复变函数

——习题解答——

朱秉林 编

前　言

为了适应教学需要，我们编著了《复变函数习　解答
该书基本上包含了“普里瓦洛夫”著《复变函数引论》中
习题，编排体系亦大体与之相应，以便查阅。另外我们
从：“阿尔福斯”著《复分析》；“梯其玛希”著《函数
论》；余家荣编《复变函数》；李锐夫、程其襄编《复变
论》；朱静航编《复变函数论》；“肯杰尔”等著《高
学习题集》（第三卷）等书中挑选了部分习题；同时搞
了：“竹内端三”著《函数论演习》；“远木幸成”著《
学演习讲座》(13)；《美国数学月刊》*（40到60年代）等
中的部分题解。基本上逐题都作出了详细解答，裨便参考

在本书编写过程中，得到了系领导的热情关怀与支持
梁国仪同志提供了部分日文译稿，给编者带来了一定方便
张毓新同志利用余暇协助绘制了全部插图。最后在院教
的帮助下，承［illegible］印刷，于此一并加以致谢。

编者才［illegible］今卒付印，缺点错误
切［illegible］

编　者

1980. 3.

目 录

第一章　复数的运算及其应用

1. 复数的代数学

1. 利用De moivre公式把 $\cos nx$与 $\sin nx$ 展开成$\sin x$与 $\cos x$ 的乘幂.

【解】由De moivre公式：

$(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx$.

把左边按二项式展开. 比较实虚部便得：

$$\cos nx=\cos^n x-c_n^2\cos^{n-2}x\sin^2 x+c_n^4\cos^{n-4}x\sin^4 x+$$
$$+\cdots+c_n^{2k}(-1)^k\cos^{n-2k}\sin^{2k}x+\cdots+$$
$$+\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n x. & (n\text{为偶时})\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos x\sin^{n-1}x. & (n\text{为奇时})\end{cases}$$

$$\sin nx=c_n^1\cos^{n-1}x\sin x-c_n^3\cos^{n-3}x\sin^3 x+\cdots+$$
$$+(-1)^k c_n^{2k+1}\cos^{n-(2k+1)}x\sin^{2k+1}x+\cdots+$$
$$+\begin{cases}(-1)^{\frac{n-2}{2}}\cos x\sin^{n-1}x. & (n\text{ 为偶时}).\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin^n x & (n\text{ 为奇时}).\end{cases}$$

2. 试证明：任何复数 z 只要不等于-1，而其模为 1．则必可表成 $z=\dfrac{1+ti}{1-ti}$之形状，此处 t 为实数.

【证】因 $|z|=1$，故可设 $z=\cos\theta+i\sin\theta$.

由于 $z\neq-1$，　故$\theta\neq k\pi$，（$k=\pm1,\pm3,\pm5,\cdots$）

于是$z=\cos\theta+i\sin\theta=\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}}+i\dfrac{2\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}}$

此时可令 $t=\mathrm{tg}\dfrac{\theta}{2}$，（有限实数．因$\theta\neq(2n+1)\pi$）

故 $z=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+i\dfrac{2t}{1+t^2}=\dfrac{(1-t^2)+2ti}{1+t^2}$

$$=\frac{(1+ti)^2}{(1+ti)(1-ti)}=\frac{1+ti}{1-ti}.$$

3. 设有复数 $a+bi$，模为1，$b\neq0$，则它可表为

$a+bi=\dfrac{c+i}{c-i}$，c 为实数．

【证】 若存在实数 c 使 $ac+b=c$，$a-bc=-1$．
便有$(a+bi)(c-i)=(ac+b)-(a-bc)i=c+i$．

$c-i\neq0$，即 $a+bi$可表为$\dfrac{c+i}{c-i}$，

这样当 $c=\dfrac{1+a}{b}$时 （$b\neq0$，c实数）

确有$ac+b=a\dfrac{1+a}{b}+b=\dfrac{a+a^2+b^2}{b}=\dfrac{a+1}{b}=c$．
$a-bc=a-(1+a)=-1$，（因由假设$a^2+b^2=1$．）

4. 化简下列各式：

（1） $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$，（$n$为正整数）

（2） $(1+i)^{10000}+(1-i)^{10000}$．

【解】（1） $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n(1-i)^2=(-2i)$

$$\cdot\left(\frac{(1+i)(1-i)}{(1-i)^2}\right)^n=(-2i)\frac{2^n}{(-2i)^n}$$

$$=(-2i)(i)^n=2i^{n+3}=2i^{n-1}.$$

（2） 设 $1+i=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$，则$\rho=\sqrt{2}$，$\theta=\frac{\pi}{4}$.

但 $(1+i)^{10000}=\rho^{10000}(\cos 10000\,\theta+i\sin 10000\,\theta)$

$(1-i)^{10000}=\rho^{10000}(\cos 10000\,\theta-i\sin 10000\,\theta)$

于是$(1+i)^{10000}+(1-i)^{10000}=2\rho^{10000}\cos 10000\,\theta$

$$=2\cdot 2^{\frac{10000}{2}}\cdot\cos\left(10000\cdot\frac{\pi}{4}\right)=2^{5001}\cos(2(1250)\pi)$$

$$=2^{5001}.$$

5.*设 S 为所有实数有序对 (x, y) 的集合，具有相等的定义：

$(x, y)=(u, v)$ 当且仅当$x=u$与$y=v$；

并设定义于 S 上的二元运算$\oplus$与$\odot$，满足具有$(x, y)\oplus(u, v)=(x+u, y+v)$的一个环的公理．若$|(x, y)|=\sqrt{x^2+y^2}$，$|(x, y)\odot(u, v)|=|(x, y)|\cdot|(u, v)|$，且$(c, 0)\odot(x, y)=(cx, cy)=(x, y)\odot(c, 0)$，则．

$(x, y)\odot(u, v)=(ux-vy, uy+xv)$.

【注】 在讨论复数系的构造时常会提出如下问题：在如下的限制下是否有多于一种的方法定义有序实数对的乘法？

（1） $(x, y)=(u, v)$必须而且只须$x=u$, $y=v$.

（2） $(x, y)\oplus(u, v)=(x+u, y+v)$.

（3） 满足域的公理.

（4） 保存关于有序对的模的古典定义连同陈述 $|(x,y)\odot(u,v)| = |(x,y)|\cdot|(u,v)|$.

（5） $(c,0)\odot(x,y)=(cx,cy)$.

这个习题实际上就是给予一个否定的回答，而且把域的限制减弱为具有条件$(c,0)\odot(x,y)=(x,y)\odot(c,0)$的环.

【证】 首先，我们注意：

$$
\begin{aligned}
(0,y)\odot(0,v) &= [(y,0)\odot(0,1)]\odot[(v,0)\odot(0,1)] \\
&= (yv,0)\odot[\cdot(0,1)\odot(0,1)] \\
&= (yv,0)\odot(m,n).
\end{aligned}
$$

这里$(m,n)=(0,1)\odot(0,1)$，因此

$$
\begin{aligned}
(x,y)\odot(u,v) &= [(x,0)\oplus(0,y)]\odot(u,v)=[(x,0)\odot(u,v)]\oplus[(0,y)\odot \\
&\quad (u,v)]=(xu,xv)\oplus\{(0,y)\odot[(u,0)\oplus(0,v)]\} \\
&= (xu,xv+uy)\oplus[(0,y)\odot(0,v)] \\
&= (xu,xv+uy)\oplus(yvm,yvn) \\
&= (xu+yvm,xv+uy+yvn).
\end{aligned}
$$

由有序对的模的定义与乘积性质，不难验证：

(a) $m^2+n^2=1$ 与

(b) $(x^2+y^2)(u^2+v^2)=(xu+yvm)^2+(xv+uy+yvn)^2$

展开(b)并重排各项，可得出结论：

(c) $(1-m^2-n^2)y^2v^2=2(m+1)xyuv+2n(uvy^2+xyv^2)$.

所以由(a)与(c)，对所有实数 x,y,u与v 我们有

$$2(m+1)xyuv+2n(uvy^2+xyv^2)=0$$

因此 $m=-1$，且$n=0$，因而 $(0,1)\odot(0,1)=(-1,0)$

且$(x,y)\odot(u,v)=(xu-yv,xv+uy)$.

6. 计算$\sqrt{-i}$，（注意：根号内是复数时，它不同于根号内是非负实数的情形，它表示一个复数的有限集）

【解】 令$\sqrt{-i}=x+iy$， 则$(x+iy)^2=-i$.

由此得 $\begin{cases} x^2-y^2=0 & (1) \\ 2xy=-1 & (2) \end{cases}$

$(1)^2+(2)^2$ 得$(x^2+y^2)^2=1$， 于是 x^2+y^2

$$=\pm\sqrt{1}=\pm1,$$

因 x,y为实数，$x^2+y^2\geqslant0$，故应取"+"号即

$$x^2+y^2=1, \tag{3}$$

(3)与(1)联立得 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, y=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$（因由(2)知$x$与$y$异号）

$$\therefore \quad \sqrt{-i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i).$$

【另解】 $\sqrt{-i}=\cos\dfrac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}+i\sin\dfrac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}$

$$=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right),（取\ k=0,1）$$

7. 计算$\sqrt{1+i}$

【解】 令$\sqrt{1+i}=x+iy$， 则 $(x+iy)^2=1+i$.

得 $\begin{cases} x^2-y^2=1 & (1) \\ 2xy=1 & (2) \end{cases}$

$(1)^2+(2)^2$得$(x^2+y^2)^2=2$.

$\therefore \quad x^2+y^2=\sqrt{2}$（因 $x^2+y^2\geqslant0$. 故取"+"）

与(1)联立得$x^2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\quad x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$.　$y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$.（由（2）知 x 与 y 同号）

最后得$\sqrt{1+i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}+i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$

【另解】 $\sqrt{1+i}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right)$.

$k=0$得$\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$

$=\sqrt[4]{2}\left(\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}+i\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}+i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$.

$k=1$得$\sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{8}\right)\right]$

$=\sqrt[4]{2}\left[-\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\right]=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}\right.$

$\left.+i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$.

8. 计算$\sqrt[4]{-1}$.

【解】 令$z^4=-1$. 则 $z^2=\pm\sqrt{-1}=\pm i$

$\therefore\quad z=\pm\sqrt{\pm i}$.

由上题知$\sqrt{-i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$.

而$\sqrt{i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$.

故$\sqrt{\pm i}=\begin{cases}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\end{cases}$

由于$\sqrt[4]{-1}$仅有四个值，故$-\sqrt{\pm i}$可不考虑，它必然与上述四个值重合，最后得

$$\sqrt[4]{-1}=\begin{cases}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i).\\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i).\end{cases}$$

【另解】 因$-1=\cos\pi+i\sin\pi$.

$\therefore\quad \sqrt[4]{-1}=\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}$.

令 $k=0,1,2,3$ 得出与上述相同的结果.

9. 假如$x+iy=\sqrt{a+bi}$试确定x与y.

【解】 由$x+iy=\sqrt{a+bi}$ 得 $(x+iy)^2=a+bi$.

由此得 $\begin{cases}x^2-y^2=a & (1)\\ 2xy=b & (2)\end{cases}$

$(1)^2+(2)^2$得$(x^2+y^2)^2=a^2+b^2$.

$\therefore\quad x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}$ (因$x^2+y^2\geqslant 0$, 故取"+")

与(1)联立得$x^2=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)$. $y^2=\frac{1}{2}\ (\sqrt{a^2+b^2}-a)$

$$\therefore \quad x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}. \quad y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

由(2)知，当$b>0$时x, y应取同号．当$b<0$时取反号．

10．复数α的n次根的所有值，都可以从它的某一个值乘上所有n次单位根来得出．

【证】设β是数α的n次根的某一个值，也就是$\beta^n=\alpha$．而ε是任何一个n次单位根：

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k=0, 1, \cdots, n-1,$$

也就是$\varepsilon^n=1$．则$(\beta n)^n=\beta^n\varepsilon^n=\alpha$．

$\therefore$ $\beta\varepsilon$是$\sqrt[n]{\alpha}$的一个值．

用n次单位根的每一个值来乘β，可得出α的n次根的n个不同的值，也就是这个根的所有的值．

例如数-8的立方根的一个值是-2，则其它两个根是$-2\varepsilon_1=1-i\sqrt{3}$．和$-2\varepsilon_2=1+i\sqrt{3}$．$\left(\varepsilon_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right.$

$$\left.=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}. \ \varepsilon_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.\right)$$

11.* 设n, m是单位根使

$$an+bm+c=0 \quad (n^2\neq1. \ m^2\neq1.)$$

这里a, b, c是非零整数，证明仅可能由$a=b=c, n=\omega, m=\omega^2$，$\omega^2+\omega+1=0$给出．

【证】我们有$-an=bm+c$，与$-a\bar{n}=b\bar{m}+c$，这两个表示式相乘，注意$\bar{n}=n^{-1}$，$\bar{m}=m^{-1}$．因为它们是单位根：

$$a^2=b^2+c^2+bc(m+m^{-1}).$$

因 $bc\neq 0$，我们得结论 $m+m^{-1}=u=$ 有理数．且$m^2-um+1=0$．因此 m 在有理数上是二次的以致若 m 是 h 次本原单位根，则只可能 $h=1,2,3,4,6$，由假设$h\neq 1$，$h\neq 2$，我们排除 $h=4$，因若 $n=i, i=-1$，则 n 是在域 $Q(i)$ 里的单位根．以致$n=\pm i$，但$a(\pm i)+bi+c\neq 0$，这样就剩下两种情形：

$$\omega^2+\omega+1=0, \quad (-\omega)^2+(-1)(-\omega)+1=0$$

这里 ω 是本原单位立方根以致 $-\omega$ 是本原六次根，这就给出希望的结果，（具有通常的交替$a=-b=c, n=\omega^2, m=\omega$.）

【注】1 的n次根（共n个）通称 n **次单位根**．它们是

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad k=0,1,\cdots,n-1$$

显然，两个n次单位根的乘积仍是一个n次单位，（因若$\varepsilon^n=1$与$\eta^n=1$，则 $(\varepsilon\eta)^n=\varepsilon^n\eta^n=1$.）又$n$次单位根的倒数也是$n$次单位根。（因设$\varepsilon^n=1$，则从$\varepsilon\cdot\varepsilon^{-1}=1$得出$\varepsilon^n\cdot(\varepsilon^{-1})^n=1$，即$(\varepsilon^{-1})^n=1$.） 因此普遍的说，**每一个 n 次单位根的乘方都是n次单位根**。而且，对于k的任何倍数 l，每一个 k 次单位根必定也是一个 l 次单位根。

但对所有n次单位根来说，设m为n 的约数（因子），其中有的单位根可能是 m 次单位根。当一个 n 次单位根，它不是一个低次的单位根时，叫它是一个 n 次**单位原根（本原单位根）**．如

$$\varepsilon_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},$$

则 $$\varepsilon_1^k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}=\varepsilon_k,$$

故ε_1的小于n的每一个乘方都不能等于 1，于是ε_1是一个n次单位原根。

ε是一个n次单位原根的充要条件是ε^k ($k=0,1,\cdots n$)互不相等，即得出所有的 n 次单位根时，ε 才是 n 次单位原根。

事实上，因在$0\leqslant k<l\leqslant n-1$时若$\varepsilon^k=\varepsilon^l$，则$\varepsilon^{l-k}=1$，于是从 $1\leqslant l$

$-k\leqslant n-1$知ε将不是一个原根，反之设ε的k乘方($k=0,1,\cdots,n-1$)各不相同，则ε是一个n次单位原根。

若ε是一个n次单位原根，则当且仅当k与n互质时，ε^k才是n次单位原根。

实因设$(n,k)=d$，若$d>1$，则有$k=dk'$，$n=dn'$，此时$(\varepsilon^k)^{n'}=\varepsilon^{kn'}=\varepsilon^{k'n}=(\varepsilon^n)^{k'}=1$。于是$\varepsilon^k$是一个$n$次单位根。

另一方面，设$d=1$，且同时设ε^k是m次单位根，而$1\leqslant m<n$，则

$(\varepsilon^k)^m=\varepsilon^{km}=1$。

因假设ε是n次单位原根，就是说只在它的方次是n的倍数时才能等于1，所以km是n的倍数，但因$1\leqslant m<n$，故可推知k和n不能互质，与所设不合，于是ε^k是n次单位原根。

由是知：n次单位原根的个数等于比n小且和n互质的正整数的个数。

12.* 设m为正整数，且由$(1+ix)^m=f(x)+ig(x)$定义实多项式$f(x)$与$g(x)$，证明对任意实数a与b，多项式$af(x)+bg(x)$仅有实根

【证】假设$z=c+id$，$d\neq0$，与$\bar{z}$为$f(x)-kg(x)=0$的解，这里$k=-b/a$。则

(1)　$g(x)=(k+i)^{-1}(1+ix)^m$.

把(1)代入$|g(z)|=|\overline{g(\bar{z})}|$中，因$k$为实，由此得出

$$|1+iz|=|1-iz|,$$

但这蕴含$d=0$，与假设不符，

【别证】方程$af+bg=0$可以写为形式：

$$(a+ib)(1+ix)^m+(a-ib)(1-ix)^m=0$$

若a与b不同为零，设$a+ib=re^{i\theta}$，对非零实数r与实数θ，则$(1+ix)^m/(1-ix)^m=e^{2i\theta}$，所以$(1+ix)/(1-ix)=e^{i\phi}$若$\phi=(2\theta+2\pi k)/m$对某个整数$k$，由此立刻得出$x=\mathrm{tg}(\phi/2)$是实

数．若a与b同为零，提出的论断显然是错误的．

13．证明：$(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)\cdots$〔至$2n$个因数〕$=2^{2n}$．

【证】原式$=\dfrac{\omega^3+1}{\omega+1}\cdot\dfrac{\omega^6+1}{\omega^2+1}\cdot\dfrac{\omega^{12}+1}{\omega^4+1}\cdots$〔至$2n$个因子〕

$$=\frac{2}{-\omega^2}\cdot\frac{2}{-\omega}\cdot\frac{2}{-\omega^2}\cdots\text{〔至}2n\text{个因子〕}$$

$$=\frac{2^{2n}}{(\omega^3)^n}=\frac{2^{2n}}{1}=2^{2n}.$$

$\left(\omega=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

14.* 若z_1，z_2，z_3是模为1的相异复数、且

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ z_1^m & z_2^m & z_3^m\\ z_1^n & z_2^n & z_3^m\end{vmatrix}=0$$

则不是两列就是两行成比例

【证】行列式为零隐含存在三个不全为零的数α,β,γ使

$$(1)\qquad\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha z_1^m+\beta z_2^m+\gamma z_3^m=0\\ \alpha z_1^n+\beta z_2^n+\gamma z_3^n=0\end{cases}$$

若$\alpha=0$，则$\beta=-\gamma$，且第二与第三列恒等，对$\beta=0$或$\gamma=0$时类似，因此我们可设$\alpha=-1$，$\beta+\gamma=1$，$\beta\gamma\neq0$，则(1)简化为(2)：$z_1^m=\beta z_2^m+(1-\beta)z_3^m$，$z_1^n=\beta z_2^n+(1-\beta)z_3^n$．于是

$$(3)\qquad\begin{aligned}&z_1^m=z_2^m=\beta(z_2^m-z_3^m).\\ &z_1^n-z_2^n=\beta(z_2^n-z_3^n).\end{aligned}$$

回想$|z_i|=1$.且取共轭，我们得

(4)　$z_2^m(z_1^m-z_2^m)=\overline{\beta}z_1^m(z_2^m-z_3^m)$,

$z_2^n(z_1^n-z_2^n)=\overline{\beta}z_1^n(z_2^n-z_3^n)$,

若 $z_2^m-z_3^m=0$. 则 $z_1^m-z_3^m=0$，见第二行与第一行成比例，若 $z_2^n-z_3^n=0$，则同样，因此比较(3)与(4)产生 $z_2^m\beta=\overline{\beta z_1^m}$，$z_2^n\beta=\overline{\beta z_1^n}$，以致$z_1^{m-n}=z_2^{m-n}$.

完全一样地，若我们解(2)对 $1-\beta$，则将得到 $z_1^{m-n}=z_3^{m-n}$，因此若置$\lambda=z_1^{m-n}=z_2^{m-n}=z_3^{m-n}$，则明显地第二与第三行成比例.

【注】 由本题可导出如下一个有趣的论断：

若三项方程 $z^n+az^m+b=0$($1\leqslant m<n$ 是整数，$ab\neq0$)有三个相异根在 $|z|=1$，则m与n有一公因子.

15.* 若A与B为复数集，设 $B-1=\{b-1:b\in B\}$，$a(B-1)=\{a(b-1):b\in B\}$，且 $A*B=\bigcap\{a(B-1):a\in A\}$，假设 $A=\{z:|z-1|\leqslant k\}$，这里 $k>1$，而且 $B=\{z:|z|\geqslant1\}$，求 $A*B$.

【解】 因 $0\in A$，$A*B\subset0(B-1)=\{0\}$，另一方面，$0\in a(B-1)$对所有a，因为$0\in B-1$，因此$A*B=\{0\}$.

16. 证明：$\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n$.当 n 为 3 的倍数时等于 2，当 n 不是 3 的倍数时等于 -1.

【证】 因$\alpha^3=\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3=1$.

$\overline{\alpha^3}=\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3=1$.

$$\therefore\quad \alpha^{3k}=(\alpha^3)^k=1.\qquad \bar{\alpha}^{3k}=(\bar{\alpha}^3)^k=1.$$

$$\alpha^{3k+1}=\alpha^{3k}\alpha=\alpha.\qquad \bar{\alpha}^{3k+1}=\bar{\alpha}^{3k}\bar{\alpha}=\bar{\alpha}.$$

$$\alpha^{3k-1}=\alpha^{-1}=\bar{\alpha}.\qquad \bar{\alpha}^{3k-1}=\bar{\alpha}^{-1}=\alpha.$$

故所证成立

17. 若$z^2=(\bar{z})^2$. 则 z 为实数或纯虚数，

【证】由$z^2=(\bar{z})^2$ 得 $z=\bar{z}$ 或 $z=-\bar{z}$.

于是得 $I(z)=\dfrac{z-\bar{z}}{2}=0$. 或

$$R(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}=0.$$

18. 若 $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta$, 则 $z^m+\dfrac{1}{z^m}=2\cos m\theta$.

【证】由 $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta$ 得

$$(z-\cos\theta)^2=\cos^2\theta-1=-\sin^2\theta.$$

$\therefore\quad z=\cos\theta\pm i\sin\theta$ 而$\dfrac{1}{z}=\cos\theta\mp i\sin\theta$.

于是 $z^m=(\cos\theta\pm i\sin\theta)^m=\cos m\theta\pm i\sin m\theta$.

$$\frac{1}{z^m}=\left(\frac{1}{z}\right)^m=\cos m\theta\mp i\sin m\theta.$$

$$\therefore\quad z^m+\frac{1}{z^m}=2\cos m\theta.$$

19. 把$z=1-\cos\alpha+i\sin\alpha$, $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$ 化为三角式

【解】因$x=1-\cos\alpha\geqslant 0$, $y=\sin\alpha\geqslant 0$, $(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$.

$\therefore\quad z=x+iy$在第一象限，