2001年最新版

最新
全国硕士研究生入学统一考试

全真模拟试卷

[理工数学（一）]

主编：北京大学 林朝祥 张静
审定：考研命题研究组

中国人民公安大学出版社

最新全国硕士研究生入学统一考试
全真模拟试卷
(理工数学一)

北京大学　林朝祥　张静　主编
考研命题研究组　审定

中国人民公安大学出版社
北京

责任编辑:过百芳

封面设计:虎　子

图书在版编目(CIP)数据

最新全国硕士研究生入学统一考试全真模拟试卷.理工数学.1/张静等主编.－北京:中国人民公安大学出版社,2000.7

ISBN 7－81059－482－6

I.最…　II.张…　III.数学－研究生－入学考试－试题　IV.G643－44

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第33705号

最新全国硕士研究生入学统一考试全真模拟试卷

(ZUIXIN QUANGUO SHUOSHIYANJIUSHENG RUXUE TONGYI KAOSHI QUANZHEN MONI SHIJUAN)

林朝祥　张静　主编

出版发行:中国人民公安大学出版社

地　　址:北京市西城区木樨地南里

邮政编码:100038

经　　销:新华书店

印　　刷:河北省抚宁印刷厂

版　　次:2000年7月第1版

印　　次:2000年7月第1次

印　　张:8.25

开　　本 850毫米×1168毫米 1/32

字　　数 140千字

印　　数 0～2000套

ISBN 7－81059－482－6/G·050

定　　价:全套11册,共275.00元,每册25.00元

本社图书出现印装质量问题,由发行部负责调换

联系电话:(010)83905728

E－mail:cpep@public.bta.net.cn

前　　言

“忽如一夜春风来，千树万树梨花开。”每年九月间，数十万名手持“硕士研究生入学考试录取通知书”的新生，在经历了人生中最难忘的一段拼搏后，来到各名牌大学，开始了新的人生旅程！

在这些天之骄子中，有为数众多的考生，选择过这套《最新全国硕士研究生入学统一考试全真模拟试卷》作为他们主要的考研复习资料并因此而获成功。该套试卷由全国考研命题研究组组织编写，编写者为北京大学、中国人民大学、清华大学等著名高校的教授及学者们。其中部分教授是国家考研命题组成员和阅卷组成员。他们同时具有丰富的考研辅导经验，对命题有惊人的把握，所编资料以高命中率而闻名！

今年本套试卷严格遵循教育部最新修订的2001年全国硕士研究生入学考试大纲的精神，同时结合多年的教学经验和考研经验来进行编写。每套试卷的题型题量、难易程度、分值比例、评分标准完全按照新大纲的要求精心设计和编写。使考生通过模拟训练，及时查漏补缺，提高应试能力。

本丛书特点在于：它绝非一般的模拟试卷，而是由著名考研专家根据考研最新动态和精神，开会共同研讨对策，对2001年考研作出精确预测，并呕心沥血，最终形成此套“高含金量”的试卷！权威而又准确的预测是本丛书的最大特色！去年读过此丛书的考生都纷纷给本中心来电话，称他们在进人考场后有太多的“似曾相识”、“早已做过此题”的感觉！

该套试卷涵盖文科政治、理科政治、英语、理工数学(一)、理工数学(二)、经济数学(三)、经济数学(四)、西医综合、中医综合、MBA及法硕等考研科目。

“不经历风雨，哪能有彩虹，人生不会随随便便成功……”歌词铿锵，掷地有声！立志于考研的同学们，我们深信，只要你们认真通读本书，掌握答题思路与分析方法的要领，严格完成全部习题，并融会贯通，举一反三，一定会取得考研的成功，进而改变你人生的轨迹，从胜利走向胜利！

考研命题研究组

公元2000年7月

目　录

全真模拟试卷(一)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}\right)=$ ________.

2. 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续,且 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}=3$,则 $f'(2)=$ ________.

3. 求微分方程 $y''-2y'-3y=2x+1$ 的通解为________.

4. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&x&1\\x&1&y\\1&y&1\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似,则 $x=$ ________, $y=$ ________.

5. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x\geqslant0\\0 & x<0\end{cases}$ 则 $Y=e^{x}$ 的概率密度为________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分,每小题给出的四个选项中,只有一项满足题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

1. 函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上为(　　).

   A. 有上界无下界

   B. 有下界无上界

   C. 有界且 $2\lg\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant0$

   D. 有界且 $\lg\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant-\dfrac{1}{4}$

2. 当 $x\to0$ 时,下列函数哪一个是其他三个的高阶无穷小(　　).

A. x^2 B. $1-\cos x$ C. $x-\tan x$ D. $\ln(1-x^2)$

3. 设 $k>0$ 为常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k+n}{n^2}$ ( ).

A. 发散 B. 绝对收敛

C. 条件收敛 D. 收敛与发散与 k 的取值有关

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶反对称矩阵，则下列矩阵中为对称矩阵的是( ).

A. $\boldsymbol{ABA}$ B. $\boldsymbol{BAB}$ C. $\boldsymbol{ABAB}$ D. $\boldsymbol{BABA}$

5. 设 A、B 为两个随机事件，且有 $P(C\mid AB)=1$ 则下列结论正确的是( ).

A. $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$

B. $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

C. $P(C)=P(AB)$

D. $P(C)=P(A\cup B)$

三、(本题满分 5 分)

令 $x=\mathrm{e}^t$，试将 $x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，用 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 来表示.

四、(本题满分 5 分)

计算 $\int_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}l$，$L$：由圆周 $x^2+y^2=a^2$，直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限中所围图形的边界.

五、(本题满分 6 分)

在上半平面求一条向上凹的曲线，其任一点 $P(x,y)$ 处的曲率等于此曲线在该点的法线段 PQ 长度的倒数(Q 是法线与 x 轴的交点)，且曲线在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴平行.

六、(本题满分 6 分)

设 $f(x)$，$g(x)$ 均为 $[a,b]$ 上的连续增函数 $(a,b>0)$，证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

七、(本题满分 6 分)

两个质量相同的重物挂于弹簧的下端,其中一个坠落,求另一个重物的运动规律,已知弹簧挂一个重物时伸长为 a.

八、(本题满分 7 分)

计算 $\oiint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧表面.

九、(本题满分 7 分)

将下列函数在指定点处展成幂级数

(1)$f(x) = \ln x$ 在 $x_0 = 1$ 及 $x_0 = 2$ 处;

(2)$f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ 在 $x_0 = 1$ 处.

十、(本题满分 8 分)

设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ 求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵,进而求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}$ 为对角矩阵.

十一、(本题满分 6 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 实矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,$\boldsymbol{B} = \lambda\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$,证明:当 $\lambda > 0$ 时,$\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵.

十二、(本题满分 8 分)

设(X, Y)的分布律如下:

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β

问 α, β 为何值时,X 与 Y 相互独立.

十三、(本题满分 6 分)

设总体 X 的分布为

$$p(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta} & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中 $\theta>-1$ 的未知参数. $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体X的一个容量为 n 的简单随机样本,分别用矩法及最大似然法估计 θ.

全真模拟试卷(一) 参考答案

一、填空题

1\. 0

【分析】 $\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}=-2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$,

因为 $\left|-2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant 2$ 有界,

而 $0\leqslant\left|\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|<\left|\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|=\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\to 0$ 当$(x\to\infty)$,

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=0$, 故是无穷小量.

因此, $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})=0$.

2\. 3

【分析】 用定义求 $f'(2)$, 为此, 先求 $f(2)$,

$$f(2)=\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}(x-2)\frac{f(x)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(x-2)\cdot\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=0$$

故 $f'(2)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}=3$.

3\. $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}+\left(-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{9}\right)$

【分析】 对应齐次方程的特征方程为：

$$\gamma^2 - 2\gamma - 3 = 0$$

得：$\gamma_1 = 3, \gamma_2 = -1$

∴ 相应齐次方程通解为：

$$\overline{y} = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$$

设原方程一个特解：为 $y^* = ax + b$

则 $y^{*\prime} = a, y^{*\prime\prime} = 0$

代入得：$\begin{cases} -2a - 3(ax + b) = 2x + 1 \\ -3ax - (2a + 3b) = 2x + 1 \end{cases}$

比较系数，得：$\begin{cases} a = -\dfrac{2}{3} \\ b = \dfrac{1}{9} \end{cases}$

∴ $y^* = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{9}$ 为原方程的一个特解.

∴ 原方程通解为：$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + y^*$

（c_1, c_2 为任意常数）

4. $x = 0 \quad y = 0$

【分析】 ∴ 相似矩阵具有相同的行列式和特征多项式

∵ 有 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}| \Rightarrow 2xy - x^2 - y^2 = 0$

$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{E}| \Rightarrow \lambda(x^2 + y^2) = 0$

$$\Rightarrow -x = y = 0$$

5. $f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ \dfrac{1}{y^2} & y \geqslant 1 \end{cases}$

【分析】 设随机变量 Y 的分布函数

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{e^x < y\}.$$

当 $y < 1$ 时，$F_Y(y) = P\{Y < y\} = 0$.

当 $y \geqslant 1$ 时，$F_Y(y) = P\{X < \ln y\} = \int_0^{\ln y} e^{-x} dx$,

即 $$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1\\ \int_0^{\ln y}e^{-x}dx, & y\geqslant 1\end{cases}$$

$$f_Y(y)=F'_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1\\ \dfrac{1}{y^2}, & y\geqslant 1\end{cases}$$

二、选择题

1. 选 C

【分析】 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

$$f'(x)=\frac{x\cdot\dfrac{1}{x\ln 10}-\lg x}{x^2}=\frac{1}{x^2}(\ln e-\ln x)$$

$\because x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$, $\quad\therefore f'(x)>0$. 故 $f(x)$"↗"

因此, $\dfrac{\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{\ln 1}{1}$, 即 $2\ln\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 0$, 可知, 该选 C.

2. 选 C

【分析】 $\because 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2,\ln(1+x^2)\sim x^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{\cos^2 x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{2x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}-\frac{\sin^2 x}{2x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=0$$

$\therefore$ 该选 C.

3. 选 C

【分析】 首先由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{k+n}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{k}{n^2}+\dfrac{1}{n}\right)$, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{k}{n^2}$

收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k+n}{n^2}$ 发散，B 是错的. 又由于 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k}{n^2}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 均收敛，因此原级数收敛，即 C 正确.

4. 选 B

【分析】 $\because (\boldsymbol{BAB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T=(-\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{BAB}$，所以应选 B，也可验证 A、C、D 不入选.

$\because (\boldsymbol{ABA})^T=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{ABA}\neq\boldsymbol{ABA}$

$(\boldsymbol{ABAB})^T=\boldsymbol{BABA}\neq\boldsymbol{ABAB}$

$(\boldsymbol{BABA})^T=\boldsymbol{ABAB}\neq\boldsymbol{BABA}$

5. 选 B

【分析】 $\because 1=P(C\mid AB)=\dfrac{P(ABC)}{P(AB)}$

$$\therefore \quad P(ABC)=P(AB) \tag{*}$$

又 $\because P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\leqslant 1$

$\therefore P(ABC)\leqslant 1+P(AB)+P(BC)+P(AC)-P(A)-P(B)-P(C)$

由(*)式及上式得

$$1+P(AC)+P(BC)-P(A)-P(B)-P(C)\geqslant 0 \tag{**}$$

又 $\because P(AC)\leqslant P(C)\quad P(BC)\leqslant P(C)$

由(**)及上式有 $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

$\therefore$ 应选 B.

三、【分析】 式中看不到 y 是 x 函数的具体关系，但可以分析：y 是 x 的函数不妨表示为 $y=y(x)$，而 $x=e^t$ 是 t 的复合函数，我们要找的是 $\frac{dy}{dx}$ 与 $\frac{dy}{dt}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$ 与 $\frac{d^2y}{dt^2}$ 之间的关系，注意到：$y'=\frac{dy}{dx}$

$= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$，两边再对 x 求导，就得$\frac{d^2y}{dx^2}$与$\frac{d^2y}{dt^2}, \frac{dy}{dt}$的关系.

【解】 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$，而由 $x = e^t$ 得 $t = \ln x$. 微分 $dt = \frac{1}{x}dx$，从而得

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

所以知

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

两边对 x 求导

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt}\right)'_x = \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\left(\frac{dy}{dt}\right)'_x \\ &= \frac{-1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\left(\frac{dy}{dt}\right)'_t \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} &= x^2\left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}\right) + 2x\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) \\ &= \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\end{aligned}$$

四、【解】 $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl = \int_{\overline{OA}} + \int_{\overparen{AB}} + \int_{\overline{BO}}$

$\overline{OA}: y = 0, 0 \leqslant x \leqslant a$

$\int_{\overline{OA}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl = \int_0^a e^x dx = e^a - 1$

$\overparen{AB}: x = a\cos t, y = a\sin t, 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4}$

$$\int_{\widehat{AB}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dl = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a a\, dt = \frac{\pi}{4} a e^a$$

$$\overline{BO}: y = x, 0 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

$$\int_{\overline{BO}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dl = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} e^{\sqrt{2}x} \sqrt{2} dx = e^a - 1$$

故 $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} dl = 2(e^a - 1) + \frac{\pi}{4} a e^a$

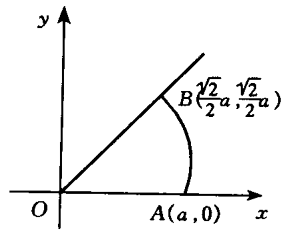

图 1

五、【解】 草图见图 2，所求曲线 $y = f(x)$. 于是其在 $P(x, y)$ 点处的曲率为

$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$ （∵ 曲线为凹的，∴ $y'' > 0$）

曲线 $y = f(x)$ 在 $P(x, y)$ 点处的法线方程

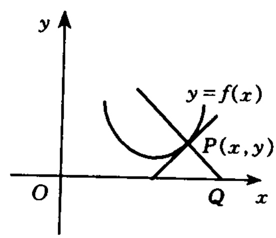

图 2

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x) \quad (y' \neq 0)$$

它与 x 轴的交点 Q 的坐标 $Q(x + yy', 0)$，于是

$$|PQ| = \sqrt{(yy')^2 + y^2} = y(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}$$

由题设 $K = \frac{1}{|PQ|}$，即

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{y(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$\Rightarrow yy'' = 1 + y'^2$ —— 这是不显含 x 的方程

初始条件为 $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0$

令 $y' = p, y'' = p\frac{dp}{dy}$，于是方程变为

$$yp\frac{dp}{dy} = 1 + p^2 \Rightarrow \frac{p}{1 + p^2} dp = \frac{dy}{y}$$