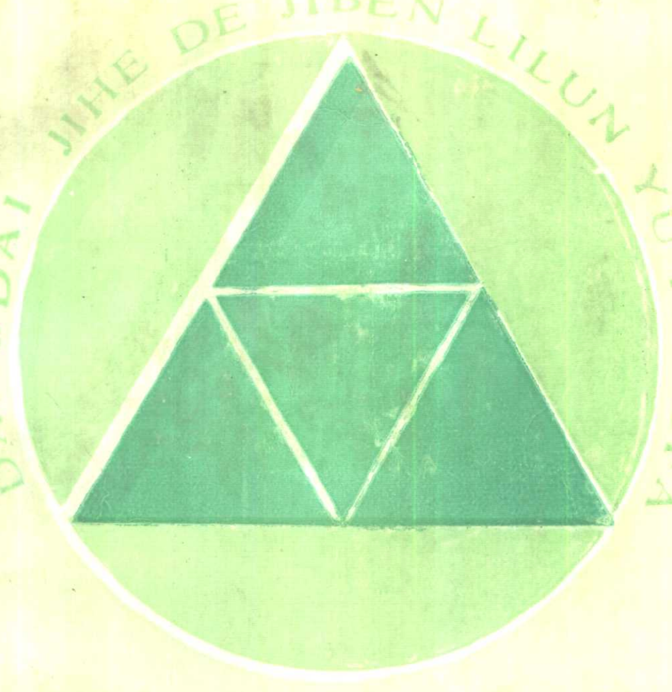


杨鼎文 编著

当代几何的基本理论与方法

陕西科学技术出版社

当代几何的基本理论与方法

杨 鼎 文 编 著

陕 西 科 学 技 术 出 版 社

当代几何的基本理论与方法

杨鼎文　编著

陕西科学技术出版社出版发行

（西安北大街131号）

西北师大印刷厂印刷

850×1168毫米 32开本 9.125印张 23万字

1991年10月第1版　1991年10月第1次印刷

印数：1—2,000

ISBN 7-5369-0981-0/O·30

定　价：5.00元

前 言

几何学是数学的重要分支，它是一门历史悠久，内容丰富，门类繁多，方法各异的数学学科．几何学在数学中的作用十分重要，与数学其他各分支之间的联系非常密切，它们彼此影响，相互渗透，共同促进，协调发展．同时几何学在其他自然科学与技术领域也有广泛的应用．

本世纪以来几何学的发展甚为迅速，出现了不少新的理论、方法和分支，各种专著相继问世．但综合论述几何学各个分支的理论和方法的著作极为少见．编者在从事几何教学和研究三十年的基础上编写了本书，目的在于概括论述几何学各主要分支的“基本”理论和方法，以使读者能在较短时间内对几何学的全貌有个概括、全面的了解，特别是蕴藏在大量几何知识中的数学方法，作为进一步学习、研究几何学和其他近代数学的阶梯．

本出内容共四大部分：第一部分阐述空间的拓扑结构与拓扑不变量，以及拓扑结构与代数结构的结合所产生的同伦与同调理论；第二部分阐述微分几何中曲线、曲面的局部与整体理论，Gauss 的参数法，Cartan 的活动标架法与外微分形式法，以及拓扑结构与微分结构的结合所产生的微分流形和流形之间的光滑映射；第三部分阐述克莱因关于几何学的群论原则及一般线性群的主要子群所支配的几何学（射影几何，仿射几何，欧氏几何）；第四部分阐述几何学的公理化方法，希尔伯特的欧氏几何公理体系及公理化方

法所建立的非欧几何.

由于编者水平所限，错误和不妥之处在所难免，欢迎专家们的指正和读者的批评.

本书在编写过程中，西北师大数学系王仲春教授提了不少宝贵意见，本书得以出版有幸得到陕西科技出版社的大力支持，在此一并致衷心的感谢。

编　者

1990 年 11 月

目　　录

第一篇　拓扑学的基本理论与方法

第一章　拓扑空间的基本概念

§1.1　拓扑空间的基本概念

拓扑学是研究图形连续形变规律的.所谓一种变化是连续的,朴素的含义是它把邻近的点变成邻近的点.因此拓扑学中研究的点集起码要具有某种结构,以表现点与点之间的邻近关系.例如在 n 维欧氏空间中可用距离大小来表现点的邻近关系.具体一点说,我们用 $\mathbf{R}^1$ 表示实数的集合,令 $\mathbf{R}^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R}^1, i=1,\cdots,n\}$ 这时 $\mathbf{R}^n$ 的元素或点,就完全确定了,但点与点之间未确定任何关系.如果对 $\mathbf{R}^n$ 中任意两点:$x=(x_1,\cdots,x_n)$,$y=(y_1,\cdots,y_n)$,引进距离 $d(x,y)=[\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2]^{\frac{1}{2}}$,则集 $\mathbf{R}^n$ 加上距离 d 才是我们所说的 n 维欧几里得空间,也就是说 n 维欧氏空间是指 (R^n,d),但在不引起混淆的情况下常用 $\mathbf{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间.在集合 $\mathbf{R}^n$ 上规定了距离 d 就说赋予 $\mathbf{R}^n$ 以空间结构,有了表现点的"邻近"关系的空间结构,就可以谈论函数的连续性,不仅欧氏空间如此,在一般度量空间中同样可用距离刻划变化的连续性.

定义 1　设 $S\neq\varnothing$,$\rho:S\times S\rightarrow\mathbf{R}^+\cup\{0\}$ 是一函数,使得下列条件满足:

(1)　$\rho(x,y)=0\Longleftrightarrow x=y$, $\forall\ x,y\in S$

(2)　$\rho(x,y)=\rho(y,x)$, $\forall\ x,y\in S$

(3)　$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$, $\forall\ x,y,z\in S$

集 S 与函数 ρ 一起叫做一个度量空间,记作 (S,ρ),函数 ρ 叫做

(S,ρ) 的距离函数或度量，$\rho(x,y)$ 叫做点 x,y 之间的距离.

定义 2 设 a 是度量空间 $X=(S,\rho)$ 的任一点，ε 是任一正数，点集 $B(a,\varepsilon)=\{x\in X\mid\rho(a,x)<\varepsilon\}$ 叫做 a 在 X 中的一个球形邻域.

易证球形邻域具有下列性质：

(1) X 的每一点 x 都有球形邻域，点 x 的每一球形邻域都包含 x.

(2) 如果 x 属于两个球形邻域 $B(x_i,\varepsilon_i)$ $(i=1,2)$ 的交 $B(x_1,\varepsilon_1)\cap B(x_2,\varepsilon_2)$，则 x 有一球形邻域 $B(x,\varepsilon)$ 使 $x\in B(x,\varepsilon)\subset B(x_1,\varepsilon_1)\cap B(x_2,\varepsilon_2)$

定义 3 A 为度量空间 X 的子集，如果对 $\forall\, a\in A$，存在 $\varepsilon>0$，使 $B(a,\varepsilon)\subset A$，则 A 叫做 X 的开集.

凡球形邻域都是开集.

可以证明，A 是开集 $\Longleftrightarrow A$ 是若干球形邻域的并集且度量空间 X 的开集具有下列性质：

(1) X 与空集 $\varnothing$ 是开集；

(2) 两个开集的交集是开集；

(3) 任意多个开集的并集是开集.

定义 4 度量空间 X 的一个子集 A 叫做 X 的闭集，如果 A 在 X 中的余集 $X-A$ 是 X 的开集.

借助球形邻域和开集可定义内部，闭包，边界，序列收敛等概念，进而可定义度量空间之间的连续映射.

定义 5 设 X,Y 都是度量空间，$f:X\to Y$ 是从 X 到 Y 的一个映射，且 $x\in X$，如果给定任一邻域 $B(f(x),\varepsilon)$ 都存在一个邻域 $B(x,\delta)$ 使得当 $x'\in B(x,\delta)$ 时 $f(x')\in B(f(x),\varepsilon)$ 则说 f 在 x 处连续，如果 f 在 X 的每一点连续，就说 f 在 X 中连续，这时 $f:X\to Y$ 叫做连续映射. 当 $Y=R^1$ 时，f 通常叫做连续实值函数或简称连续函数.

由定义不难看出，所谓 f 在 x 处连续，是指对于每一个正数 ε，

存在一个正数 δ，使 x 的 δ 邻域在 f 下的象属于 $f(x)$ 的 ε 邻域，若把 δ 和 ε 解释为靠近的程度，连续性的定义可以意译为：人们只须要求 x' 足够靠近 x，就能使 $f(x')$ 靠近 $f(x)$，更粗略地说 x 的微小改变，引起 $f(x)$ 的微小改变，也就是说经过连续映射不会发生断裂，不会破坏 X 的完整性，但可能会出现"粘合"现象，即 X 的两个不同点，映成 Y 的同一点.

怎样判断一个映射是否连续呢？下面的定理回答了这个问题.

定理 1 设 X 与 Y 都是度量空间，对于映射 $f: X\to Y$，下列五个条件中的每两个都等价：

(1) f 是连续映射；

(2) Y 的每一开集在 f 下的原象都是 X 的开集；

(3) Y 的每一闭集在 f 下的原象都是 X 的闭集；

(4) 对 X 的每一子集 A，其闭包的象含于象的闭包，即 $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$；

(5) 对 X 的每一点 x 以及以 x 为极限点的收敛序列 $\{x_n\}$ 其象序列 $\{f(x_n)\}$ 在 Y 中收敛到 $f(x)$.

用距离刻划点的靠近程度与映射连续性的做法，并非唯一绝妙的办法，因为在某些场合下未必能规定出合用的距离，因而产生了拓扑空间的概念.

我们即将给出的拓扑空间的公理化定义是经历了很长时间才形成的. 许多数学家如 *Frechet*，*Hausdorff* 等人在 20 世纪前十年里给出过很多不同的定义，这些数学家一方面希望定义能尽可能广泛，从而把数学中许多有用的空间，如欧氏空间，无穷维欧氏空间及其上的函数空间都包括进去作为它的特例；同时又希望使定义尽可能的狭窄，从而使得那些熟知空间中的标准定理对于一般拓扑空间也能够成立.

定义 6 集合 X 上的一个拓扑，是指 X 上具有如下性质的子集族 T：

(1) X 和 $\varnothing$ 在 T 中；

(2) 若 $G_i \in T, i = 1,2,\cdots,n$,则 $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in T$;

(3) 若 $G_a \in T, \forall a \in A$,则 $\bigcup \{G_a | a \in A\} \in T$,则$(X,T)$叫做一个拓扑空间,其中 X 为集合,T 为 X 上的拓扑,T 中成员叫做 X 的开集,在不致混淆的情况下常常不专门提及 T.

如果把度量空间(S,ρ)的开集全体记作 T,则 T 满足拓扑三公理,因而是 S 的一个拓扑,T 叫做度量 ρ 所诱导出的拓扑或简称度量拓扑,我们说(S,ρ)是一个拓扑空间,指的就是(S,T).

对于给定的一个拓扑空间(X,T),如果存在 X 上的一个度量 ρ 使得 ρ 所诱导出的拓扑就是 T,就说拓扑空间(X,T)是可度量化的.并非每一拓扑空间都可度量化,例如仅由 X 与空集 $\varnothing$ 组成的拓扑叫 X 的平庸拓扑,平庸拓扑空间是不能度量化的.

这说明拓扑空间是欧氏空间、度量空间的自然推广.同样,度量空间中的闭集、极限点、闭包、内部等概念可推广而引入拓扑空间.

定义 7 设 X 是一个拓扑空间,其拓扑为 T,若 A 是 X 的一个子集,则子集族 $T_A = \{A \cap V | V \in T\}$ 是 A 上的一个拓扑,叫做子空间拓扑,具有这种拓扑的 A 叫做 X 的一个子空间,其开集由 X 中的开集与 A 的交组成.

定义 8 设 X,Y 是拓扑空间,映射 $f: X \to Y$ 叫做连续的,如果对于 Y 中的每个开集 V,$f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集.

映射的连续性不仅依赖于本身,也与它的定义域及值域上所给的拓扑有关.

注意到 $f^{-1}(V) = \{x \in X | f(x) \in V\}$,如果 $f(X) \cap V = \varnothing$ 则 $f^{-1}(V) = \varnothing$

在分析中研究过连续函数许多不同、然而等价的定义,它们中的一些可以推广到任意空间上去,但是大家熟悉的"$\varepsilon—\delta$"定义及"收敛序列"定义却不能推广到任意空间.

定理 2 设 X,Y 为拓扑空间,$f: X \to Y$ 是一映射,则下列陈述

是等价的：

(1) f 连续；

(2) 对于 X 的任意子集 A，有 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$；

(3) 对于 Y 的任意闭集 B，$f^{-1}(B)$ 是 X 中的闭集.

证明 (1)⇒(2) 设 f 连续，A 为 X 的一个子集，下面证明：若 $x \in \overline{A}$，则 $f(x) \in \overline{f(A)}$，设 V 是 $f(x)$ 的一个开邻域，则 $f^{-1}(V)$ 是 X 中包含 x 的一个开集，它必定与 A 相交于某点 y，于是 V 与 $f(A)$ 有交点 $f(y)$，因此得到 $f(x) \in \overline{f(A)}$.

(2)⇒(3) 设 B 为 Y 中闭集，$A = f^{-1}(B)$，下面证明 A 是 X 中闭集，也就是证明 $\overline{A} \subset A$. 由初等集合论可知 $f(A) \subset B$，因此对于 $x \in \overline{A}$ 有

$f(x) \in f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{B} = B$

于是 $x \in f^{-1}(B) = A$，所以得到 $\overline{A} \subset A$.

(3)⇒(1) 设 V 为 Y 中一个开集，$B = Y - V$，那么，B 是 Y 中闭集，由初等集合论可知，

$f^{-1}(V) = f^{-1}(Y - B) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(B) = X - f^{-1}(B)$.

所以 $f^{-1}(V)$ 是开集. 证完.

定理 3 (粘接引理) 设 $X = A \cup B$ 且为 A, B 为 X 中闭集，$f: A \to Y$，$g: B \to Y$ 都是连续映射，若对于任意 $x \in A \cap B$，$f(x) = g(x)$，则 f, g 可以组成一个连续映射 $h: X \to Y$，它定义为

$$h(x) = \begin{cases} f(x), x \in A. \\ g(x), x \in B \end{cases}$$

证明 设 C 为 Y 中一个闭集，由初等集合论有 $h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$，因为 f 连续，所以 $f^{-1}(C)$ 为 A 中闭集. 类似地 $g^{-1}(C)$ 是 B 中闭集，从而 $f^{-1}(C)$ 与 $g^{-1}(C)$ 是 X 中闭集，于是它们的并集 $h^{-1}(C)$ 是 X 中闭集.

若 A, B 都是 X 中开集，这个定理仍然成立.

在一般拓扑空间中不能用“收敛序列”定义连续映射.

设 S 是实数集合 $\{0 \leqslant x \leqslant 1\}$，令非空开集为 $S - C$，其中 C 是

S 的任一可数子集(可以是空集),可以验证这样确定的开集的全体形成 S 的一个拓扑 T,于是有拓扑空间 (S,T). 如果 S 中一个序列 $\{x_n\}$ 收敛到点 x,则存在一个自然数 N 使得当 $n > N$ 时 $x_n = x$,设 Y 是欧氏空间 $\mathbf{R}^1$ 的子空间 $0 \leqslant y \leqslant 1$,而且 $f: S \to Y$ 是由 $y = f(x) = x$ 定义的映射,显然序列 $\{x_n\}$ 收敛到 x,则象序列 $\{f(x_n)\}$ 收敛到 $f(x)$,但 f 并不连续,因为令 B 为 Y 的开子集 $\frac{1}{4} < y < \frac{3}{4}$,但 $f^{-1}(B)$ 不是 S 的开子集.

§1.2 同胚、拓扑不变量

一 同胚

连续映射不会出现"断裂"现象,但可能发生"粘合"情况. 有一种非常重要的映射,它既不出现"断裂"又不发生"粘合",这种映射叫做同胚映射. 我们较详细地研究这一概念.

定义 1 从集 A 到集 B 的映射 f 叫做双方单值的,如果集 B 的每一点 y,恰由集 A 的一个点映成.

双方单值的映射不会把集 A 的两个不同点映成集 B 的同一点,因而不会发生"粘合"现象,同时集 A 的一点不可能映为集 B 的两点,此外集 B 的每一点都是集 A 某一点的象,即集 A 映成整个集 B 而不是集 B 的一部分. 集 A 到集 B 的双方单值映射既是满射又是单射简称双射,对于这样的映射 f 其逆映射 f^{-1} 是有意义的.

定义 2 设 X, Y 为拓扑空间,$f: X \to Y$ 是一双射,如果映射 f 与其逆映射 $f^{-1}: Y \to X$ 都连续,则 f 叫做一个拓扑映射或同胚映射,这时 X, Y 叫做拓扑等价或同胚.

f^{-1} 连续是指对于 X 的任一开集 U,它在 $f^{-1}: Y \to X$ 下的原象是 Y 中的开集,但是 U 在 f^{-1} 下原象就是 U 在 f 下的象(图 1.1),于是可用另一种方式给出同胚映射的定义:如果双射 $f: X \to Y$ 使得 U

为开集，当且仅当 $f(U)$ 为开集，那么 f 叫做一个同胚映射. 这就说明一个同胚映射 $f: X \to Y$ 不仅给出了 X, Y 之间的一个双射，还给出了 X 与 Y 的开集族之间的一个双射. 因此完全借助于 X 的拓扑（即借助于 X 的开集）所得出的 X 的任何性质通过 f 就可以推出空间 Y 的相应性质. X 的这种性质叫做 X 的一个拓扑性质. 换句话说拓扑性质是拓扑空间在每一同胚映射下保持不变的性质.

两个代数系统，比如群、环、域之间的同构是一个保持代数结构的双射. 拓扑学中的同胚映射是与同构相类似的概念，是保持拓扑结构的一个双射. 形象一点说，如果把图形 X 看成用橡皮制成的，这儿拉长一些，那儿缩短一些，且允许扭曲，但不断裂，也不粘连，则变形而得的图形 Y 与 X 拓扑等价.

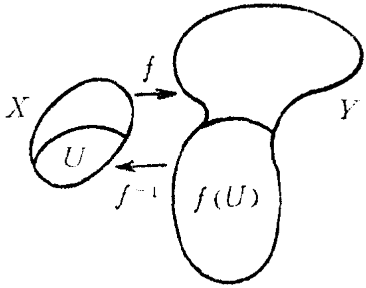


图 1.1

两个拓扑等价的空间具有完全相同的拓扑性质，从拓扑观点看来，它们本质上是相同的并无区别.

在每一种经典几何学中都有图形等价这一概念，在欧氏几何中两图形等价是指两图形合同，即有一运动把一图形变为另一个. 在射影几何中两图形射影等价是指有一射影变换把一图形变成另一个. 在微分几何中两图形等距等价是指它们的点之间存在着一一对应使得定义域中任一曲线的长度等于值域中相应曲线的长度，运动、射影变换，等距变换都是拓扑变换，因此一切拓扑性质也是度量性质与射影性质，那么拓扑学的每一个定理会自动地在这些几何中成立. 由此，有充分正当的理由来说拓扑学是最基本的几何学.

拓扑学感兴趣的问题是把图形按照同胚与否加以分类，并找出刻划每一类图形的特征. 一般的想法是：赋予图形以一些"量"（这里所谓"量"是广义的，可以是数，如维数，可以是代数结

构，如群，也可以是性质，如连通性）使得同胚的图形具有相同的量．这样的量叫做拓扑不变量或同胚不变量，也就是前面所说的拓扑性质．拓扑不变量帮助我们鉴别不同胚的图形，因为凡拓扑等价的图形具有相同的拓扑不变量，因之如果两个图形中一个具有某种拓扑不变量，而另一个不具有，就说明两图形不是拓扑等价的．

二　拓扑不变量

1．连通性与紧性

在微积分中关于连续函数有下面三个基本定理，它们是其它定理的基础．

介值定理：若 $f:[a,b]\to R^1$ 连续，r 是 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的一个实数，则存在 $c\in[a,b]$ 使得 $f(c)=r$．

最大值定理：若 $f[a,b]\to R^1$ 连续，则存在 $c\in[a,b]$ 使得对任何 $x\in[a,b]$ 都有 $f(x)\leqslant f(c)$．

一致连续性定理：若 $f:[a,b]\to R^1$ 连续，则对给定的 $\varepsilon>0$ 总存在 $\delta>0$ 使得对 $[a,b]$ 中满足 $|x_1-x_2|<\delta$ 的任何一对元素 x_1,x_2 都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$．

这三个定理用处很多，比如介值定理可以用于构造反函数，最大值定理可以证明微分中值定理，一致连续性定理可以用来证明每一个连续函数都是可积的．

这些定理不仅依赖于 f 的连续性，也依赖于拓扑空间 $[a,b]$ 的性质，具体地说，介值定理依赖于空间 $[a,b]$ 被称为连通性的性质，另外两个定理则依赖于空间 $[a,b]$ 被称为紧性的性质．我们将对任意拓扑空间定义这两种性质．

连通性与紧性在高等分析、几何与拓扑学中，甚至在与拓扑空间概念有关的几乎任何一门学科中也都是十分重要的．

拓扑空间连通性的定义是十分自然的，如果空间能够拆成两“片”—— 不相交的开集，就说空间可以“分裂”，否则就说它连通，

这个直观的想法启示我们给出连通空间的数学定义.

定义 3 设 X 为拓扑空间，所谓 X 的一个分裂是指 X 的一对不交非空开子集 U,V 使得 $X=U\cup V$，如果这样的分裂不存在，就说空间 X 是连通的.

显然连通性是一个拓扑性质，因为它的定义仅仅牵涉到 X 的开集族，换句话说，如果 X 是连通的，那么与 X 同胚的任意空间也是连通的.

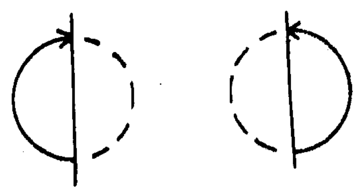
连通性的定义也可以用如下方式给出：

空间 X 是连通的当且仅当 X 中既开又闭的真子集只有空集和 X 本身.

因为若 U 是 X 中既开又闭的非空真子集，则 $V=X-U$ 也是 X 中既开且闭的非空真子集，且 $U\cap V=\varnothing$，$U\cup V=X$，U,V 便构成了 X 的一个分裂，反之如果 U,V 构成 X 的一个分裂，那么 U,V 为 X 的非空开子集，且 $U=X-V$，因此 U 在 X 中是既开且闭的.

易证连通空间在连续映射下的象也是连通的.

下面给出道路和道路连通的概念.



(a)

图 1.2

我们常常将曲线直观的描述为“运动着的点的轨迹”. 当对曲线作这样的描述时并不把曲线简单的考察为图形(空间的点集)而着重考虑运动着的点以怎样的程序通过不同的位置. 例如点以两种不同方式跑过圆形跑道，如图 1.2 所示(黑线表示已跑过的道路，虚线表示将去跑的路)，在这两种情况下运动着的点所经历的所有位置的集合是一样的. 但在情况 (a) 及 (b) 以不同的程序跑过这一集合，换言之运动着的点的道路是不同的，由此引向道路概念的精确定义：设在某拓扑空间 X 中，点从时刻 $t=a$ 到时刻 $t=b$ 连续“运动”，这表明对每一时刻 $t\in[a,b]$，点的运动位置 x_t 是已知的，并且随着 t 的变动，点 x_t 连续地变