# 数学分析题解

（三）

白玉兰　彭树森　陆子采　编解

黑龙江科学技术出版社

# 数学分析题解

## (三)

白玉兰　彭树森　陆子采　编解

黑龙江科学技术出版社

一九八五年·哈尔滨

责任编辑：张宪臣
封面设计：昕　晖

# 数学分析题解

## （三）

白玉兰　彭树森　陆子采　编解

黑龙江科学技术出版社出版
（哈尔滨市南岗区建设街35号）
黑龙江省教育厅印刷厂印刷・黑龙江省新华书店发行
开本787×1092毫米1/32・印张14.625・字数310千
1985年2月第一版・1985年2月第一次印刷
印数：1—12,005

书号：13217・118　　定价：2.70元

# 目 录

## 第十章 定积分



## 第十一章 定积分的应用



## 第十二章 数项级数

# 第十章

# 定 积 分

## 内 容 提 要

### §1 定积分的概念

设$f(x)$是定义在有限区间$[a, b]$上的函数。在$(a, b)$中任意插入若干个分点，设有$n-1$个分点，记

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

这$n-1$个分点将$[a, b]$分成$n$个子区间$[x_i, x_{i+1}]$($i=0, 1, 2, \cdots, n-1$)，在每个子区间$[x_i, x_{i+1}]$上，任取一点$\xi_i$，作和式

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$，即子区间之长，这个和式称为**积分和数**。记

$$\lambda=\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}\{\Delta x_i\}$$

注意：后文中的“$\lambda$”都是这个意思。

如果不管分法如何，也不管在$[x_i, x_{i+1}]$上如何选取$\xi_i$，当$\lambda\to 0$时，$\sigma$趋于一个实数$I$，就是说，对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当$\lambda<\delta$时，

$$|\sigma-I|<\varepsilon$$

则称$I$为函数$f(x)$在$[a, b]$上的定积分，记为

$$I=\int_b^a f(x)\,dx$$

这里 $a$ 和 $b$ 分别称为积分的下限和上限。

如上定义的定积分，是德国数学家黎曼(Riemann，1826—1866)建立的，所以也叫黎曼积分。

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定积分，我们称$f(x)$在$[a, b]$上是可积的。

在上述定义中，积分下限 $a$ 小于积分上限 $b$ .如果$a>b$，$f(x)$在$[b, a]$可积，我们规定

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$$

本书中，如无特别声明，我们总是认为积分下限小于积分上限；如二者相等，则积分值为零。

**定理 1**　若函数$f(x)$在$[a, b]$可积，则$f(x)$在$[a, b]$有界。（见第 1 题）

这定理叙述了$f(x)$可积的必要条件。因此，在整章定积分中，我们只论有界函数。

## §2　定积分存在定理

设$f(x)$是定义在$[a, b]$上的有界函数。对$[a, b]$作分法

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

记

$$m_i=\inf_{x_i<x<x_{i+1}}\left\{f(x)\right\},$$

$$M_i=\sup_{x_i<x<x_{i+1}}\left\{f(x)\right\}\ (i=0,1,\cdots n-1)$$

作和式

$$s=\sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \text{ 与 } S=\sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$$

这两个和式分别称为达布 (Darboux) 小和与达布大和，或积分小和与积分大和。显然，小和与大和只与分法有关，分法定了，它们也都定了。

小和与大和有如下性质：

1. 分点增加时，大和不增，小和不减。

2. 任一小和不超过任一大和，即使是对应于不同分法的小和与大和。

3. 小和与大和所成数集$\{s\}$与$\{S\}$都是有界数集。记

$$l=\sup\{s\}, \quad L=\inf\{S\}$$

则

$$m(b-a)\leqslant s\leqslant l\leqslant L\leqslant S\leqslant M(b-a)$$

这里$m$与$M$分别表示$f(x)$在$[a, b]$上的下确界与上确界。

注意：不等式中的$s$与$S$不必是同一分法下的$s$与$S$。

**定理 2** （达布定理）

对任意的有界函数$f(x)$，恒有

$$\lim_{\lambda\to 0} s=l \text{ 与 } \lim_{\lambda\to 0} S=L$$

**定理 3** （定积分存在定理）

函数$f(x)$在$[a, b]$可积的充分必要条件是

$$L=l$$

即

$$\lim_{\lambda\to 0} s=\lim_{\lambda\to 0} S$$

或

$$\lim_{\lambda\to 0}(S-s)=0$$

记$\omega_i=M_i-m_i$，称为$f(x)$在$[x_i, x_{i+1}]$上的振幅。因此，定理 3 中所述$f(x)$在$[a,b]$可积的充要条件$\lim\limits_{\lambda\to 0}(S-s)=0$，

可表为与之等价的形式

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0$$

这个形式往往是证题时实用的、方便的形式。

**定理 4** 函数$f(x)$在$[a, b]$可积的充分必要条件是，对任给的$\varepsilon>0$与$\sigma>0$，可找到$\delta>0$，使当$\lambda<\delta$时，对应于$\omega_i\geqslant\varepsilon$的诸子区间$[x_i, x_{i+1}]$的长度之和$\sum\limits_i\Delta x_i<\sigma$。

定理 4 不过是定理 3 的变形或推论。有时 证 明 一 些题目，用它比较方便。

**定理 5** 若函数$f(x)$在$[a, b]$可积，则$f(x)$的连续点在$[a, b]$上处处稠密，就是说，$[a, b]$的任一子区间至少含有$f(x)$的一个连续点。（见第21题）

由此可见，可积函数的间断点不能“太多”。

## §3 可积函数类

1. $[a, b]$上的连续函数是可积的。

2. $[a, b]$上的有界函数$f(x)$，如果只有有限多个间断点，则$f(x)$在$[a, b]$可积；又$f(x)$虽有无限多个间断点，但这些间断点只有有限多个聚点，则$f(x)$在$[a, b]$也是可积的。（参阅第10题(a)的附注）

3. 单调有界函数是可积的。

## §4 定积分的性质

1. 若$f(x)$在$[a, b]$可积，$k$为一实数，则$kf(x)$在$[a,b]$

也可积，且有

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$$

2．若$f(x)$、$g(x)$在$[a, b]$可积，则$f(x)\pm g(x)$在$[a,b]$也可积，且有

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$$

3．若$f(x)$，$g(x)$在$[a, b]$可积，则$f(x)g(x)$在$[a, b]$也可积。

4．若$f(x)$在$[a, b]$可积，则$|f(x)|$在$[a, b]$也可积，且有

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|dx$$

5．若$a<c<b$，$f(x)$在$[a, c]$、$[c, b]$上可积，则$f(x)$在$[a, b]$也可积，且有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

反之亦成立，即谓，若$f(x)$在$[a, b]$可积，$a<c<b$，则$f(x)$在$[a, c]$、$[c, b]$上都可积，且有上列等式成立。

6．若$f(x)$在$[a, b]$可积，且$f(x)\geqslant 0$，则

$$\int_a^b f(x)dx\geqslant 0$$

7．积分第一中值定理

设$f(x)$、$g(x)$在$[a, b]$可积；$f(x)$在$[a, b]$的下确界和上确界分别为$m$和$M$；$g(x)$在$[a, b]$不变号，则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx$$

其中$m\leqslant\mu\leqslant M$

若 $g(x)\equiv 1$，则有

$$\int_a^b f(x)dx=\mu(b-a)$$

若$f(x)$在$[a, b]$连续，则存在$C$，使

$$\mu=f(c),\quad a\leqslant c\leqslant b$$

8．设$f(x)$在$[a, b]$可积，则可变上限的函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

在$[a, b]$连续。

9．设$f(x)$在$[a, b]$连续，则

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

在$[a, b]$可导，且有

$$F'(x)=f(x)$$

在区间$[a, b]$端点$a$和$b$处，$F'_+(a)=f(a), F'_-(b)=f(b)$

10．积分第二中值定理

设$g(x)$在$[a, b]$可积；$f(x)$在$[a, b]$单调减少且非负，则有$\xi\in[a, b]$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(a)\int_a^\xi g(x)dx$$

如果$f(x)$单调增加且非负，则有$\xi\in[a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(b)\int_\xi^b g(x)dx$$

若$g(x)$在$[a,b]$可积，$f(x)$在$[a,b]$单调，则有$\xi\in[a,b]$，使，

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(a)\int_a^\xi g(x)dx+f(b)\int_\xi^b g(x)dx$$

这些公式通常叫做邦纳（Bonnet）公式。

## §5 定积分的计算

**牛顿—莱布尼兹公式（Newton-Leibniz）公式**

设$f(x)$在$[a,b]$连续，$F(x)$是$f(x)$的任意一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

或记为

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

**定积分换元公式**

设$f(x)$在$[a,b]$连续，作代换$x=\varphi(t)$，这里$\varphi(t)$在某一闭区间$[\alpha,\beta]$上有连续导数$\varphi'(t)$；当$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$时，$a\leqslant\varphi(t)\leqslant b$，且$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

**定积分的分部积分公式**

设$u'(x)$，$v'(x)$在$[a,b]$连续，则

$$\int_a^b uv'dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'vdx$$

## 题 目 之 部

1．设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积，则$f(x)$在$[a,b]$上必定有界。

2．将区间$[0,10]$分为$n$个相等的子区间，求在这种分法下，函数$f(x)=2^x$在该区间上的小和与大和。（$D2182c$）

3. 分闭区间 [1,2] 为 $n$ 份，使这 $n$ 份的长构成一等比级数，以求函数 $f(x)=x^4$ 在 [1,2] 上的积分小和。当 $n\to\infty$ 时，此和的极限等于什么？ (D2183)

以适当的方法进行积分区间的分段，把积分看作是对应的积分和的极限，来计算定积分（4－7题）

4. $\int_0^x \cos t\,dt$. (D2188)

5. $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$，$0<a<b$. (D2189)

6. $\int_a^b \frac{dx}{x}$，$0<a<b$. (D2191,同16.6c)

7. 计算卜瓦松(Poisson)积分

$$\int_0^\pi \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$$

当 (a) $|\alpha|<1$； (b) $|\alpha|>1$ (D2192)

8. 设函数$f(x)$与$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续，证明

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\Delta x_i$$

$$=\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$$

其中：$x_0=a$，$x_n=b$，$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$，$x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$，$x_i\leqslant\theta_i\leqslant x_{i+1}$. $i=0,1,2,\cdots,n-1$. (D2193)

9. 设 $y=\varphi(x)$ $(x\geqslant 0)$ 是严格单调增加的连续函数。$\varphi(0)=0$；$x=\phi(y)$是它的反函数。当$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$时，证明

(a) $\int_0^a \varphi(x)\,dx+\int_0^b \phi(y)\,dy\geqslant ab$.

(b) $ab\leqslant a\varphi(a)+b\phi(b)$.

10. 判断下列函数的可积性

(a) $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上有界，它的不连续点是 $\frac{1}{n}$，$n=1,2,\cdots$.

(b) $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin\frac{\pi}{x})$ 在 $[0,1]$. (D2194)

11. 证明函数

当 $x\neq 0$，$f(x)=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]$ 及 $f(0)=0$ 于闭区间 $[0,1]$ 上可积分。 (D2196)

12. 证明狄里希莱(Dirichlet)函数

$$\chi(x)=\begin{cases}0, & \text{若 } x \text{ 为无理数}\\ 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数}\end{cases}$$

于任意区间上不可积分。 (D2197)

13. 已知
$$\begin{aligned}g(x)=&\sin^2\pi x+\sin^2\pi x\cos^2\pi x\\&+\sin^2\pi x\cos^4\pi x+\cdots\\&+\sin^2\pi x\cos^{2n}\pi x+\cdots\end{aligned}$$

问函数 $G(x)=\lim\limits_{n\to\infty}g(n!x)$ 是否可积？

14. 设 $[0,1]$ 上函数

$$f(x)=\begin{cases}2nx, & \frac{1}{n+1}<x<\frac{1}{n}\\ 0, & x=0,\ \frac{1}{n}.\quad n=1,2,\cdots\end{cases}$$

证明 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可积，并计算 $\int_0^1 f(x)dx$.

15. 设

$$f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{2}{x}\right]-2\left[\dfrac{1}{x}\right], & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

证明$f(x)$在$[0,1]$上可积；并利用$f(x)$的可积性求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{2n}{k}\right]-2\left[\frac{n}{k}\right]\right)$$

16．若函数$f(x)$在$[a,b]$可积，其积分为$I$。今在$[a,b]$内有限个点改变$f(x)$的值，使它成为另一个函数$f^*(x)$。证明$f^*(x)$也在$[a,b]$可积，且其积分值也为$I$。

17．讨论$f$，$f^2$，$|f|$三者可积性的关系。

18．若函数$f(x)$在$[a,b]$上可积分，证明存在连续函数的序列$\varphi_n(x)$　$(n=1,2,\cdots)$，使

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(x)dx.$$

19．设函数$\varphi(x)$于闭区间$[A,B]$上有定义并连续，函数$f(x)$于$[a,b]$上可积分，并且当$a\leqslant x\leqslant b$时，$A\leqslant f(x)\leqslant B$。证明函数$\varphi[f(x)]$于$[a,b]$上可积分。　(D2202)

20．若函数$f(x)$及$\varphi(x)$可积分，则函数$f[\varphi(x)]$是否必定可积分？

研究例子

$$f(x)=\begin{cases}0, & 若x=0\\ 1, & 若x\neq 0\end{cases}$$

及黎曼函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & 若x为无理数\\ \dfrac{1}{n}, & 若x=\dfrac{m}{n},\ (m,n)=1.\end{cases}\qquad (D2203)$$

21. 设$f(x)$在$[a,b]$上可积，$a_0$，$b_0$是满足$a\leqslant a_0\leqslant b_0\leqslant b$的任意实数，证明在区间$[a_0, b_0]$上至少有$f(x)$的一个连续点。

22. 设函数$f(x)$于闭区间$[A, B]$上可积分，证明函数$f(x)$有积分的连续性，即是说

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \left|f(x+h)-f(x)\right|dx=0,$$

式中$[a,b]\subset[A,B]$。 (D2204)

23. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，不取负值，且$\int_a^b f(x)dx=0$，证明$f(x)$在$[a,b]$上恒等于零。 (同16.123)

24 .设函数$f(x)$于闭区间$[a,b]$上可积分，证明等式

$$\int_a^b f^2(x)dx=0$$

当而且仅当对属于闭区间$[a,b]$内函数$f(x)$连续的一切点有$f(x)=0$时方成立。 (D2205)

25. 设$f_n(x)=\frac{1}{n}[nf(x)]$，$(n=1,2,\cdots)$，其中$f(x)$在$[a,b]$上可积，$[nf(x)]$表示$nf(x)$的整数部分。求证

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

26. 设$f(x)$在$[0,1]$可积，记$x$的小数部分为$\{x\}=x-[x]$。证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\{nx\}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx$$

27. 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n_1+n_2+\cdots+n_n}{n^2}$$

其中$n_k$表示正整数 $n$ 除以正整数 $k$ 所得的余数。

28．设$f'(x)$在$[a,b]$上可积，且

$$\Delta_n=\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left[a+\frac{k(b-a)}{n}\right]$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\Delta_n$。

29．设$f(x)$在$[a,b]$上二次可微，且$f''(x)$在$[a,b]$上可积，求$\lim\limits_{n\to\infty} n^2\Delta_n$，其中

$$\Delta_n=\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left[a+(2k-1)\frac{b-a}{2n}\right]$$

30．(a) 设$f'(x)$在$[a,b]$可积，$\int_a^b f(x)dx=I$，$S_n=\sum_{r=1}^{n} kf(a+rk)$，$k=\frac{b-a}{n}$。证明

$$\lim_{n\to\infty} n(S_n-I)=\frac{b-a}{2}[f(b)-f(a)]$$

(b) 设

$$A_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

证明

$$\lim_{n\to\infty} n(A_n-\ln 2)=-\frac{1}{4}$$

31．设$E_1$，$E_2$，$\cdots$，$E_n$是 $n$ 个区间，它们位于单位区间$[0,1]$之中，若$[0,1]$中的每个点至少属于 $q$ 个区间 $E_i$。证明$E_1$，$E_2$，$\cdots$，$E_n$ 中至少有一个区间的长度不小于$\frac{q}{n}$。