中等专业学校教学用书

测量平差

高月华　赵新吾　编

煤炭工业出版社

内 容 提 要

本书是煤炭中专煤矿测量专业基本教材。全书共七章，主要介绍测量平差的基本理论与方法。书中公式的形式及推导过程，采用矩阵方法，从而克服了传统方式繁冗的缺点。书中还介绍了近代出现的相关平差基本知识，书后附录二中简介了矩阵代数基础知识，俾便帮助读者理解和掌握本书内容。

本书除作为中等专业学校该课程之教材外，亦可供生产现场测量工作者参考。

责任编辑：王 大 彰

中等专业学校教学用书
测 量 平 差
高月华　赵新吾 编
*
煤炭工业出版社　出版
（北京安定门外和平里北街21号）
煤炭工业出版社印刷厂　印刷
新华书店北京发行所　发行
*
开本 $787\times1092\text{mm}\ ^1/_{16}$　印张$12\ ^3/_4$
字数 303 千字　印数1—2,580
1988年 8 月第 1 版　1988年 8 月第 1 次印刷
ISBN 7-5020-0197-2/TD·187
书号 3040　定价 2.35元

前　言

本书是按照1981年审定的煤炭中等专业学校《测量平差》课程教学大纲精神编写的。鉴于数理统计理论及方法在平差中得到日益广泛的应用，本书在公式推导与表现形式上，采用矩阵方法，从而克服了传统方法繁冗的缺点，使整个计算体系更加严密简捷，便于理解和记忆。考虑到测量平差理论近年来的发展，编写了相关平差一章，主要介绍一些基本知识，以利读者扩大眼界开拓思路。另外，为了帮助数学基础较差的读者理解与掌握本书内容，编写了矩阵代数基础知识，置于书后作为附录二。书中冠以＊号之章节为选讲内容，各校可根据学生基础知识水平及学时情况灵活掌握讲述程度。

本书由北京煤炭工业学校高月华编写第一、二、三、四、五、六章及附录一，由赵新吾编写第七章与附录二。全书由高月华统稿。

本书是煤炭中等专业学校《测量平差》课教材，亦可供其他系统中等专业学校相应课程之教材，或供生产现场测量工作者参考。

本书编写时吸收了兄弟学校教师提出的许多宝贵意见与建议，在此仅向这些同志表示衷心的感谢。由于作者水平所限，书中纰漏在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

1987年8月

目　　录

第一章　绪　论

测量平差是关于处理观测数据的理论和方法的一门课程。从十九世纪初开始，经过一百多年的发展，测量平差已形成较完整的理论系统和整套方法。特别是近年来，数理统计理论与方法被引进测量平差领域，充实了平差理论，使之更加严密。

测量平差是一门技术基础课，因为测量平差理论是解决各种测量问题的基础，平差方法更是测量人员离不开的手段。学习这门课不仅是获得平差的基本知识，而且有助于学好其他专业课程，有助于提高逻辑思维能力。

测量平差的主要任务可以概括为两个方面：一是从观测数据求出最可靠的成果；另一方面是评定观测值及其他测量成果的精度。

第一节　观测误差的产生及分类

当对某量进行重复观测时，就会发现测得的结果总是不一致，相互之间存在一些差别。例如对某一段距离重复丈量若干次，量得的长度往往不相等；另一种情况是，如果知道某几个量之间理论上应该满足一定关系，但观测后，也会发现观测结果往往不能满足应有的理论值，例如观测一平面三角形的三个内角，其和不等于180°，这种差别称为不符值。

在同一量各观测值之间，或各观测值与其理论值之间存在差别的现象，在测量中是普遍存在的，这些差别之所以产生，是由于观测值中存在观测误差的缘故。

产生误差的原因，概括为下列三方面。

1）测量仪器　测量工作是利用仪器进行的，由于每种仪器的精度有一定限度，因而限定了观测值的精度。如用只刻有厘米分划的普通水准尺进行水准测量时，就难以保证厘米以下读数正确无误；同时仪器本身也有一定的误差，如水准仪的视准轴不平行于水准轴，水准尺的分划误差等等。因此使用这样的水准仪和水准尺进行观测，便使得观测的结果产生误差。

2）观测者　观测过程中不论观测者如何仔细，但因观测者感觉器官的鉴别能力有一定的局限性，所以在仪器安置、照准、读数等方面都会产生误差。另外观测者的工作态度和技术水平，也是产生误差的一个重要原因。

3）外界条件　观测时所处的外界条件，如温度、湿度、风力、大气折光……等因素都会直接影响观测值；而且，随着温度的高低，湿度的大小，风力的强弱以及大气折光的不同，它们对观测结果的影响也随之不同，因而在这样的观测条件下进行观测，就必然使观测的结果产生误差。

上述三个方面的因素是误差的主要来源，这三方面的综合影响称为观测条件。显然，观测条件好一些，观测中所产生的误差就可能小一些，观测成果质量就高一些。反之观测条件差一些，观测成果的质量就低一些。如果观测条件相同，观测成果的质量也就可以说是相同的。所以，观测成果的质量高低也部分地反映了观测条件的优劣。

但是，由于受到上述种种因素的影响，观测的结果就会产生这样或那样的误差。从这

一意义上来说，在测量中产生的误差是不可避免的。当然在客观条件允许的限度内，测量工作者可以而且必须确保观测成果具有较高的质量。

按误差的性质，可将观测误差分为系统误差和偶然误差两类。

1）系统误差　在相同的观测条件下，作一系列的观测，如果观测的误差在大小、符号上表现一致性，或者按一定规律变化，或者为某一常数，这种误差称为系统误差。例如，用具有某一尺长误差的钢尺量距时，由尺长误差所引起的距离误差与所测距离的长度成正比地增加，距离愈大，所积累的误差也愈大；又如经纬仪因校正或整置不完善而使所测角度产生误差等等，这些都是由于仪器不完善或工作前未经检验校正而产生的系统误差。又如，用钢尺量距时的温度与检定钢尺的温度不一致而使所测距离产生误差；测角时因大气折光影响而产生的角度误差等等，这些都是外界条件所引起的系统误差。此外，如某些观测者在照准目标时，总是习惯于把望远镜十字丝对准目标中央的某一侧，也会使观测结果带有系统误差。

2）偶然误差　在相同的观测条件下作一系列观测，如果误差在大小和符号上都表现出偶然性，即从单个误差看，该列误差的大小和符号没有规律性，就大量的误差总体而言，具有一定的统计规律，这种误差称为偶然误差。例如，在用经纬仪测角时，测角误差是由于照准误差、读数误差、外界条件变化所引起的误差、因仪器本身不完善而引起的误差等等误差综合影响的结果。而其中每一次误差又是由于许多偶然因素所引起的小误差的代数和，如照准误差可能是由于脚架、觇标的晃动或扭转，风力风向的变化，目标的背影，大气折光和大气透明度……等偶然因素影响所产生的各项误差的总和，而每项微小误差又随着偶然因素影响的不断变化，其数值忽大忽小，其符号或正或负，这样，由它们所构成的总和，就其个体而言，无论是数值的大小或符号的正负都不能预知，这种性质的误差称为偶然误差。

系统误差和偶然误差在观测的过程中总是同时产生的。当观测值中有显著的系统误差时，偶然误差就居于次要地位，观测误差就呈现出系统性，反之，即呈现出偶然的性质。

系统误差对于观测结果的影响一般具有累积的作用，它对成果质量的影响也特别显著。在实际工作中，应该采用各种方法来消除系统误差，或者使其对观测结果的影响减小到实际上可以忽略不计的程度。例如，在进行水准测量时，使前后视距相等，以消除由于视准轴不平行于水准轴所引起的观测高差的系统误差；预先对量距使用的钢尺进行检定，求出尺长误差的大小，对所量距离进行尺长改正，以消除尺长误差对所量距离所引起的系统误差等等，都是消除系统误差的方法。

第二节　测量平差的任务

由于观测结果不可避免的存在偶然误差的影响，而这种影响不可能通过改变测量方法或加改正数来消除。因此在实际工作中，为了提高测量成果的质量，同时也为了检查和及时发现观测值中有无错误存在，通常要使观测值的个数多于未知数的个数，多余的部分称为多余观测。例如对一条导线边，丈量一次就得出其长度了，但实际上总要丈量二次以上；一个平面三角形，只需要观测其中的两个内角，即可决定它的形状，但通常是观测三个内角。由于偶然误差的存在，进行多余观测后必然出现观测结果不相一致，或不符合应有的关系而产生不符值。因此，必须对这些带有偶然误差的观测值进行处理，消除不符值，从

而取得被观测量的最可靠的结果。根据具有不符值的原始观测值，采取一定的方法求出被观测量的最可靠结果，就是测量平差的一个主要任务。

测量平差的另一任务，就是评定观测值以及最可靠值的精度。从而了解这些误差对测量结果的影响程度，判断测量成果的质量是否能够满足生产建设的要求。

概括起来说，测量平差的任务就是：

（1）对一系列带有偶然误差的观测值，采用合理的方法消除它们之间的不符值，求出未知量的最可靠值。

（2）运用合理的方法来评定测量成果的精度。

第二章 误差与精度

第一节 偶然误差的特性

实验证明，任一被测的量，客观上总是存在着一个能代表其真正大小的数值，这一数值就称为该量的真值。

设对某量进行了 n 次观测，其观测值为

$$L_1、L_2、L_3\cdots\cdots L_n$$

由于观测值带有一定的误差，因此，每一观测值与真值X之间必存在一差数，即

$$\Delta_i = X - L_i \qquad (i=1、2\cdots\cdots n) \tag{2-1}$$

式中Δ称为真误差，简称为误差。在第一章中已经指出测量平差中研究的观测值应是排除了系统误差影响的，因此Δ仅指偶然误差。

偶然误差就其误差的大小或符号而言，表面看是没有规律的，呈现出偶然性，但是，根据无数的测量实践，人们发现在相同观测条件下，大量偶然误差却呈现出一定的规律性，下面通过实例来说明这种规律性。

在相同的观测条件下，独立观测了358个三角形的全部内角。由于观测值带有误差，故三内角观测值之和不等于它们的真值180°，根据式（2-1），则各三角形内角和的真误差为

$$\Delta_i = 180° - (L_1 + L_2 + L_3)_i \qquad (i=1、2\cdots\cdots 358)$$

式中的 $(L_1+L_2+L_3)_i$表示各三角形内角和的观测值。现取误差区间$d\Delta$间隔为 0.20″，将这一组误差按其正负号与误差值的大小排列，组成表2-1。

表 2-1

误差的区间 (″)	正Δ个数	负Δ个数	总　数
0.00～0.20	45	46	91
0.20～0.40	40	41	81
0.40～0.60	33	33	66
0.60～0.80	23	21	44
0.80～1.00	17	16	33
1.00～1.20	13	13	26
1.20～1.40	6	5	11
1.40～1.60	4	2	6
1.60以上	0	0	0
	181	177	358

从表2-1这组误差的分布可见有以下几点性质：绝对值小的误差比绝对值大的误差多；绝对值相等的正负误差的个数相近；误差的绝对值有一定的限值。

上述规律在大量的测量结果中都显示出来，因此从大量的实际观测资料中，总结出偶

然误差的下面几个特性。

1）在一定的观测条件下，偶然误差的绝对值不会超过一定的限值；

2）绝对值较小的误差比绝对值大的误差出现的可能性较大；

3）绝对值相等的正误差和负误差出现的机会相等；

4）偶然误差的算术平均值，随着观测次数的无限增加而趋向于零，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta_1+\Delta_2+\cdots+\Delta_n}{n}=0$$

为了简便，在平差中经常用〔 〕表示和数，故上式通常写成

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n}=0 \tag{2-2}$$

第四个特性是由第三个特性导出的。第三个特性告诉我们，在大量偶然误差中，正负误差有互相抵消的性能，因此当 n 无限增大时，该误差的简单平均值必然趋向于零。

为了表达误差分布的情况，除了采用上述误差分布表的形式外，还可以利用图形来表达，图2-1就是根据表2-1的数据绘制的。以误差的大小为横坐标，误差出现的个数为纵坐标绘成。在这个曲线图上，就比较形象地表现出误差的大小与出现的机会间的规律。

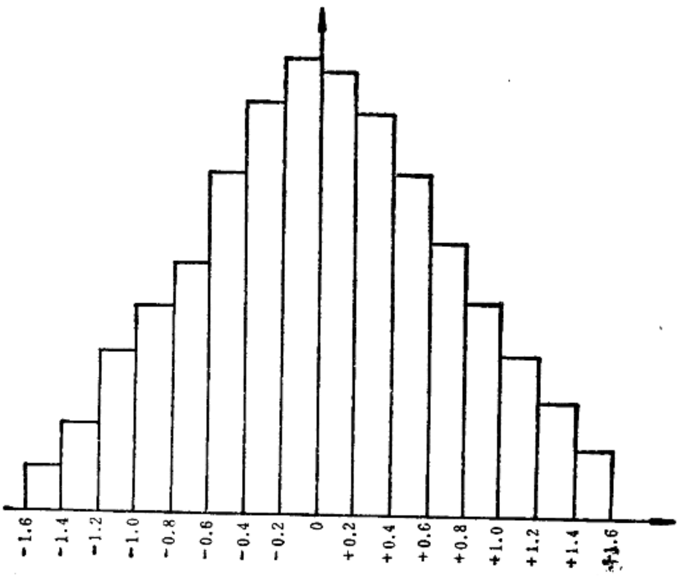

图 2-1

第二节 衡量精度的标准

由于观测中不可避免地存在着偶然误差，它们的观测结果往往是不相一致的。为了说明观测结果的精确程度，必须建立一种衡量观测精度的统一标准。

衡量精度的标准有四种，分别介绍如下：

一、平均误差

取一组观测值真误差绝对值的算术平均数来衡量精度，即

$$\theta=\frac{|\Delta_1|+|\Delta_2|+\cdots\cdots+|\Delta_n|}{n}=\pm\frac{[\Delta]}{n} \qquad (2\text{-}3)$$

θ称为平均误差。式中n为真误差的个数。

采用平均误差可以表示精度是很显然的，如果Δ_i小，θ也小，则精度高。

〔例 1〕 观测求得九个三角形内角和的真误差为$+7''$、$-2''$、$-8''$、$+4''$、$-5''$、$+6''$、$-4''$、$-3''$、$+4''$，求其平均误差。

解：依公式（2-3），有

$$\theta=\frac{9+2+8+4+5+6+4+5+4}{9}$$

$$=\pm 4.8''$$

二、中误差

设同一未知量的多次观测结果是L_1、L_2、……L_n，每个观测结果相应的真误差为Δ_1、Δ_2、……Δ_n，我们取各个真误差之平方和的平均数的平方根作为衡量精度的标准，即

$$m=\pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \qquad (2\text{-}4)$$

称为中误差，也就是观测值的中误差。式中n为真误差个数。

从中误差的定义可以清楚地看出中误差与真误差之间的关系，中误差并不等于每个观测值的真误差，它仅是一组真误差的代表。显然，该组的真误差愈大，中误差也愈大，精度就愈低，反之亦然。

〔例 2〕 有一列观测值，其相应的真误差为$0''$、$+1''$、$+7''$、$-2''$、$+1''$、$-3''$、$+1''$、$0''$、$-5''$、$-1''$，求其中误差。

解：依公式（2-4）有

$$m=\pm\sqrt{\frac{0+1^2+7^2+(-2)^2+1^2+(-3)^2+1^2+0+(-5)^2+(-1)^2}{10}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{91}{10}}=\pm 3.0''$$

下面对两种衡量精度的标准进行比较。当n很大时，用平均误差，中误差衡量精度是同样可靠的。当n为有限次数时，用中误差衡量精度更可靠一些。因为中误差能够较好的反映大误差的存在，对观测值影响较大的正是这些大误差。设有两组观测误差如下：

第一组$+3''$、$+2''$、$+4''$、$+2''$、$-1''$、$0''$、$+4''$、$+3''$、$-2''$、$-3''$

第二组$0''$、$-1''$、$+7''$、$-2''$、$-1''$、$+1''$、$-8''$、$0''$、$+3''$、$+1''$

现求两组观测结果的平均误差及中误差。

解：依公式

$$\theta_1=\frac{3+2+4+2+1+0+4+3+2+3}{10}=\pm 2.4''$$

$$\theta_2=\frac{0+1+7+2+1+1+8+0+3+1}{10}=\pm 2.4''$$

求出两组误差的平均误差θ_1和θ_2相同。但是，仔细分析以上两组误差，可以看出，第一组误差互相差异不大，或者说离散程度小，误差绝对值最大为4，误差分布得较均匀；第二组误差离散程度较大，误差绝对值最大为8，所以第一组观测结果应该比第二组观测结果精度高，而用平均误差衡量精度，却不能反映这种差别。若用中误差来衡量精度，则

$$m_1 = \pm\sqrt{\frac{72}{10}} = \pm 2.7''$$

$$m_2 = \pm\sqrt{\frac{130}{10}} = \pm 3.6''$$

计算表明，第一组结果比第二组精度高，从而正确地反映了两组观测的精度。

我国统一采用中误差作为精度衡量的标准。通常以$L \pm m$表示L值带有的中误差。

三、极限误差$\Delta_{限}$

前已指出，中误差不是代表个别误差的大小，但由中误差的定义可知，它是代表一组同精度观测误差的几何平均值，中误差愈小，即表示在该组观测中，绝对值较小的误差愈多。根据误差理论及实践证明，在大量同精度观测的一组误差中，绝对值大于两倍中误差的偶然误差，其出现的可能性为5%；大于3倍中误差的偶然误差，其出现的可能性仅有3‰，即大约在300多次观测中，才可能出现一个大于3倍中误差的偶然误差。但在实际工作中，测量的次数总是不会太多的，可以认为大于3倍中误差之偶然误差实际上是不可能出现的。因此，通常是以2倍中误差作为偶然误差的极限值，称为极限误差，即

$$\Delta_{限} = 2m \tag{2-5}$$

由于实际工作要求的不同，有时也采用$3m$作为极限误差。

如果在测量工作中，某误差超过了极限误差，就可以认为它是错误，该观测值应舍去不用。

由上述可知，中误差m虽然不代表某一个别误差Δ的大小，但由它可以估计出Δ的实际可能范围，即一般可认为$|\Delta| < 2m$。反之，如果需要测量某一量的值，要求误差不大于2cm，那么，就可以用$m = \pm 1$cm的精度进行观测。这时，在考虑观测误差大小的问题上，中误差提供了有效的依据。

四、相对误差

有时，单靠中误差还不能完全表达观测结果的好坏，例如分别丈量了1000m及80m的两段距离，观测值的中误差均为2cm。表面上两者观测精度相同，但就单位长度而言，两者精度并不相同，显然，前者高于后者。为此，通常又采用另一种衡量精度的办法，即采用相对中误差。相对误差是中误差与观测值之比值。如上述两段距离，前者的相对中误差为$\frac{2}{100000} = \frac{1}{50000}$，而后者则为$\frac{2}{8000} = \frac{1}{4000}$。

相对中误差是个无名数，在测量中经常将分子化为1，即用$\frac{1}{M}$表示。

对于真误差与极限误差，也有用相对误差来表示的。例如经纬仪导线测量中，所规定的相对闭合差不能超过$\frac{1}{20000}$，就是相对极限误差，而在实测中所产生的相对闭合差，就是相对真误差。

与相对误差相对应，真误差、中误差、极限误差均称为绝对误差。

第三节 平 差 原 则

测量平差的另一基本内容，就是求被观测量的最可靠结果。本节首先阐述什么是最可靠的结果，然后指出求被观测量最可靠结果时应遵循的原则。

一、观测量的最可靠结果

对某量进行了n次同精度观测，得观测值L_1、L_2……L_n。一组观测值的精度相等，是指在一定观测条件下，它的误差分布的密集或离散程度相同，即误差分布相同，而不是说每个观测值的真误差都相同。因此，观测结果总是互不一致，也就是说，在一组观测值之间存在着不符值。设该量的真值为X，则由式（2-1)知

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= X - L_1 \\ \Delta_2 &= X - L_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_n &= X - L_n \end{aligned} \tag{2-6}$$

当对同一个量进行一组等精度观测时，如何求其最后结果的问题，人们早已采用了取简单平均值的办法，并公认这一平均值，就是根据这些观测值可能求得的该量的最可靠的结果。为此，求上式之和得

$$[\Delta] = nX - [L]$$

两边除n，得

$$\frac{[\Delta]}{n} = X - \frac{[L]}{n} \tag{2-7}$$

采用符号

$$\Delta_x = \frac{[\Delta]}{n}$$

$$x = \frac{[L]}{n}$$

代入式（2-7）移项得

$$X = x + \Delta_x \tag{2-8}$$

x是观测值的简单平均值，Δ_x是简单平均值的真误差，它是观测值真误差的平均值。

由偶然误差的第四特性可知，当n无限增大时，Δ_x就趋近于零，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n} = 0$$

由此得

$$\lim_{n\to\infty} x = X \tag{2-9}$$

可见当n无限增大时，简单平均值即趋于该量的真值。在实际工作中是不可能对同一量作无限次观测的，因而在n为有限数的情况下，这里的平均值x，就是根据已有的观测成果所能求得的一个相对真值，它也就是该量的最可靠结果了。称它为该量的最或然值。随着n的增大，最或然值也趋向于真值。

在测量工作中会有这样的情况，即某些被观测量所构成的函数，其真值是已知的。如平面三角形的三内角之和的真值为180°，水准环中各段高差代数和的真值为零等等。但是测量工作中，所要测定的并不是这些已知真值的量，例如，观测三角形的三内角，并不是为了测定其内角和的大小，而是要求得其各个内角之大小，从而确定三角形的形状；

水准环是要测定各点之间的高差等等。如前所述，通常观测次数 n 总是有限的，因此也只能求得这些量的相对真值，或者说只能求出其最或然值，从这一个意义上来讲，某一量的真值是不确知的。

二、平差原则

通过上面关于简单平均值的叙述，扼要地说明了真值，或者说是真值与最或然值之间的关系。在测量工作中，经常要解决的实际问题并不局限于这样一种最简单的情况。因而有必要针对最普遍的情况提出如何求最或然值的原则。

测量平差的基本内容之一，是要消除由于观测值的误差所引起的不符值，同时要使得消除不符值以后的结果是被观测量的最或然值。

消除不符值，求最或然值的依据就是最小二乘原理，最小二乘原理是在掌握偶然误差规律性的基础上建立起来的。

现在以一个简单的例子来说明按最小二乘原理求最或然值的大意。

设观测了某三角形的三内角，得观测值为

$$L_1 = 58°30'40''$$
$$L_2 = 61°21'10''$$
$$L_3 = 60°08'58''$$

由于观测值带有误差，三内角观测值之和，与其应有值180°之间存在着不符值，通常称此不符值为三角形闭合差，用 w 表示

$$w = L_1 + L_2 + L_3 - 180° = -12''$$

为了消除上述三角形闭合差，需在各观测值上分别加上一个改正数 $v_i (i = 1、2、3)$，使得改正后的结果之和，与其应有值之间不再存在不符值，即

$$(L_1 + v_1) + (L_2 + v_2) + (L_3 + v_3) - 180° = 0$$

如果仅仅是为了满足上式，则从表2-2所列的各组 v 中，任意取其一组，都能达到这一目的。

表 2-2

编　号	观　测　值 (°)　(′)　(″)	v' (″)	v'' (″)	……	v^i (″)	v^k (″)	……
1	58　30　40	+1	+2	……	−3	+4	……
2	61　20　10	+10	+6	……	+12	+4	……
3	60　08　58	+1	+4	……	+3	+4	……
和	179　59　48	+12	+12	……	+12	+12	……

像这样的 v 值可以有无限多组，这就产生了下列问题：

（1）观测的目的总是要求得一组确定的成果，而这里的解答是无限的，如何解决？

（2）假若只选用某一组 v 值来消除不符值，那么选用哪一组值最合理？对于各观测值为同精度的情况，应该选取其中能使改正数平方之和为最小的一组 v 值，即

$$[vv] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 最小$$

当各观测值不同精度时，则应选取其中符合下式要求的一组 v 值，即

$$\left[\frac{vv}{m^2}\right]=\frac{v_1^2}{m_1^2}+\frac{v_2^2}{m_2^2}+\cdots+\frac{v_n^2}{m_n^2}=\text{最小}$$

式中m_i代表观测值L_i的中误差。

这种既能消除不符值，而又满足上式要求的一组改正数，称为最或然改正数，简称改正数，观测值加上这种改正数，即

$$L_i+v_i=x_i$$

称为被观测量的最或然值。这样所求得的 x 值，不仅已消除不符值，而且从误差理论的观点可以证明，这些 x 值就比用其他任意一组 v 所求得的结果，其接近于真值的可能性最大，因此，它们就是最可靠的结果。

这里必须指出，如果我们对该三角形的内角进行另一组观测，由于每次误差的出现具有偶然性，则由此而求得的三角形闭合差就不一定是 $-12''$，因而改正数和最或然值也就会随之改变。故这里的最或然值是相对的，它是随着具体的观测结果的不同而不同,因此，不能把它们理解为一个唯一的，不变的结果。

综上所述，所谓按最小二乘原理求最或然值，就是按下述两个要求来求出最或然值改正数和最或然值的。

（1）只用一组改正数v_i消去不符值；

（2）在同精度观测的条件下，改正数 v 应满足

$$[vv]=v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2=\text{最小}$$

在不同精度观测的情况下，则应满足

$$\left[\frac{vv}{m^2}\right]=\frac{v_1^2}{m_1^2}+\frac{v_2^2}{m_2^2}+\cdots+\frac{v_n^2}{m_n^2}=\text{最小}$$

通常把这种按最小二乘原理求最或然值所进行的计算工作，作为按最小二乘法进行平差，而把平差应满足的上述两个要求称为平差原则。

第四节　误差传播定律

在第二节已经阐述了观测精度的含义，以及如何根据一组独立的同精度的观测误差求观测值中误差的问题，但在实际工作中，经常会遇到这样的情况，即某一量的大小不是直接测定，而是由一个或一系列的观测值，通过一定的函数关系间接计算出来的。例如：

（1）根据图上量取的长度 d 计算其实地距离 D，如用M表示该图比例尺的分母，则$D=M\cdot d$，这时D和d之间是乘数的函数关系。

（2）在导线测量中，根据转折角的观测值来计算坐标方位角，由测量学中知道坐标方位角α_n与转折角β_1、$\beta_2\cdots\cdots\beta_n$（左角）的关系是

$$\alpha_n=\alpha_0+\beta_1+\beta_2+\cdots\cdots+\beta_n-n\cdot180^\circ$$

α_0是已知的起始边坐标方位角。这时α_n与各观测值β是一个和数的函数关系。

（3）由同一量的 n 次同精度观测值计算其简单平均值，即

$$x=\frac{L_1+L_2+\cdots\cdots+L_n}{n}$$

$$=\frac{1}{n}L_1+\frac{1}{n}L_2+\cdots\cdots+\frac{1}{n}L_n$$

这是（1）和（2）两种情况的综合，通常称为线性关系。

（4）由导线边长及坐标方位角α计算坐标增量Δx及Δy

$$\Delta x = s \cdot \cos\alpha$$

$$\Delta y = s \cdot \sin\alpha$$

显然，坐标增量Δx、Δy与观测值 s 和α之间为非线性函数的关系。

阐述观测值的中误差与它们函数的中误差之间的关系的定律，称为误差传播定律。

设 z 是独立观测值x、y的某一函数，即

$$z = f(x, y)$$

现用m_z和m_x、m_y分别代表函数 z 和观测值x、y的中误差，误差传播定律就是要给出 m_z和m_x、m_y之间的关系式。函数 z 误差，是由于参与计算的观测值的误差所引起的。例如，若已知函数 z 是观测值x、y之和即$z = x + y$，设x包含误差Δ_x，y包括误差Δ_y，则由此而引起 z 的误差为$\Delta_z = \Delta_x + \Delta_y$；如果函数 z 不是x、y之和，而是x、y的平均值，即 $z = \frac{x+y}{2}$，则不难看出，此时函数的误差为$\Delta_z = \frac{1}{2}(\Delta_x + \Delta_y)$。可见，观测值误差对函数值的影响大小，是随着函数形式的不同而不同的。因此，要求得函数 z 的中误差m_z，就必须具体地根据它的函数形式来进行推算。

此外，假设 x、y 的观测条件是不同的，那么，与其观测条件相对应，就分别有一个确定的中误差m_x、m_y。还须指出，虽然 x或y 的观测条件不变，但每次观测结果的真误差Δ_x和Δ_y不一定相等，即Δ_x和Δ_y会出现不同的误差区间。所以对函数 z 来说，随着Δ_x、Δ_y出现不同的数值，Δ_z也将取得不同的数值而m_z正是代表这一组Δ_z平方的平均值的极限。由此可知，为了研究函数的中误差和观测值中误差之间的关系，就不能从个别误差的大小出发，而要有一组误差，且其个数$n \to \infty$时，才能推导出它们的关系。以上所述，就是推导误差传播定律的基本思想。

由中误差的含义可知，这里所讨论的m_z，并不是函数 z 的个别误差的大小，而表示以某一种精度测得 x、y 时所求得的 z 值的精度。下面先就一些简单函数来研究误差传播定律，然后讨论一般函数的情况。

一、倍数函数

设有函数
$$z = Kx \tag{2-10}$$

其中K为没有误差的常数，x 为观测值。

现用Δ_x和Δ_z分别表示x和z的真误差。由式（2-10）可知Δ_z和Δ_x的关系为

$$\Delta_z = K\Delta_x \tag{2-11}$$

若其观测次数为n，则有n个真误差 Δ_{x_1}、Δ_{x_2}、……Δ_{x_n}由此而引起 z 的真误差分别为Δ_{z_1}、Δ_{z_2}……Δ_{z_n}，则有

$$\Delta_{z_1} = K\Delta_{x_1}$$

$$\Delta_{z_2} = K\Delta_{x_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta_{z_n} = K\Delta_{x_n}$$

将上式两端平方，得

$$\Delta_{z_1}^2 = K^2 \Delta_{x_1}^2$$
$$\Delta_{z_2}^2 = K^2 \Delta_{x_2}^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta_{z_n}^2 = K^2 \Delta_{x_n}^2$$

相加得

$$[\Delta_z^2] = K^2 [\Delta_x^2]$$

两边各除以n得
$$\frac{[\Delta_z^2]}{n} = K^2 \frac{[\Delta_x^2]}{n}$$

根据中误差定义

$$\frac{[\Delta_z^2]}{n} = m_z^2$$

和

$$\frac{[\Delta_x^2]}{n} = m_x^2$$

将这些关系式代入上式后，则

$$m_z^2 = K^2 m_x^2$$

或
$$m_z = K m_x \tag{2-12}$$

即是说，观测值与一常数的乘积的中误差，等于观测值的中误差乘以该常数。

〔例3〕 在1:500的图上，量得某两点间的距离$d = 23.4$mm，d的测量中误差$m_d = \pm 0.2$mm，求该两点实际距离D及中误差m。

解：
$$D = 500d = 500 \times 23.4 = 11700\text{mm} = 11.7\text{m}$$
$$m_D = 500 m_d = 500 \times 0.2 = \pm 100\text{mm} = \pm 0.1\text{m}$$

所以
$$D = 11.7 \pm 0.1\text{m}$$

二、和或差函数

设有函数$z = x + y$和$z = x - y$，把它们合并写成如下形式

$$z = (x \pm y) \tag{2-13}$$

令函数z及独立观测值x、y的真误差分别为Δ_z、Δ_x、Δ_y则由式（2-13）知，当x含有真误差Δ_x及Δ_y时，函数z也产生真误差Δ_z，即

$$\Delta_z = \Delta_x \pm \Delta_y \tag{2-14}$$

若共观测n次，则函数z可相应地得n个真误差Δ_{z_1}、Δ_{z_2}……Δ_{z_n}，即

$$\Delta_{z_1} = \Delta_{x_1} \pm \Delta_{y_1}$$
$$\Delta_{z_2} = \Delta_{x_2} \pm \Delta_{y_2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta_{z_n} = \Delta_{x_n} \pm \Delta_{y_n}$$

将上式平方得

$$\Delta_{z_1}^2 = \Delta_{x_1}^2 + \Delta_{y_1}^2 \pm 2\Delta_{x_1}\Delta_{y_1}$$
$$\Delta_{z_2}^2 = \Delta_{x_2}^2 + \Delta_{y_2}^2 \pm 2\Delta_{x_1}\Delta_{y_1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$