WENTI JIEJUE DE SHUXUE MOXING FANGFA

问题解决的数学模型方法

刘来福　曾文艺　编著

北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

问题解决的数学模型方法/刘来福,曾文艺编著.—北京:北京师范大学出版社,1999.8

ISBN 7-303-05143-0

Ⅰ.问…　Ⅱ.①刘…　②曾…Ⅲ.数学模型-应用　Ⅳ.022

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第24093号

北京师范大学出版社出版发行

(北京新街口外大街19号　邮政编码:100875)

出版人:谢维和

北京市黄坎印刷厂印刷　全国新华书店经销

开本:850 mm×1 168 mm　1/32　印张:8.25　字数:198千字

1999年8月第1版　1999年8月第1次印刷

印数:1～5 000　定价:10.00元

前　言

在跨世纪的教育改革的大潮中,“联系实际和加强应用”已经成为数学教育改革的一个重要的方面. 高等院校近年来普遍开设了以培养应用数学知识解决实际问题的能力为主要目的的“数学模型”课(或“数学建模”课).在基础教育界以培养应用数学的理论和方法解决实际问题的能力为目标的“问题解决”(Problem Solving)已经成为中学数学教育改革中受人关注的一个热点. 由于它的出现适应了当前科技和教育发展的形势.近20年来的发展历程表明它经受住了时间的考验,并且仍然保持着强劲的发展势头.

当今的数学已经不仅仅是超脱于一切客观事物的抽象的理论,它渗透到了社会生活的方方面面,成为一种普遍的、可以实行的技术. 科学技术的发展大大拉近了数学和现实生活的距离. 传统的只强调演绎推理的数学教学,显然已经不能满足时代的要求. 学习数学希望知道数学有什么用,希望增强应用数学去解决实际问题的本领,这已经成为青年学生共同的要求,无论是大学生还是中学生. 科学技术的发展对数学教育提出了新的挑战.

数学这门科学起源于实践,随着生产的发展和科学技术的进步而不断地得到发展;数学研究的新成就又反过来促进了科学技术的进步和社会生产的发展. 虽然数学依据自身的逻辑结构可以不断得到发展以完善本身的理论体系,但数学发展的过程中任何时刻都与科学技术的发展和社会生产的实践产生千丝万缕的联系. 数学的概念及其理论体系都有非常深厚的实际背景和广阔的应用前景,这一点是毋庸质疑的.

数学的应用实质上是数学和所研究的实际问题有机结合的结

果．一个成功的数学应用成果往往会使我们能从更高的观点认识所研究的问题．数学是各门学科都可以使用的一种科学的语言、是一个从大量客观现象中抽象出来的以理性思辩为主要特征的科学；而实际问题则变化万千、各自显示它们自己独特的特征和要求．实践证明，要想将他们成功地结合在一起，不仅有赖于应用者深厚的数学基础和他的严格的理性思维的训练，还要依赖于他们的敏锐的洞察能力、分析归纳能力以及对实际问题的深入的理解和广博的知识面．

我们传统的数学教学并没有在数学的应用上给予足够的注意和训练．过去我们经常形容数学教学是“烧（鱼的）中段”．也就是说数学主要着眼于数学内部的理论结构和它们之间的逻辑关系，着重训练学生的逻辑思维能力．而没有着意讨论和训练如何从实际问题中提炼出数学问题（鱼头）以及如何使用数学来实现实际问题提出的特殊的需求（鱼尾）．就是在“烧中段”时也主要在训练学生的逻辑思维，很少给学生揭示有关数学概念和理论的实际背景和应用的内涵．随着社会的进步和科学的发展，当前，这种做法的不适应性日益显现出来．不少人反映“学了不少数学，但是不会用它去解决实际问题．”更有甚者，认为“数学根本就没用”，大大影响了学生学习的积极性和数学素养的提高．实践表明，在接受数学教育的时候仅仅掌握数学理论是不够的，应用数学知识分析和解决实际问题的能力同样也是一个重要的数学素养，需要培养、训练、加强和提高．在数学教学中不仅要给学生“烧中段”，应该使他们在数学上得到全面的培养，要给他们“烧全鱼”．

在教学中结合教学内容穿插介绍有关数学概念和理论的实际背景及应用实例是非常必要的．它将有助于学生加深对于数学的应用特征的理解，并且能使学生得到数学应用的初步训练．但是对于应用数学知识解决实际问题的能力的培养、训练、加强和提高，仅仅通过上述的教学环节是不够的．因为上述环节的基本目的是

使学生学习数学的知识和接受必要的数学训练，所接触的应用实例的内容和训练往往是比较简单的、理想的和规范的．但在解决实际问题时，我们所面对的往往是现实问题的复杂性和不规范性．因此常常听到“学了不少数学，但是不会用它去解决实际问题”呼声．这表明“学数学”与“用数学”是不同的．在知识结构、思维方式和能力训练等方面数学应用都有它自己的特点．需要有较强的处理复杂问题时的敏锐的洞察能力以及分析归纳的能力．应该创造机会直接接触实际问题，解决实际问题，在应用中学习如何“用数学”．这方面的训练不仅青少年需要训练，就是对于系统地学习过数学理论的教师同样也是薄弱环节．

本书将结合作者本人多年来在数学应用的领域从事科学研究和教学工作的经验体会，以问题解决的基本手段——数学建模的方法为论题，目的在于通过书中内容的学习使读者能够在他面对实际问题时应用数学解决问题的能力有所提高．我们将这本书的读者范围定位于数学教育专业硕士研究生和高中数学教师，作为中学数学教师继续教育中“数学模型”（或“数学应用”）课的教材，也可以作为高等师范院校数学系“数学模型”课的教学参考书．在全书的编写体例上我们没有采用密切配合中学数学教学内容并为其选配应用例题的方式．基于前面的认识，本书的重点将放在当我们面对复杂的、不规范的实际问题时，如何增长我们的应对能力和应用数学解决实际问题的本领．书中所涉及到的数学知识略高于现行的中学数学教学内容．实践证明，这些内容的大部分在中学理科实验班讲授是可以被接受的．对于教师来说当然不会有困难．可能本书的内容与当前中学数学的教学内容的联系不甚密切．但是考虑到科学技术的发展，考虑到数学教学的改革，作为对于跨世纪的数学教师来说，掌握本书所论及的内容绝对是非常必要的．

全书共有十章，前两章论述了问题解决、数学模型、数学建模中的有关问题．第三章到第九章介绍了问题解决中常见的各种不

同的数学模型的建模和分析方法．第十章给出了六个不同的实际问题的数学模型，其中有些偏理论，而有些则更加实际．希望读者通过这些实例对如何使用数学模型解决实际问题有一个比较完整的认识．书末的附录转录了历年我国大学生数学建模竞赛的试题和北京市中学生数学知识应用竞赛的试题，以便于读者从这个侧面了解我国大学和中学数学教学改革的现状．

本书的第四、六、八章由曾文艺副教授提供初稿，其余部分和全书的统稿工作由刘来福完成．各章的内容基本上是独立的，可以根据教学需要和学生的程度进行选取．北京师范大学出版社对本书的出版给予了大力的支持，表示衷心的谢意．

如何提高中学数学教师应用数学知识解决实际的能力，从而在中学数学教学改革中加强数学知识应用的教育是一个新的课题，仍然处于探索阶段．本书也是整个探索工作中的一个尝试和努力．我们热切地希望听到读者的反馈，无论是批评指正，还是建议完善．我们认为这些都将是对这一尝试的鼓励和促进．

此书系北京市普通高等学校教育教学改革试点滚动支持项目的立项成果．

编著者

于北京师范大学数学系

1999 年 5 月

作 者 简 介

刘来福，北京师范大学数学系教授、博士生导师。北京数学会副理事长，中国农业应用数学会名誉理事长，中国工业与应用数学会理事。全国大学生数学建模竞赛北京赛区组织委员会副主任。从事应用数学方面的教学和研究工作。著有《作物数量遗传》，《生物统计》，《数学模型与数学建模》，在国内外发表研究论文70余篇。

曾文艺，1966年出生，北京师范大学数学系副教授。从事应用数学方向的教学和科研工作，著有《数学模型与数学建模》。目前发表研究论文20余篇。

内容简介

本书是结合作者多年来在数学应用的领域从事科学研究和教学工作的经验体会，以问题解决的基本手段——数学建模的方法为论题而写成的。本书的重点在于如何提高读者应用数学解决实际问题的本领，使读者应用数学知识解决实际问题的能力有所提高。

全书共十章，前两章论述了问题解决、数学模型、数学建模中的有关问题；第三章到第九章介绍了问题解决中常见的各种不同的数学模型的建模和分析方法；第十章给出了六个不同的实际问题的数学模型，其中有些偏重理论，而有些则更加实际；书末的附录转录了历年我国大学生数学建模竞赛的试题和北京市中学生数学知识应用竞赛的试题。

本书适用于数学教育专业硕士研究生和高中数学教师，可作为中学数学教师继续教育中“数学模型”（或“数学应用”）课的教材，也可作为高等师范院校数学系“数学模型”课的教学参考书。

责任编辑　潘淑琴
封面设计　孙　琳

目　　录

第一章

问题解决与数学模型

1.1 数学的发展与数学教育的改革

众所周知，数学最引人注目的特点是它的思维的抽象性、推理的严谨性和应用的广泛性. 这是在数学发展的漫长的历程中逐渐形成的. 它来源于人们生产和生活的需要，并对其中有关的空间结构、数量关系的共性不断地抽象、升华而成当今的数学. 它的出现为我们在更深的层次上认识世界提供了一条重要的途径. 它的抽象性和严谨性的特点也成为我们科学地思维和组织构造知识的一个有效的手段；也是使数学作为一门科学而广为人知的特点之一. 数学的广泛应用性则为各门学科以及人们的生产、生活和社会活动在定量方面向深层次发展奠定了基础. 20 世纪以来，由于计算机的迅速发展和普及，大大增强了数学解决现实问题的能力. 数学向社会、经济和自然界各个领域的渗透扩展了数学与实际的接触面. 数学在人们社会生活中的作用起了革命性的变化. 在当今的时代，“国家的繁荣富强，关键在于高新的科学技术和高效率的经济管理.”高新技术的基础是应用科学，而应用科学的基础是数学. 高技术的出现使得数学与工程技术之间在更广阔的范围内和更深刻的程度上直接地相互作用，把我们的社会推进到数学工程技术的新时代. 数学以及数学的应用在科学技术、经济建设、商业贸易和日常生活中所起的作用将愈来愈大. 数学科学作为技术改进、经济发展以及工业竞争的推动力的重要性也日益显现出来. 当前，数学已经从传统的自然科学和工程技术的基础渗入到现代社会与经

济的各个领域，逐渐成为它们不可缺少的支柱之一. 近 30 年来，数学已经开始大步地从科学技术的幕后直接走到前台，出现了在经济与产业中大显身手的“现代数学技术”. 学术界在探讨数学科学的技术基础及其对经济竞争力的作用时也指出：“在经济竞争中数学是不可少的，数学科学是一种关键性的、普遍的、能够实行的技术.”“高技术的出现把我们的社会推进到数学技术的时代.”数学的应用特征在当今就显得更加突出和重要.

面临新技术革命的挑战，世界各国之间基于高科技的经济竞争日趋激烈. 一个国家要想在竞争之中立于不败之地，关键在于掌握高新科学技术和培养高素质人才. 数学学科在发展高新技术以及培养高科技人才和提高民族素质中占有特殊重要地位. 世界各国政府都把数学教育的发展和改革看成是新世纪能否在科学技术和经济的激烈竞争中战胜对手的一个极为重要的环节. 20 世纪的后半叶，人们一直尝试对数学教育进行改革，如：众所周知的 60 年代的“新数学运动”和 70 年代的“回到基础”等. 这些试验都因脱离了学生的实际和科学技术发展的实际而失败. 基于这两次数学教育改革的经验和教训，到 80 年代，美国数学教育界又提出新的口号，称为“问题解决(Problem Solving)”. 1980 年美国全国教师联合会(NCTM)在一份指导性文件《行动的议程》(An Agenda for Action)中率先指出“必须把问题解决作为 80 年代中学数学的核心”，“应当在各年级都介绍数学的应用，把学生引到问题解决中去”，“在解决问题方面的成绩如何，将是衡量数学教育成败的有效标准.”这里的“问题解决”主要是指用数学的理论和方法解决实际问题的能力. 因此这个口号的实质是在数学教育中要加强应用数学解决实际问题的能力的培养. 它不仅使得数学教育适应了当前数学发展的特点，还弥补了在过去的数学教育中，只把数学理解为训练人们科学思维的工具，在教学上单纯进行演题、运算的训练，忽视应用、忽视数学同其他科学的联系的不足. 因此“问题解决”的

提法越来越受到人们的青睐和重视，目前已经成为国际数学教育的一大热点. 1982 年，英国数学教育的指导性文件《Cockcroft 报告》指出“应将问题解决作为课程论的重要组成部分”，强调“数学只有在解决各种实际问题的情况下才是有用的.”日本的数学教育界也普遍认为要把数学教育的重点放在问题解决上，并且把提高问题解决的能力纳入了 1994 年实施的《中小学课程改善的方案》. 1988 年召开的第六届国际数学教育大会就把“问题解决、建模和应用”列入大会七个主要研究的课题之一. 认为“问题解决、建模和应用必须成为从中学到大学所有学生的数学课程的一部分”. 进入 90 年代，美国仍在提倡“问题解决”，它表明今天这一改革仍以强劲的势头不断地深入发展. 回顾我国数学教育的改革和发展，大体上也经历了和国际上一致的过程. 当前中小学的“应试教育”仍严重阻碍着教育改革的步伐，必须进行改革. 改革中，国际上的这个趋势是我们必须重视的事实.

1.2 问题解决与数学模型

在《行动的议程》这份文件中对数学的“问题解决”的内涵作了进一步的阐述：“数学上‘问题解决’这个词汇应当发展和扩充到包括各方面数学应用的广泛策略、过程和描述模型. 离开应用的计算活动不能叫问题解决. 问题解决的定义不应当局限于通常的‘应用题’”. “问题解决包括把数学应用于现实世界，为现在和将来的理论和实践科学服务，和解决伸延到数学科学本身的前沿中的问题”. 大体说来，有以下的特点：一是创造性，它往往是非常规的. 由于问题解决一般讨论的是现实世界中的实际问题，现实世界的复杂性往往使得所提的问题并不像常规的“应用题”那样规范，后者一般都是数学算法或法则的直接套用. 而前者一般不是靠熟练操作就能完成的，需要较多的创新的工作. 二是应用性，即给出的问

题往往不是数学化的“已知”、“求证”的模式，而是给出一种现实的情景，一种实际的需求，以训练学生面对“现实的实际问题”，选择适当的数学方法解决问题的能力．三是开放性，问题不一定有解，答案不必唯一，条件既可能不足又可以冗余，有较强的探究性．这样一个对“问题解决”的内涵及其特征的理解，实际上与当前在数学教学上经常提到的“数学模型”或“数学建模”的内涵和特点是一致的．因此我们可以认为“数学模型”是实现“数学问题解决”的基本手段和主要内容，甚至可以把“数学模型”理解为“数学问题解决”的同义语．掌握了常见的数学模型和数学建模的方法将会激发学生的创造能力，有助于应用数学解决实际问题能力的提高．从而达到加强“数学问题解决”教育的目的．这也是本书的指导思想和基本定位．

“模型”是人们用以认识世界的重要手段之一．这里的模型是针对原型而言的．所谓原型是指人们所关心和研究的实际对象．而模型是人们为一定的目的对原型进行的一个抽象．例如大家熟知的航空模型就是飞机的一个抽象．除了机翼与机身的形状及其相对位置关系外的一切因素，包括飞机的实际大小都在抽象的过程中被忽略掉了．虽然它与原型的实际飞机已经相距甚远，但是在飞行过程中机翼的位置与形状如何影响飞机在空中平稳地滑翔可以给人们以启迪．城市的交通图是这个城市的一个模型．在这个模型中城市的人口、车辆、树木、建筑物的形状等都不重要．但图中所展示的街道和一目了然的公共交通线路是任何一个实际置身于城市中的人很难搞清楚的．由此可见模型来源于原型，但它不是对原型简单的模仿，它是人们为了深刻地认识和理解原型而对它所作的一个抽象、升华．有了它就可以使我们通过对模型的分析、研究加深对原型的理解和认识．

在数学的“问题解决”中，应用数学知识去解决各门学科和社会生产中的实际问题，首先要把实际问题中的数学问题明确地表

述出来，也就是说，要通过对实际问题的分析、归纳给出用以描述这个问题的数学提法；然后才能使用数学的理论和方法或者计算机进行分析、得出结论；最后再返回去解决现实的实际问题. 由于实际问题的复杂性，往往很难把现成的数学理论直接套用到这些问题上. 必须要在数学理论和所要解决的实际问题之间构架一个桥梁加以沟通，以便把实际问题中的数学结构明确地表示出来. 这个桥梁就是数学模型.

一般来说，*所谓数学模型是指通过抽象和简化，使用数学语言对实际现象的一个近似的刻划，以便于人们更深刻地认识所研究的对象*. 数学模型不是对现实系统的简单的模拟，它是人们对现实对象进行分析、提炼、归纳、升华的结果，是以数学的语言来精确地描述现实对象的内在特征，以便于通过数学上的演绎推理和分析求解深化对所研究的实际现象的认识. 例如力学中著名的牛顿第二定律使用公式 $F=m\mathrm{d}x^2/\mathrm{d}t^2$ 来描述受力物体的运动规律就是一个成功的数学模型，其中 $x(t)$表示运动的物体在时刻 t 的位置，m 为物体的质量，而 F 表示运动期间物体所受的外力. 模型忽略了物体的质地、形状、大小和运动过程中的次要的干扰因素. 由于它抓住了物体受力运动的主要因素，这一定律的出现大大深化了力与物体运动规律的研究工作. 又如描述人口 $N(t)$ 随时间 t 自由增长过程的数学模型 $\mathrm{d}N(t)/\mathrm{d}t=rN(t)$，尽管由于它忽略了性别、年龄、社会、经济和自然界的约束条件等许多与人口增长有密切关系的因素，相对于实际人口的动态来说大大地被简化了. 但它所揭示出的人口成等比级数的增长的结论是人们不得不面对的严酷事实.

数学模型并不是新的事物，很久以来它就一直伴随在我们身边. 可以说有了数学并要用数学去解决实际问题时就一定要使用数学的语言和方法去近似地刻划这个实际问题，这就是数学模型. 数(整数、有理数、实数等)、几何图形、导数、积分、数学物理方程以

至于广义相对论、规范场等都是非常成功的数学模型. 运筹学以及统计学的大部分内容都是关于数学模型的讨论和分析. 可以说在数学的发展进程中无时无刻不留下数学模型的印记,在数学应用的各个领域到处都可以找到数学模型的身影. 只不过在当前随着科学技术的发展,各门学科的定量化分析的加强以及使用数学工具来解决各种问题的要求日益普遍的条件下,数学模型作为数学实现其技术化职能的主要手段之一,它的作用显得愈发突出,从而受到了更加普遍的重视.

大量的事实告诉我们,任何一个数学模型都有它自己的实际背景,都是从特定的实际问题中抽象出来的. 与数学理论不同,离开了实际背景而定义的或想象出来的数学表达不可能准确地描述特定的实际问题. 因此,一个好的数学模型必须具有实际背景、有明确的针对性,要接受实践的检验,并且被证明是正确的、可用的. 这就是它的实践性. 这种实践性并非就事论事地讨论实际问题,而是用数学的语言描述实际问题的本质特征的一次升华. 这实质上是一个抽象的过程. 这个抽象不同于数学理论中的抽象思维. 它是要求人们从实际问题中抽象出其中的数学内涵. 应用性是数学模型的另一个重要的特征. 我们组建数学模型的目的是要应用数学的知识去解决实际问题. 必须要注意到实际问题的要求,必须要使对模型的分析和讨论落实到使所研究的实际问题得到满意的解答上,才能实现我们建模的目的. 有时,所组建的模型可能是成功的,但当我们使用数学手段分析这个模型时忽视了实际问题的需求,很可能得到的结果并不是问题所需要的,这时很难说达到了建模的目的. 数学理论上的自然的结论和常规的研究方法与实际问题的要求并不总是一致的. 因此模型的实用价值即它的实用性是不容忽视的一个特征. 所谓综合性是指一个数学模型所牵涉到的数学不一定只是数学的某一个分支的内容,往往是数学知识的的综合的应用. 特别是遇到参数估计、模型分析、模型检验和数值结

果的计算时更是如此. 而应用于一个实际问题的数学模型也不一定只是一个模型,它可能是多个数学模型一步步地综合分析的结果.因此学习数学模型需要具备较宽的数学基础知识,而使用数学模型解决实际问题时也应该是有关数学知识的一个综合的应用.

一个好的数学模型不在于它使用了多么高深的数学. 作为一个成功的模型应该有较强的实际背景,最好是直接针对某个实际问题的;模型应该是经过实际检验表明是可以接受的;模型应该能够使我们对所研究的问题有进一步的了解;而且也应该是尽可能的简单以利于使用者理解和接受的.

1.3 模型举例

例 1.1 包扎管道

问题 水管或煤气管经常需要从外部包扎以便对管道起保护作用. 包扎时用很长的带子缠绕在管道外部. 为节省材料,如何进行包扎才能使带子全部包住管道而且带子也没有发生重叠.

这是一个标准的数学问题. 在这个问题中为使带子全部包住管道且带子之间互不重叠,带子的宽度、管道的粗细和缠绕的角度之间应该存在着一定的关系. 找出这个关系就可以进一步讨论如何根据管道的粗细和带子的宽度确定包扎的方式.

为简化对这个问题讨论,必须要作如下两个假设:

1. 管道是直的其横截面都是圆,而且粗细一致.

2. 带子的宽度是不变的,可以缠绕得包住全部管道且带子互不重叠.

分析 用 W(cm)表示带子的宽度,C(cm)表示圆管的周长,θ(°)表示带子的倾斜方向与管道母线垂线的方向之间的夹角.

可以通过几何上的分析和理论推导得到这三个量之间关系的数学表达式. 我们设想将缠绕在管道上的带子沿横截面的方向截

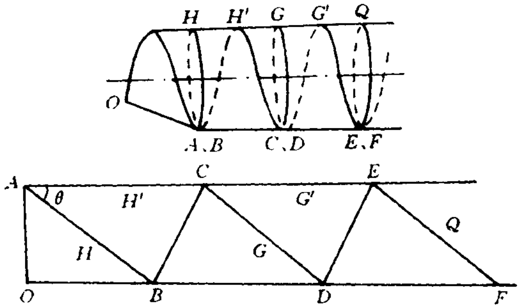

图 1.1 管道包扎带的平面展开形状

下一段展开，平放在平面上(如图 1.1 所示). 注意 A,B 是管道上的同一个点. 很容易得出这三个变量之间的关系式为

$$W = C\sin\theta.$$

思考

(1) 这是一个简洁而明快的数学表达式. 但进一步推敲就发现，真正把它用于实践工作中去是困难的. 因为在管道缠绕工作中角度 θ 实际上很难测量. 几乎没有管道包扎工人在工作中使用这个公式. 如何组建数学模型使它更具有实用价值?

(2) 能否使所组建的模型给我们一些更深入的结论? 譬如，给定管道的粗细和带子的宽度，对一定长度的管道，使用模型计算出需要准备多长带子就够用了.

例 1.2 交通路口的红绿灯

问题 在一个由红绿灯管理下的十字路口，如果绿灯亮 15 s，问最多可以有多少汽车通过这个交叉路口.

分析 这个问题提得笼统含混. 因为十字路口的交通现象是很复杂的：通过路口的车辆的多少依赖于路面上汽车的型号、数量