

华罗庚数学



奥林匹克教材

小学五年级



知识出版社

华罗庚数学奥林匹克教材编写组

华罗庚数学奥林匹克教材

五年級



知識出版社

1980-1981

封面设计:可一工作室

图书在版编目(CIP)数据

华罗庚数学奥林匹克教材:小学五年级/单增主编;冯惠愚编著. - 北京:知识出版社,2000. 1

ISBN 7-5015-2457-2

I. 华… II. ①单… ②冯… III. 数学课-小学-教学参考资料

IV. G624.503

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 72481 号

编 者:华罗庚数学奥林匹克教材编写组

出版发行:知识出版社(北京阜成门北大街 17 号)

印 刷:芜湖金桥印刷有限责任公司

经 销:全国新华书店

版 次:2001 年 5 月第 1 版

印 次:2002 年 2 月第 2 次印刷

印 张:9.5

开 本:850×1168 1/32

字 数:22.8 万字

ISBN 7-5015-2457-2/G·1207

定 价:10.00 元

华罗庚数学奥林匹克教材编委会

- 总 编:单 埏(南京师范大学数学系教授、博士生导师)
- 一年级主编:韩素珍 中学高级教师
(南京市 1—6 届“华杯赛”集训队教练)
- 二年级主编:狄昌龙 小学特级教师
(南京市 1—2 届“华杯赛”集训队教练)
- 三年级主编:陈连生 小学高级教师
(金坛市 3 届、5 届、6 届、7 届“华杯赛”集训队教练,被“华杯赛”组委会授予“金牌教练”称号)
- 四年级主编:陈连生 小学高级教师
(金坛市 3 届、5 届、6 届、7 届“华杯赛”集训队教练,被“华杯赛”组委会授予“金牌教练”称号)
- 五年级主编:冯惠愚 中学特级教师
(中国数学奥林匹克高级教练、南京市 1—7 届“华杯赛”教练)
- 六年级主编:潘博姣 中学特级教师
(南京市 1—4 届“华杯赛”集训队教练)
- 初一年级主编:单 埏 教授、博士生导师
(“华杯赛”4—7 届的主试委员)

*

*

*

本 册 编 著:冯惠愚 穆耕森

前 言

单 尊

华罗庚先生(1910-1984)是本世纪的一位大数学家。他对我国数学界的影响极为巨大,在一定意义上可以说:“没有华罗庚,就没有现代的中国数学”。

华先生不仅在数学研究上具有国际一流的水准,而且热心于数学普及与人才的培养。他亲自撰写了许多通俗的数学读物,发起并主持我国的数学竞赛。他还给青少年作讲座,介绍自己的经验和心得。华先生是青少年学习的楷模,他“精勤不倦、自强不息”的精神,永远激励着广大青少年奋发向上。

为了纪念华罗庚先生,在他的家乡江苏金坛有华罗庚中学,而且自1985年在全国范围内举行了华罗庚金杯少年数学邀请赛(本书简称为“华杯赛”)。我们这套教材称为《华罗庚数学奥林匹克教材》,也正是为了纪念华罗庚先生诞辰90周年而出版的。

这套教材是由江苏省暨金坛市从事数学竞赛培训的大、中、小学教师编写的,其中有博士生导师、教授、特级教师、校长、教研员及“华杯赛”的教练。它可以为各种数

学竞赛提供系统全面的训练,从小提高学生的数学能力,具有很强的针对性与实用性,尤其适用于“华杯赛”。

本教材,可用于数学兴趣学校和各种奥林匹克学校的课堂教学。每一册供一个年级使用。每册分为上、下两分册,用于上、下两个学期。每一分册约 15 讲,每讲至少 6 道例题,用于 100 分钟(两节课)的教学,内容由浅入深,循序渐进,适合学生的年龄特点与知识结构。每讲配备较多的习题,习题均有详细解答,可供教师及有条件辅导的家长使用。

一、二册,用于小学低年级,目的在培养学生学习数学的兴趣与数学的感觉,力求图文并茂,由较多的图画自然地较多的数学言语与文学叙述过渡。三、四、五册目的在打好基础,开拓眼界,逐步向“华杯赛”的要求靠拢。六、七两册,完全瞄准数学竞赛,相当于百米比赛的冲刺阶段,其中有较难的问题,并为临赛前的强化训练,各编写了 10 套综合练习,供培训选手的指导教师选用。

各册既互相联系,又独立成书,内容上略有重叠,这正好形成螺旋式的教学,对学生的学习是有益的。

例题、练习尽量选自各种竞赛,并注明出处,这也是本书的特色之一(为适合本书的体例,不少数学题目的文字作了一点修改)。

(单墀总编系南京师范大学数学系教授、博士生导师)

纪念华罗庚先生
诞辰九十周年

目 录

上 册

第一讲 小数的巧算与估算	(1)
第二讲 列方程解应用题	(10)
第三讲 容斥原理	(19)
第四讲 抽屉原理	(28)
第五讲 进位制	(36)
第六讲 长度与角度	(45)
第七讲 面积计算	(55)
第八讲 等积变形	(63)
第九讲 图形割补	(74)
第十讲 图形的切拼	(83)
第十一讲 图论问题	(92)
第十二讲 最优化策略	(102)
第十三讲 覆盖与染色	(112)
第十四讲 组合问题	(121)
第十五讲 竞赛题选讲	(131)

下 册

第一讲	平均数	(142)
第二讲	约数与倍数	(150)
第三讲	约数的判断	(157)
第四讲	数的分解	(166)
第五讲	质数与合数	(174)
第六讲	最大公约数与最小公倍数	(182)
第七讲	约数的个数与约数和	(189)
第八讲	整除	(195)
第九讲	带余除法	(202)
第十讲	同余	(207)
第十一讲	末位数字	(214)
第十二讲	完全平方数	(221)
第十三讲	自然数的数字和	(228)
第十四讲	游戏中的整数问题	(237)
第十五讲	竞赛题选讲	(245)
参考答案		(253)

上册

第一讲 小数的巧算与估算

大家在五年级已经学会了小数运算.与整数四则运算一样,只有熟练掌握运算的法则,掌握一定的运算技巧,才能准确迅速地进行计算.所以要注意练好小数运算的基本功.大家可不要小看了这个小数点“.”,点错了说不定就会酿成大祸.某国有一次发射卫星失败,损失了几亿美元,最后通过检查,原来是工程技术人员点错了一个小数点.所以千万不能对这个小小的小数点掉以轻心.试想你在设计房屋时把每层房子的高度 2.8 米错写成 0.28 米,那么造出来的房子会是什么样?一百多年前,法国的埃菲尔为巴黎设计大铁塔时,他把上百万个零件的尺寸都一一计算得准确无误,结果所有的零部件都一次安装成功.这就为我们树立了一个典范.直到现在,埃菲尔铁塔矗立在巴黎,成为巴黎的标志,也警示着我们在进行计算时应像埃菲尔那样一丝不苟,准确无误.

【例 1】 计算: (1) $0.01992 \div 0.004 \times \frac{1}{2000}$;

(1992 年小学数学奥林匹克竞赛题)

(2) $207.2 + 389.7 - 157.6 - 109.1$.

(1994 年小学数学奥林匹克竞赛题)

分析 这两题都是测试基本运算的能力的,只要细心按运算法则计算就能算对.

$$\begin{aligned}\text{解 (1)} \quad & 0.01992 \div 0.004 \times \frac{1}{2000} \\ & = 1992 \div 400 \div 2000 \\ & = 4.98 \div 2000 \\ & = 0.00249.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(2)} \quad & 207.2 + 389.7 - 157.6 - 109.1 \\ & = (207.2 + 389.7) - (157.6 + 109.1) \\ & = 596.9 - 266.7 \\ & = 330.2.\end{aligned}$$

说明 数学竞赛中固然有需要较高技巧才能做的题,也有考察基本技能的题,本题就是这样的题.

【例2】 计算:(1) $124.68 + 324.68 + 524.68 + 724.68 + 924.68$;

(2) $5795.5795 \div 5.975 \times 579.5$.

(1994 小学数学奥林匹克总决赛试题)

$$\begin{aligned}\text{解 (1)} \quad & 124.68 + 324.68 + 524.68 + 724.68 + 924.68 \\ & = (100 + 300 + 500 + 700 + 900) + 24.68 \times 5 \\ & = 2500 + 123.4 \\ & = 2623.4.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(2)} \quad & 5795.5795 \div 5.795 \times 579.5 \\ & = 5795.5795 \times (579.5 \div 5.795) \\ & = 5795.5795 \times 100 \\ & = 579557.95.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{或} \quad & 5795.5795 \div 5.795 \times 579.5 \\ & = 1000.1 \times 579.5 \\ & = 579557.95.\end{aligned}$$

说明 根据题目所给数据的形状选择适当的解法.

【例3】 计算: (1) $[(35.16 \times 0.25 + 38.42 \div 2) \times 0.2 - 1.63 - 2.36] \div 0.25$;

(1991年中南地区小学数学联赛题)

(2) $[0.75 \times 42.7 - 0.573 \times 25 + 57.3] \div 3 \times 7972$.

(1993年上海第六届“从小爱数学”竞赛题)

解 (1) $[(35.16 \times 0.25 + 38.42 \div 2) \times 0.2 - 1.63 - 2.36] \div 0.25$
 $= [(8.79 + 19.21) \times 0.2 - 1.63 - 2.36] \div 0.25$
 $= [5.6 - 1.63 - 2.36] \div 0.25$
 $= 1.61 \times 4$
 $= 6.44.$

(2) $[0.75 \times 42.7 - 0.573 \times 25 + 57.3] \div 3 \times 7972$
 $= [42.7 \times 0.75 + 57.3 - 57.3 \times 0.25] \div 3 \times 7972$
 $= [42.7 \times 0.75 + 57.3 \times 0.75] \div 3 \times 7972$
 $= 100 \times 0.75 \div 3 \times 7972$
 $= 100 \times 7972 \div 4$
 $= 199300.$

说明 $a \times 0.2 = a \div 5$, 而 $a \div 0.2 = a \times 5$;
 $a \times 0.25 = a \div 4$, 而 $a \div 0.25 = a \times 4$;
 $a \times 0.5 = a \div 2$, 而 $a \div 0.5 = a \times 2$;
 $a \times 0.125 = a \div 8$, 而 $a \div 0.125 = a \times 8$.

【例4】 如果把 0.00000000025 简记为 $0.\underbrace{000\cdots0}_{10个0}25$. 下面有两个数:

$a = 0.\underbrace{00\cdots0}_{1984个0}125, b = 0.\underbrace{00\cdots0}_{1988个0}08,$

试求 $a + b, a - b, a \times b, a \div b$.

(上海市第二届“从小爱数学”赛题)

分析 本题中的 a 与 b 就是小数点后 0 的个数多一些, 其实只要按小数运算法则细心一点就能算好.

小数加减法则是小数点对齐进行竖式加减。

小数乘法,一是决定积的数字,二是决定数位,只要把两个小数的数字(先不看小数点在哪)相乘作为积的数字,而把两个小数的小数点后数位的和作为积的小数点后的数位。小数相除,可先把被除数与除数的小数点向同方向移动相同的数位,使除数变为整数,再相除。

根据这些方法就可求出结果。

解 a 在小数点后有 1986 位, b 在小数点后有 1988 位,故在计算 $a + b$ 时, b 的数字 8 应与 a 的 5 后面二位对齐。

$$\therefore a + b = \underbrace{0.00 \cdots 012508}_{1984 \text{ 个 } 0};$$

$$a - b = \underbrace{0.00 \cdots 012492}_{1984 \text{ 个 } 0};$$

$\therefore 125 \times 8 = 1000$, 而 $a \times b$ 应在小数点后有 $1986 + 1988$ 位, 即有 3974 位, 即小数点后有 $3974 - 4 = 3970$ 个 0。

$$\therefore a \times b = \underbrace{0.00 \cdots 01}_{3971 \text{ 个 } 0},$$

$$\text{答: } a + b = \underbrace{0.00 \cdots 012508}_{1984 \text{ 个 } 0}; a - b = \underbrace{0.00 \cdots 012492}_{1984 \text{ 个 } 0};$$

$$a \times b = \underbrace{0.00 \cdots 01}_{3971 \text{ 个 } 0}; a \div b = 1562.5.$$

【例 5】在两位数 10, 11, $\dots$, 98, 99 中, 将每个被 7 除余 2 的数的个位与十位间添加一个小数点, 其余数不变, 问经过这样改变后, 所有数的和是多少?

(第五届华杯赛初赛题)

分析 求 10, 11, $\dots$, 98, 99 的和可用简便方法算出, 在和中去掉所有被 7 除余 2 的数的和。而把这些数的个位与十位间添加一个小数点, 相当于把这个数除以 10。

解 如设 $S_1 = 10 + 11 + 12 + \dots + 98 + 99$ 把各数倒写一遍:

$$S_1 = 99 + 98 + 97 + \dots + 11 + 10$$

把这两式相加,可得:

$$\begin{aligned} 2S_1 &= (10+99) + (11+98) + (12+97) + \cdots (98+11) + (99 \\ &\quad + 10) \\ &= \underbrace{109 + 109 + 109 + \cdots + 109 + 109}_{90 \text{ 个 } 109} \\ &= 109 \times 90. \end{aligned}$$

$$\therefore S_1 = 109 \times 90 \div 2 = 4905.$$

被7除余2的两位数有 $7 \times 2 + 2 = 16, 7 \times 3 + 2 = 23, \cdots, 7 \times 13 + 2 = 93$, 共计12个.

$$\text{设 } S_2 = 16 + 23 + \cdots + 93$$

$$\text{则 } S_2 = 93 + 86 + \cdots + 16$$

$$\begin{aligned} \therefore 2S_2 &= (16+93) + (23+86) + \cdots + (93+16) \\ &= \underbrace{109 + 109 + \cdots + 109}_{12 \text{ 个 } 109} \end{aligned}$$

$$\therefore S_2 = 109 \times 12 \div 2 = 654.$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{所求和} &= S_1 - S_2 + S_2 \div 10 = 4905 - 654 + 65.4 \\ &= 4316.4. \end{aligned}$$

说明 本题中的 S_1 与 S_2 都是具有以下性质的数:一列数,从第二个数起,每个数与其前一个数的差都等于同一个数,这一列数就称为等差数列.对这样的一列数求其和,可按解中的方法做,根据这个方法,也可总结出公式:

$$S = (\text{首项} + \text{末项}) \times \text{项数} \div 2$$

其中,首项就是和式中的第一个数,末项就是最后一个数,每个加数都叫一“项”,加数的个数就是项数.

【例6】 $8.01 \times 1.24 + 8.02 \times 1.23 + 8.03 \times 1.22$ 的整数部分是多少?

(第五届华杯赛复赛题)

分析 本题并未要求这个式子的准确值,只是要求其整数部分,所以只要大体估出这个式子的值在哪两个相邻整数之间就行

了,因为如果 n 是整数而能得出 $n \leq a < n+1$, 那么就能肯定 a 的整数部分就是 n .

如果观察这一组数据,发现这组数据与 $8 \times 1.25 = 10$ 很接近,所以应从此着手进行分析.

再仔细看看,这个式子中每两个相乘的数都有规律,8.01,8.02,8.03 逐个增加 0.01,而 1.24,1.23,1.22 却逐个减少 0.01,于是可知 $8 + 1.25 = 8.01 + 1.24 = 8.02 + 1.23 = 8.03 + 1.22$ 即相乘两数的和相等.

两数相加,当其中一个加数增大,另一个加数减小,但其和始终保持固定时,它们二者的积会怎么变化呢?

如果另取 $2+8=3+7=4+6=5+5$ 比较,会发现: $2 \times 8 = 16$, $3 \times 7 = 21$, $4 \times 6 = 24$, $5 \times 5 = 25$, 即 $2 \times 8 < 3 \times 7 < 4 \times 6 < 5 \times 5$, 就是当两个数和固定而二数相差越大时,这两数的积越小,这是否是一般规律呢?

设 $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = k$, 而 $a_1 > a_2 > b_2 > b_1$, 这时 a_1 与 b_1 相差就比 a_2 与 b_2 的差大, ($a_1 - b_1 > a_2 - b_2$)

此时, $a_2 b_2 - a_1 b_1$

$$\begin{aligned} &= a_2(k - a_2) - a_1(k - a_1) \\ &= a_2 k - a_2^2 - a_1 k + a_1^2 = a_1^2 - a_2^2 - (a_1 k - a_2 k) \\ &= (a_1 + a_2)(a_1 - a_2) - k(a_1 - a_2) \\ &= (a_1 - a_2)(a_1 + a_2 - k) \end{aligned}$$

由于 $a_1 > a_2$, 而且 $a_1 + a_2 > a_1 + b_1 = k$, 所以 $a_2 b_2 > a_1 b_1$. 也就是说: 当二数的和为一定时, 两数相差越大, 他们的积就越小.

$$\therefore 8 - 1.25 < 8.01 - 1.24 < 8.02 - 1.23 < 8.03 - 1.22.$$

于是 $8 \times 1.25 > 8.01 \times 1.24 > 8.02 \times 1.23 > 8.03 \times 1.22$, 而 $8 \times 1.25 = 10$.

$$\therefore 8.01 \times 1.24 + 8.02 \times 1.23 + 8.03 \times 1.22 < 10 \times 3 = 30.$$

但 $8.03 \times 1.22 > 8 \times 1.22 = 9.76$.

$$\therefore 8.01 \times 1.24 + 8.02 \times 1.23 + 8.03 \times 1.22 > 9.76 \times 3 = 29.28.$$

这就是说该和数在 29.28 到 30 之间, 于是其整数部分为 29.

答: 所求整数部分为 29.

小结 小数运算主要应注意掌握好法则, 同时应注意灵活运用运算律进行速算与巧算.

小数运算特别要注意小数点的位置, 要掌握好小数点移动的规律并能利用这种规律进行简便计算.

要熟练掌握一个数乘以或除以 0.2、0.5、0.125 等等的运算, 还要记住例如 $1 \div 16 = 0.0625$ 这种特殊数据.

练习一

1. 简算:

$$1.25 \times (8 \div 25) = \underline{\quad}; 7272 \div 8 \div 9 = \underline{\quad};$$

$$2.65 - (1.65 - 0.97) = \underline{\quad}; 4.74 + (1.26 - 0.77) = \underline{\quad};$$

$$5.47 - (1.47 + 0.84) = \underline{\quad}; 9.9 \times 9.9 + 0.99 = \underline{\quad};$$

$$1.25 \times 2.5 \times 3200 = \underline{\quad}.$$

$$2. (8.4 \times 2.5 + 9.7) \div (1.05 \div 1.5 + 8.4 \div 0.28) = \underline{\quad};$$

$$(0.1^2 + 0.2^2 + 0.3^2 + 0.4^2)^2 \div (0.1^3 + 0.2^3 + 0.3^3 + 0.4^3)^3 = \underline{\quad};$$

$$2.89 \times 6.37 + 4.63 \times 2.89 = \underline{\quad}; 327 \times 2.8 + 17.3 \times 28 = \underline{\quad}.$$

(1994 年小学数学奥林匹克总决赛试题)

$$3. \underbrace{0.625 \times 0.625 \times \cdots \times 0.625}_{10 \uparrow 0.625} \times \underbrace{8 \times 8 \times \cdots \times 8}_{9 \uparrow 8} \times \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{8 \uparrow 2} =$$

4. 不计算, 在 $\square$ 中填入“>”、“<”或“=”:

$$0.3 \div 0.03 \times 0.003 \div 0.0003 \square 10 \div 100 \times 1000 \div 1000$$

$$32.7 \div 0.25 + 2.51 \times 10 \square 32.7 \times 4 + 2.51 \div 0.1$$

$$282.4 \div 0.999 \square 282.4 \times 0.999$$

5. 31.719×1.2798 的整数部分是多少? (第七届《小学生数学报》决赛试题)

6. $\underbrace{19991999 \cdots 1999}_{1999 \uparrow 1999} \div \underbrace{99919991 \cdots 9991}_{1999 \uparrow 9991}$ 的商的小数点后前三位数字是几?

7. (1) 一个三位数四舍五入后成为 4.80, 原来的三位小数可能是几?

(2) 两个数进行乘法与除法运算, 算式如下:

$$3. \square \square \times \square.17 \approx 6.84, 3. \square \square \div \square.17 \approx 1.45$$