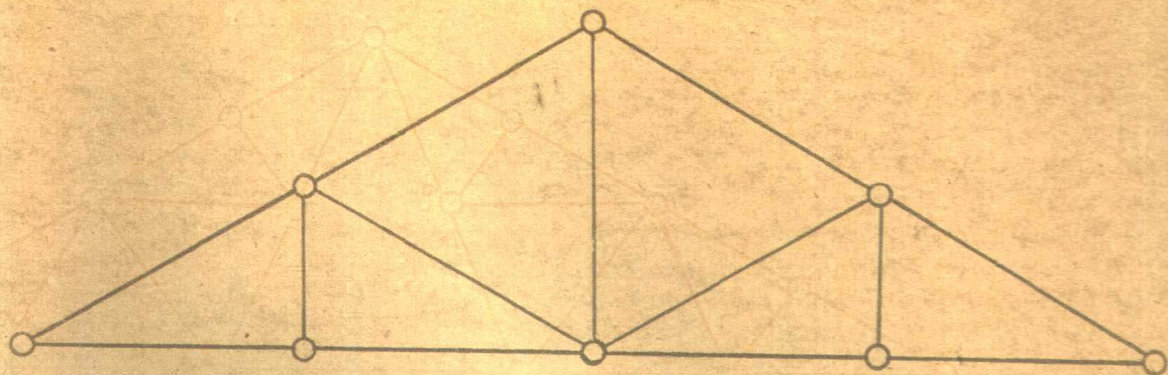


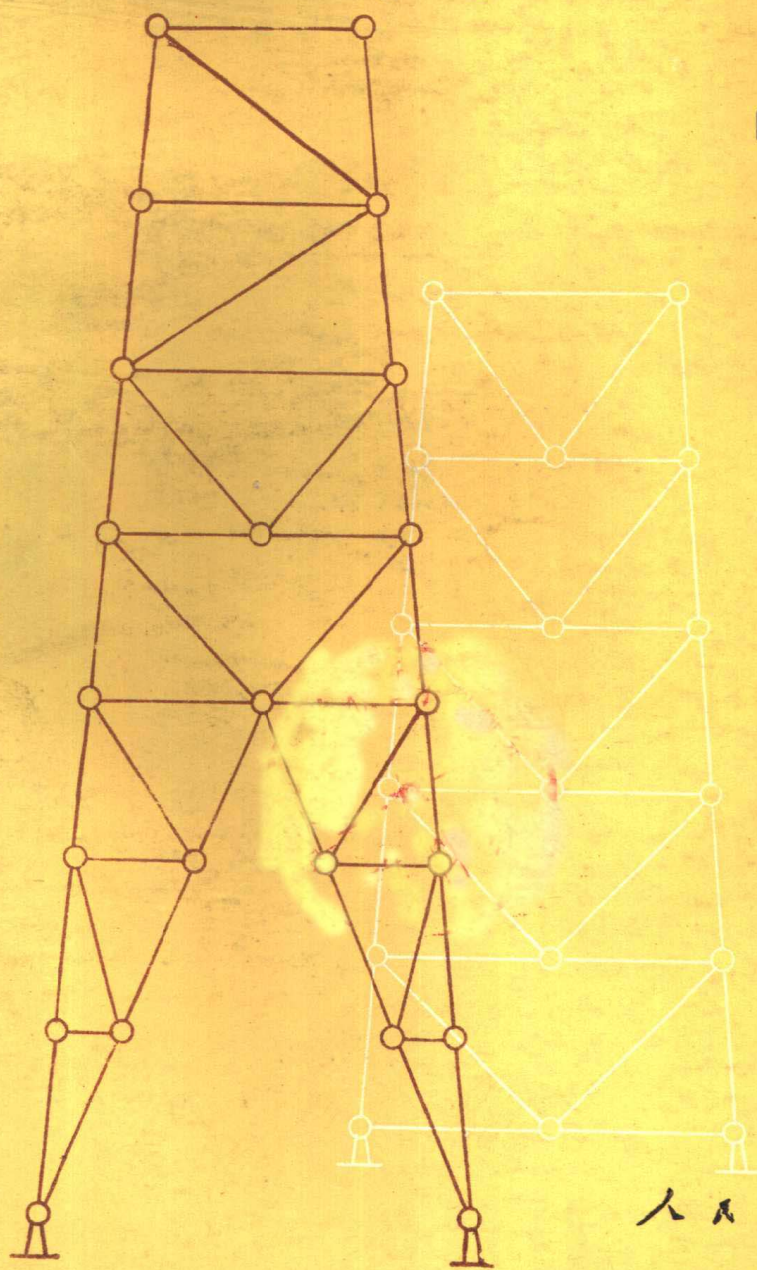


结构力学

[日本]酒井忠明 著

王道堂等 译

陈英俊等 校



人民教育出版社

结 构 力 学

[日本] 酒井忠明 著
王道堂 韩振宇 赵如骥 徐国彬 译
陈英俊 王道堂 校

人 民 教 育 出 版 社

内 容 提 要

本书是日本酒井忠明编写的结构力学教科书。内容包括静定和超静定结构计算,有限单元法分析平面问题,结构动力学(包括结构的地震反应分析),矩阵数学的简要介绍等。全书各章例题较多,有利于学习参考。

本书可供有关土木工程专业的高等学校师生及工程技术人员参考。

本书责任编辑 余美茵。

结 构 力 学

[日本] 酒井忠明 著

王道堂 韩振宇 赵如骊 徐国彬 译
陈英俊 王道堂校

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京市房山县印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 32.5 字数 700,000

1981年12月第1版 1982年11月第1次印刷

印数 00,001—11,000

书号 15012·0379 定价 3.40 元

译 者 的 话

本书是日本酒井忠明编写的一本教科书。全书的内容比较丰富，除通常在结构力学教科书中包括的内容外，还有一部分有关理论力学、材料力学的内容。在结构动力学中还介绍了结构的地震反应分析。此外，以平面问题的常应变三角形单元和双线性矩形单元为基础，介绍了有限单元法的基本概念，并简要介绍了矩阵代数和微分方程组。

本书由王道堂译第一、二、十三~十七、二十七章，韩振宇译第三~九章，赵如骝译第十~十二章，徐国彬译第十八~二十六章。王道堂初校第三~十二、十八~二十六章，陈英俊校第一、二、十三~十七、二十七章。全书由陈英俊负责最后校订。我们在翻译过程中发现的错误均已逐一订正，其中我们认为需要说明的某些错误，也在文内加注说明。由于我们的水平和能力所限，一定会有许多缺点和错误，恳请读者批评指正。

译 者

一九八一年十一月

10-55-01

序 言

本书是作者总结多年来在北海道大学工学院本科及研究生院担任结构力学课及习题课的经验,以讲稿为基础编写的。作者希望本书作为一本大学的结构力学教科书,以及与结构工程有关的技术人员和研究人员的参考书,因之多少能有所裨益。

近年来,随着大型电子计算机的发展和普及,在结构力学领域内,作为其数值计算方法,也已经使用矩阵代数,所以本书也尽量收入了结构的矩阵分析方法,并按照各种问题,通过例题,力求浅显地论述矩阵的适用方法,以便使初学者也能理解。

过去,结构力学的著作,仅限于静力学范围,有关动力学的内容作为其他书来处理。但近年来,在结构设计中也进行动力分析,所以决定针对初学者论述一下结构振动问题,为读者提供方便。

通观全书,作为大学本科的教学内容,在局部上多有不适之处,故用作教科书时,望适当选择取舍。

本书恐多有不足之处,期望能收到读者的意见和指正,将来加以订正。

最后,本书刊行时曾得到技报堂出版部诸君始终不渝的支持,而校订时又承蒙芳村仁、奥村勇两君的帮助,对此谨表深切的谢意。

作 者

一九七〇年二月

目 录

第一章 力和力矩	1
§ 1. 力	1
§ 2. 交于一点的平面力系的合力及平衡	1
§ 3. 不交于一点的平面力系的合力及平衡	5
§ 4. 平面力系的力矩	8
§ 5. 平面力系的平衡力	10
第二章 截面重心和截面惯矩	12
§ 1. 截面静矩	12
§ 2. 截面重心	13
§ 3. 截面惯矩和惯积	15
§ 4. 对平行轴及倾斜轴的截面惯矩	15
§ 5. 组合截面的截面惯矩	16
§ 6. 各种截面的截面惯矩	16
§ 7. 截面惯矩的图解法	20
§ 8. 截面的主轴及主惯矩	21
§ 9. 惯性圆	22
第三章 静定梁	26
§ 1. 梁的分类	26
§ 2. 反力	27
§ 3. 直接荷载下的剪力和弯矩	29
§ 4. 直接荷载下的反力、剪力和弯矩的图解法	30
§ 5. 直接荷载下简支梁与悬臂梁的剪力和弯矩的例题	31
§ 6. 荷载集度、剪力和弯矩之间的关系	36
§ 7. 间接荷载下的剪力和弯矩	38
§ 8. 影响线	39
§ 9. 移动集中荷载的最大剪力及最大弯矩	42
§ 10. 剪力包络图和弯矩包络图	44
§ 11. 多跨静定梁	47
§ 12. 恒载作用下多跨静定梁的剪力和弯矩	48
§ 13. 多跨静定梁的影响线	48
§ 14. 承受间接荷载的多跨静定梁的剪力和弯矩	50
§ 15. 静定曲梁	50
第四章 梁的应力及挠度	54
§ 1. 梁的应力	54
§ 2. 弯矩引起的梁的挠曲线	60

§ 3. 用弯矩图计算梁的挠曲线的方法	68
§ 4. 剪力引起的挠度	75
§ 5. 温度变化引起的挠度	76
第五章 超静定梁	77
§ 1. 超静定梁	77
§ 2. 固端梁	77
§ 3. 一端固定, 另端活动铰支的梁	80
§ 4. 承受轴向荷载和横向荷载的固端梁	82
§ 5. 完全固定梁	84
§ 6. 弹性地基梁	86
第六章 长柱	91
§ 1. 长柱	91
§ 2. 欧拉公式	91
§ 3. 实用公式	97
第七章 杆的扭转	100
§ 1. 圆截面杆的扭转应力	100
§ 2. 非圆形截面杆的扭转应力	101
§ 3. 开口薄壁截面的扭转应力	102
§ 4. 闭口薄壁截面的扭转应力	103
第八章 用差分法计算梁和长柱的数值方法	104
§ 1. 差分法的基本公式	104
§ 2. 梁的弯矩和挠度	104
§ 3. 弹性地基梁	107
§ 4. 长柱的屈曲	111
第九章 静定桁架	114
§ 1. 静定桁架	114
§ 2. 静定结构与超静定结构的判别	115
§ 3. 静定桁架的解法	117
§ 4. 平行弦华伦桁架及普腊桁架的杆力影响线	123
§ 5. 曲弦华伦桁架及普腊桁架的杆力影响线	128
§ 6. K 式桁架的杆力影响线	133
§ 7. 再分普腊桁架的杆力影响线	137
§ 8. 多跨静定桁架的杆力影响线	140
§ 9. 静定桁架杆力影响线的一般解法	141
第十章 用转角位移法解刚架和连续梁	146
§ 1. 转角位移法及转角位移方程式	146
§ 2. 结点方程式及剪切方程式	153
§ 3. 单孔刚架	155
§ 4. 多跨单层刚架	165
§ 5. 多跨多层刚架	175
§ 6. 刚架影响线的例题	182

§ 7. 箱形刚架	187
§ 8. 连续梁	192
§ 9. 四弯矩方程式及三弯矩方程式	196
§ 10. 用差分方程式解连续梁和刚架	200
§ 11. 异形刚架	209
§ 12. 力矩分配法	220
§ 13. 用杆单元刚度矩阵解梁和刚架	223
第十一章 用最小功原理解超静定结构	230
§ 1. 内功	230
§ 2. 卡斯奇梁诺定理及最小功原理	231
§ 3. 用最小功原理解超静定结构的一般公式	232
§ 4. 例题	234
第十二章 用虚功原理解超静定结构	239
§ 1. 虚功原理	239
§ 2. 用虚功原理计算结构的弹性位移	241
§ 3. 互等定理及其应用	246
§ 4. 用虚功原理计算超静定结构的一般解	248
§ 5. $\int M_1 M_2 dx$ 的计算公式	252
§ 6. 连续梁	254
§ 7. 二铰拱	261
§ 8. 二铰刚架	268
§ 9. 内部超静定桁架	273
§ 10. 用弹性中心法解超静定结构	275
§ 11. 用矩阵法计算超静定结构内力及挠度的数值方法	284
第十三章 用位移法解超静定结构	296
§ 1. 位移法	296
§ 2. 铰结桁架的位移法基本公式	296
§ 3. 铰结点的平衡方程式	299
§ 4. 超静定桁架例题 1	301
§ 5. 超静定桁架例题 2	302
§ 6. 刚结结构的位移法基本公式	305
§ 7. 刚结点的平衡方程式	307
§ 8. 刚结结构例题 1	309
§ 9. 刚结结构例题 2	311
§ 10. 刚结结构例题 3	312
第十四章 结构弹性变形的图解法	316
§ 1. 维略-摩尔的位移图法	316
§ 2. 用弦转角求位移图的方法	319
§ 3. 用弹性荷载法确定挠度	325
第十五章 承受偏心荷载的杆件应力及组合应力	328

§ 1. 偏心荷载	328
§ 2. 截面内的应力分布	328
§ 3. 截面核心	331
§ 4. 核点力矩及外缘应力	332
§ 5. 组合应力	334
§ 6. 单纯压力或单纯拉力的应力	334
§ 7. 由作用于两相互垂直面上的正应力及剪应力求作用于第三面上的应力	334
§ 8. 主应力	336
§ 9. 由一对主应力求第三面上的应力	336
§ 10. 由一对主应力用图解法求第三面上的应力	338
§ 11. 应力椭圆	339
§ 12. 共轭应力	340
§ 13. 由作用在两平面上的应力求主应力	340
§ 14. 主应力与共轭应力的关系	341
§ 15. 梁内最大应力	342
§ 16. 坝表面的主应力	343
第十六章 用有限单元法的平面应力的计算	346
§ 1. 有限单元法	346
§ 2. 分割成三角形单元时的有限单元法计算	346
§ 3. 分割成直角三角形单元时的有限单元法计算	354
§ 4. 分割成直角三角形单元时的平面应力的例题	356
§ 5. 分割成矩形单元时的有限单元法计算	361
§ 6. 变截面梁仅考虑弯曲时的有限单元法	367
第十七章 结构的塑性分析	372
§ 1. 塑性分析	372
§ 2. 桁架	372
§ 3. 受纯弯曲的梁的强度	374
§ 4. 悬臂梁及简单的超静定梁	375
§ 5. 简单刚架	376
§ 6. 按虚功计算破坏荷载的方法	377
第十八章 质点系的振动	378
§ 1. 简谐振动	378
§ 2. 单质点振动	379
§ 3. 多质点多自由度体系的振动	386
第十九章 杆状结构的弯曲振动	395
§ 1. 弯曲振动的基本方程	395
§ 2. 固有振动的一般解	395
§ 3. 一端固定, 另一端自由杆的固有振动	397
§ 4. 两端固定杆的固有振动	398
§ 5. 两端铰支杆的固有振动	399
§ 6. 下端固定、上端自由杆状结构的强迫振动	400

§ 7. 顶端承受集中荷载下端固定的杆状结构的固有振动	401
§ 8. 承受单个荷载的梁的弯曲振动	402
§ 9. 特殊刚架结构的振动	408
§ 10. 多跨多层刚架的固有振动	412
第二十章 剪切振动	414
§ 1. 剪切振动方程式	414
§ 2. 固有振动	414
§ 3. 强迫振动	416
§ 4. 有限个质量分布在剪切振动体上的情况	417
§ 5. 同时考虑弯曲变形和剪切变形时的振动	418
§ 6. 进深极长的三角形截面结构的剪切振动	421
§ 7. 有限进深的三角形截面的剪切振动	424
第二十一章 用能量法的固有振动周期近似解	428
§ 1. 瑞利的能量法	428
§ 2. 等截面梁的固有振动周期	430
§ 3. 振动曲线作特殊假定时的固有振动周期	430
§ 4. 刚架的竖向振动周期	432
§ 5. 刚架的水平振动周期	434
§ 6. 单跨单层到五跨五层刚架的水平振动周期	436
第二十二章 用转角位移法解刚架的振动	438
第二十三章 杆的扭转及纵向振动	442
§ 1. 杆的扭转振动	442
§ 2. 杆的纵向振动	445
第二十四章 刚体的摇摆振动	447
§ 1. 刚体的转动方程	447
§ 2. 转动惯量计算	448
§ 3. 复摆及扭转摆	451
第二十五章 衰减振动	453
§ 1. 衰减固有振动	453
§ 2. 有阻尼的强迫振动	456
第二十六章 结构的地震反应分析	460
§ 1. 单质点单自由度结构的地震反应分析	460
§ 2. 地震反应谱	462
§ 3. 地面运动为正弦波或余弦波时的反应	463
§ 4. 主振型的正交性	464
§ 5. 多质点多自由度结构的地震反应分析	467
§ 6. 四层刚架结构的地震反应计算例题	471
第二十七章 矩阵的数学	480
§ 1. 矩阵	480
§ 2. 特殊矩阵	480
§ 3. 矩阵的加法和减法	481

§ 4. 矩阵的乘法·····	482
§ 5. 矩阵的除法和逆矩阵·····	485
§ 6. 转置矩阵·····	489
§ 7. 矩阵的特征多项式及特征方程·····	489
§ 8. 矩阵的对角化变换·····	491
§ 9. 一次联立方程式的解法·····	492
§ 10. 一阶齐次联立微分方程式的解法·····	493
§ 11. 一阶非齐次联立微分方程式的解法·····	494
§ 12. 高阶常微分方程式的解法·····	495
§ 13. 一阶联立微分方程及高阶微分方程的算例·····	496

第一章 力和力矩

§ 1. 力

在工程上所用的力的单位,用重力单位时是公斤、吨等。力由给定的大小、方向、指向及位置确定。因而,力可用直线的长度、方向、箭头及位置构成的图形表示。可是,由于力的大小由公斤、吨等给定,而另一方面,因为直线的长度用厘米、米等表示,所以若能预先规定这两者的关系,那末就可以用比例尺把力绘成图。并且可由已绘出的图形量出力的大小。

§ 2. 交于一点的平面力系的合力及平衡

1. 两力的合力

求取交于一点的两力的合力,有如下三种方法。

a. 平行四边形法

在图 1.1 中,设 P_1 与 P_2 为给定的两力,它们作用于一点 O , 其合力显然仍通过 O 点。设 P_1 与 P_2 是分别用直线 Oa 和 Ob 表示其大小、方向、指向和位置的两力,其合力 R 由以 Oa 和 Ob 为边的平行四边形 $Oacb$ 的对角线 Oc 给定。这个平行四边形称为力的平行四边形。

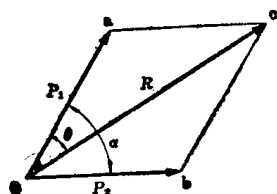


图 1.1

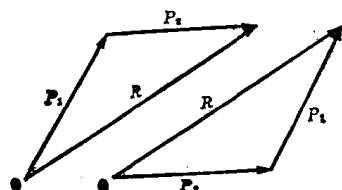


图 1.2

b. 三角形法

在图 1.1 中, Ob 与 ac 大小相等且平行; Oa 与 bc 也是大小相等且平行的, 所以, 如图 1.2 所示, 从 P_1 前端绘 P_2 , 或从 P_2 的前端绘 P_1 而作出三角形时, 其闭合线即给出合力 R 。这个三角形称为力三角形。

c. 解析法

在解析方面, 在图 1.1 的 $\triangle Oac$ 中

$$\overline{Oc}^2 = \overline{Oa}^2 + \overline{ac}^2 - 2\overline{Oa} \cdot \overline{ac} \cos(\pi - \alpha)$$

因而

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos \alpha$$

这样, 合力的大小为

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos \alpha} \quad (1.1)$$

并且,合力 R 与 P_1 形成的角 θ , 由 $\triangle Oac$ 得

$$\frac{R}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{P_2}{\sin \theta} \quad \text{所以} \quad \sin \theta = \frac{P_2}{R} \sin \alpha \quad (1.2)$$

如图 1.3 所示, 若二力的夹角成直角, 则 $\cos \alpha = 0$, $\sin \alpha = 1$, 因此

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}, \quad \sin \theta = \frac{P_2}{R} \quad (1.3)$$

式(1.3)的关系也可由 $\triangle Oac$ 是直角三角形直接求得。

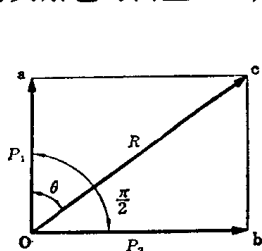


图 1.3

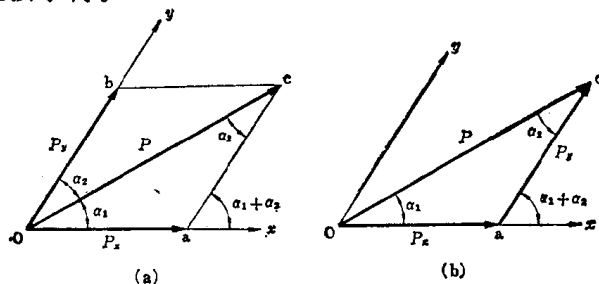


图 1.4

2. 分力

采用一个与求合力时完全相反的方法, 可以将一力分解成给定了位置和方向的两个分力。

这就是说, 在图 1.4(a) 中, 为了把 P 分解成 Ox 和 Oy 方向的两分力, 只要以 P 为对角线绘出两边, 它们与 Ox 、 Oy 平行并且构成平行四边形, 则 Oa 及 Ob 分别为 x 及 y 方向的两分力 P_x 及 P_y 。

或者, 如图 1.4(b) 所示, 从 P 的前端 c 引 Oy 的平行线, 设它与 Ox 的交点为 a , 由求得的 $\triangle Oac$ 可知 Oa 为 P_x , ac 为 P_y 。若与图 1.4(a) 相对照, 这个结果是很清楚的。

在解析方面, 由 $\triangle Oac$ 得

$$\frac{P_x}{\sin \alpha_2} = \frac{P_y}{\sin \alpha_1} = \frac{P}{\sin \{\pi - (\alpha_1 + \alpha_2)\}} = \frac{P}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

因而

$$P_x = P \frac{\sin \alpha_2}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad P_y = P \frac{\sin \alpha_1}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (1.4)$$

在 Ox 水平, Oy 竖直的情况下, 该方向的分力, 分别称为水平分力和竖向分力, 通常以 H 及 V 表示。由图 1.5 得

$$H = P_x = P \cos \alpha, \quad V = P_y = P \sin \alpha \quad (1.5)$$

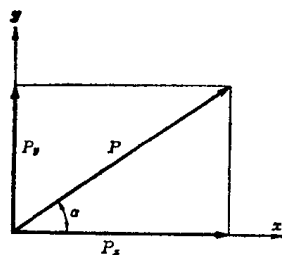
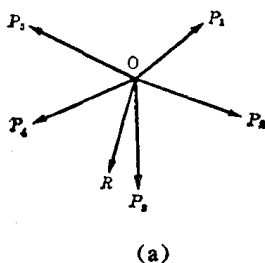
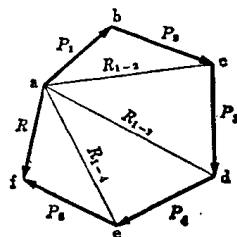


图 1.5



(a)



(b)

图 1.6

3. 多个力的合力

在图 1.6(a)中, 设 $P_1, P_2, \dots, P_5$ 为给定的力, O 为这些力的作用点。我们称图 1.6(a) 为力的作用图或位置图, 它示出力所作用的位置。

首先, 作力三角形求出五个力中任意两个力, 例如作力的三角形求出 P_1 和 P_2 的合力。即图 1.6(b)的 $\triangle abc$, 其合力 ac 为 R_{1-2} 。其次, 作力三角形 acd 求出合力 R_{1-2} 与 P_3 的合力。 ad 所表示的 R_{1-3} 即为此合力。重复同样的作图, 直到绘出 af 即给定 $P_1, P_2, \dots, P_5$ 的合力 R 的大小和方向。这合力 R 的作用点, 当然也还是 O 。

在图 1.6(b)中, 为了说明而标出了 R_{1-2}, R_{1-3} 等, 但实际上, 如果将给定的力按 $ab, bc, cd, \dots$ 连续地依次绘出, 再从起点到终点绘一直线, 即多边形 $abcdef$ 的闭合线 af , 则该线给出了合力的大小和方向。

这个多边形称为力图或力多边形。绘制力多边形时, 即使改变 $P_1, P_2, \dots, P_5$ 的顺序, 多边形的形状虽有变化, 但对求取合力并无影响。

在解析方面, 设给定的力 $P_1, P_2, \dots, P_5$ 与水平轴所形成的角分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5$, 如图 1.7 所示, 则

$$\left. \begin{aligned} \text{水平分力的和} &= P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \dots + P_5 \cos \alpha_5 \\ &= \sum P \cos \alpha = \sum H \\ \text{竖向分力的和} &= P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 + \dots + P_5 \sin \alpha_5 \\ &= \sum P \sin \alpha = \sum V \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

因而, 合力 R 的大小及其与水平轴的夹角 θ 为

$$R = \sqrt{(\sum H)^2 + (\sum V)^2}, \quad \tan \theta = \frac{\sum V}{\sum H} \quad (1.7)$$

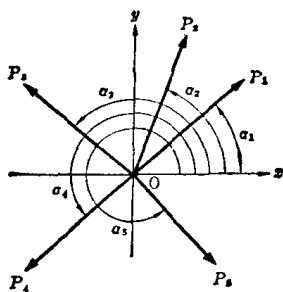


图 1.7

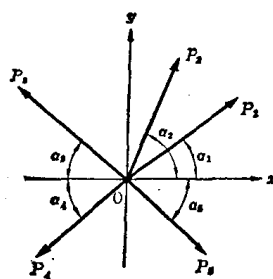


图 1.8

在式(1.6)中, $\cos \alpha$ 和 $\sin \alpha$ 按 α 的大小取正值或负值, 分力向上或向右者为正, 向下或向左者为负。因而, 如果预先规定这一点, 则 $\sum H$ 和 $\sum V$ 的计算是方便的。设 α 如图 1.8 所示, 则

$$\sum H = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 - P_3 \cos \alpha_3 - P_4 \cos \alpha_4 + P_5 \cos \alpha_5$$

$$\sum V = P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 + P_3 \sin \alpha_3 - P_4 \sin \alpha_4 - P_5 \sin \alpha_5$$

例题 试求图 1.9(a) 所示的四个力的合力

$$\sum H = 12 - 4 \cos 30^\circ - 15 \cos 45^\circ = 12 - 4 \times 0.866 - 15 \times 0.707 = -2.07 \text{ t}$$

$$\sum V = 4 \sin 30^\circ - 15 \sin 45^\circ - 10 = 4 \times 0.5 - 15 \times 0.707 - 10 = -18.60 \text{ t}$$

$$\therefore R = \sqrt{(-2.07)^2 + (-18.60)^2} = \sqrt{350.24} = 18.71 \text{ t}$$

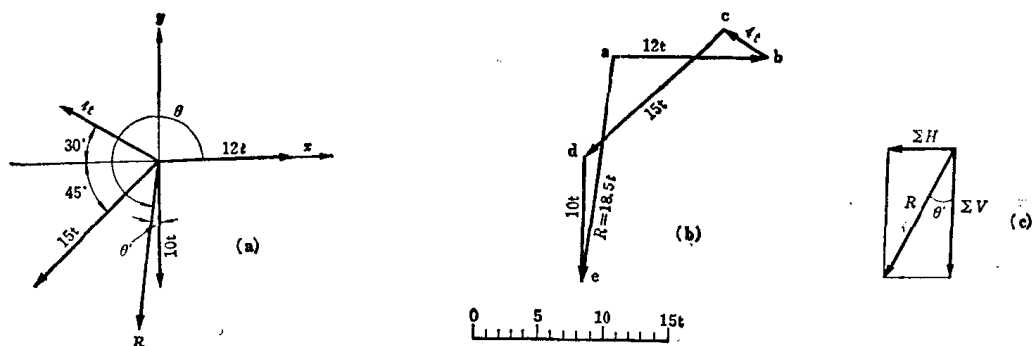


图 1.9

$$\tan \theta = \frac{-18.60}{-2.07} = 8.98 \quad \therefore \theta = 263^\circ 40'$$

或者由图 1.9(c)

$$\tan \theta' = \frac{2.07}{18.60} = 0.111 \quad \therefore \theta' = 6^\circ 20'$$

用图解法,以图所示比例尺绘力多边形如图 1.9(b),由 ae 给出合力的大小和方向,其大小按图所示比例尺计量为 $R = 18.5 \text{ t}$ 。

4. 交于一点的平面力系的平衡

今有一交于一点的平面力系 $P_1, P_2, \dots, P_n$, 在绘制这五个力的力多边形图时,如果象图 1.10 所示,形成闭合多边形,则其合力为零,即此平面力系处于平衡状态。因此,平面力系的平衡条件是它的力多边形闭合。

在解析方面,各力的水平分力的和以及竖向分力的和均为零时,其合力即为零,所以平面力系的平衡条件如下:

$$\Sigma H = 0, \quad \Sigma V = 0 \quad (1.8)$$

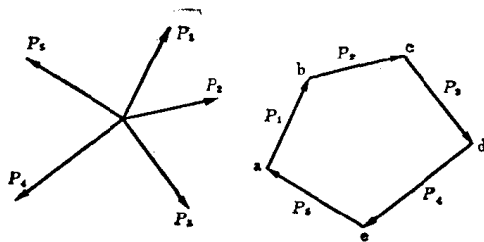


图 1.10

例题 1 如图 1.11 所示,有交于 O 点,处于平衡状态的四个力 $P_1 \sim P_4$, $P_1 = 45 \text{ t}$, $P_2 = 6 \text{ t}$, 当仅给出 P_3 和 P_4 的作用线时,试求 P_3 和 P_4 的大小和指向。

假定 P_3 和 P_4 的指向如图所示,则由平衡条件 $\Sigma H = 0$ 以及 $\Sigma V = 0$ 得:

$$45 \sin 34^\circ 40' - P_3 \sin 34^\circ 40' - P_4 = 0$$

$$45 \cos 34^\circ 40' - 6 + P_3 \cos 34^\circ 40' = 0$$

$$\sin 34^\circ 40' = 0.5688, \quad \cos 34^\circ 40' = 0.8225$$

式中

由此两式得

$$P_3 = -37.70 \text{ t}, \quad P_4 = 47.04 \text{ t}$$

P_3 为负,表示 P_3 的实际指向与假定的指向相反。

用图解法,如图 1.12 所示,绘出力多边形而使之闭合,据此可求出 P_3 及 P_4 的大小和指向。力多边形如图 1.12(a) 或 1.12(b) 所示。 P_3 和 P_4 的大小为 $P_3 = 38 \text{ t}$, $P_4 = 47 \text{ t}$ 。

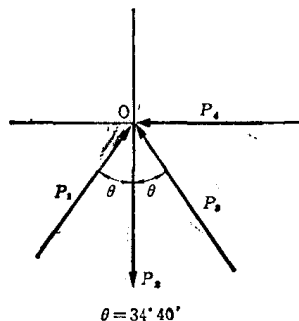


图 1.11

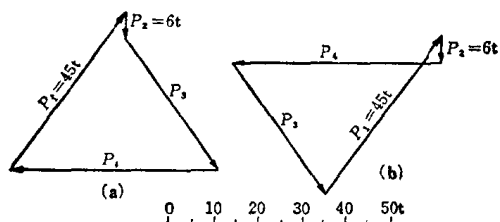


图 1.12

例题 2 如图 1.13(a)所示, 将长度 10 m 的绳索, 固定在跨度 8 m 的水平的两点上, 试求绳中央吊一 500kg 的物体时绳的作用力。

$$f = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ m}, \quad \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

设绳的张力为 T , 由 $\Sigma V = 0$ 的平衡条件:

$$2T \sin \alpha = 500 \text{ kg}, \quad T = \frac{1}{2} \times 500 \times \frac{5}{3} = 417 \text{ kg}$$

用图解法, 作图如图 1.13(b)所示, 则 $T \approx 420 \text{ kg}$ 。

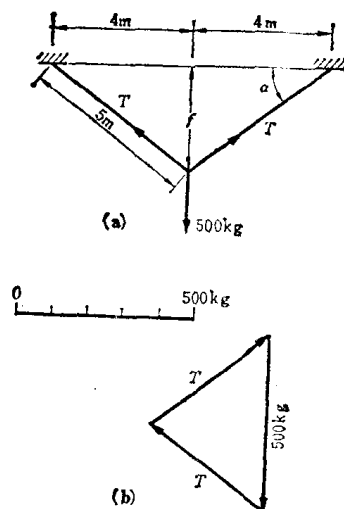


图 1.13

§3. 不交于一点的平面力系的合力及平衡

1. 合力

在求取图 1.14(a)所示的不交于一点的平面力系 $P_1 \sim P_4$ 的合力时, 首先, 求 P_1 和 P_2 的合力 R_{1-2} , 由图 1.14(b)的 ac 给出其大小和方向。此合力通过 P_1 和 P_2 的交点 A。

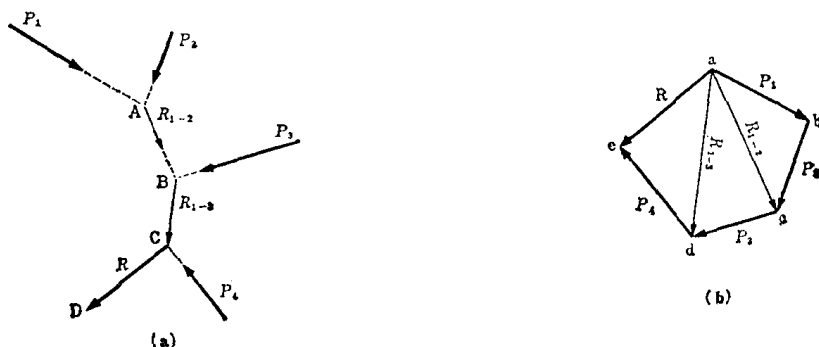


图 1.14

其次, 求 R_{1-2} 与 P_3 的合力 R_{1-3} , 由 ad 给出其大小和方向, 且通过 R_{1-2} 和 P_3 的交点 B。再又求 R_{1-3} 与 P_4 的合力, 即 $P_1 \sim P_4$ 的合力, 由 ae 给出其大小和方向, 且通过 P_4 和 R_{1-3} 的交点 C。

上面所述的方法, 虽然能求出如上作用而不交于一点的平面力系的合力的大小、方向及位置, 但是, 当要合成的两力接近于平时, 求取这两个力的交点就会变得很困难, 上述方法就不适用了。因此, 一般采用下面的方法。

在图 1.15(a)中, 设 $P_1 \sim P_4$ 是任意散布的给定力。首先, 绘制图 1.15(b)所示的力多边形, 并求出合力的大小和方向。即 ae 所示。然后在力多边形图中任取一点 O, 将 a、b、...、e 与 O 相连, 并将各力分解成两个分力。即把 P_1 分解成 aO 及 Ob; P_2 分解成 bO 及 Oc; P_3 分解成 cO 及

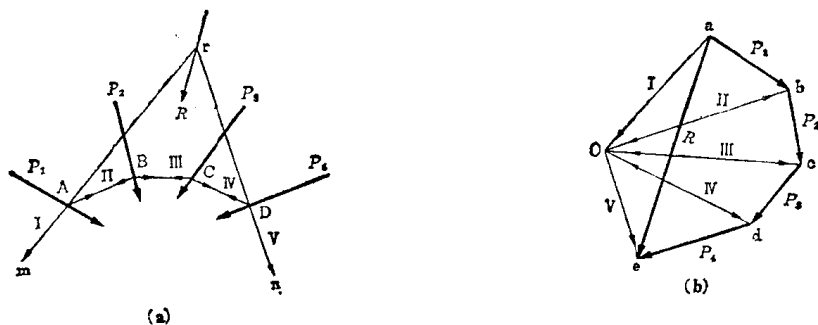


图 1.15

Od; P_4 分解成 dO 及 Oe。

其次, 在表示 $P_1 \sim P_4$ 的作用位置的图 1.15 中, 将 P_1 在其作用线上任意一点 A 分解成与 aO(I) 及 Ob(II) 有相同大小和方向的两个分力。然后, 再在与 Ob 平行的 AB 和 P_2 的交点 B 处, 把 P_2 也分解成与 bO(II) 和 Oc(III) 相等的两个分力。同样, 在 C 点及 D 点分别把 P_3 和 P_4 分解成与 cO(III)、Od(IV) 及 dO(IV)、Oe(V) 相等的两分力。

然而, P_1 的分力 II 与 P_2 的分力 II 大小及方向相同而指向相反。同样, P_2 的分力 III 和 P_3 的分力 III 大小及方向相同, 只是指向相反。进而 P_3 的分力 IV 和 P_4 的分力 IV 也是如此。因而图 1.15(a) 中的分力 II、III、IV 都抵消了, 剩下的只是 Am(I) 及 Dn(V)。结果 $P_1 \sim P_4$ 被 Am 及 Dn 两力所代替。这两个力的交点 r 即 Am 和 Dn 的合力, 即 $P_1 \sim P_4$ 的合力通过的点。

在图 1.15(a) 中的 mABCDn 多边形称为索多边形。图 1.15(b) 中的 O 点称为极点; Oa、Ob、...、Oe 称为射线。

现将上面所述的求合力的方法归纳如下。首先, 绘力多边形 abcde 并求出合力 R 的大小和方向。然后任选一极点 O, 引射线 Oa、Ob、...、Oe。在表示出力作用位置的图上, 从 P_1 作用线上任意一点 A 开始, 依次作线段 mA // Oa、AB // Ob、...、Dn // Oe, 绘出索多边形。该索多边形的两端边的交点 r 给出合力 R 所通过的点。

其次, 给定的平面力系是图 1.16 以及图 1.17 所示的平行力系时, 通过与图 1.15 的情形完全相同的作图, 也能求出其合力的大小、方向和作用点。图 1.17 所示平面力系是一指向相反的平行力系, 在这种情况下, 我们把力作用位置间的间隔用图示的 A、B、...、E 表示, 在 A 和 B 之间的力记作 AB, B 和 C 之间的力记作 BC, 设与此对应的力多边形中的力为 ab、bc、...、de。这种表示方法称为鲍乌(Bow)符号法。此时, 合力 R 的大小为 ae, 绘索多边形时, 按 Oa、Ob、...、Oe 的次序, 依次作它们的平行线即得。

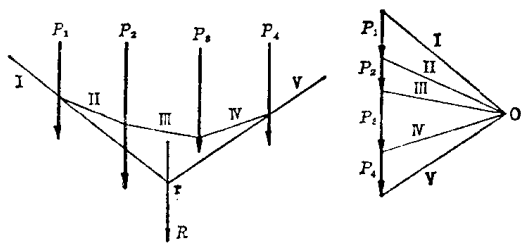


图 1.16

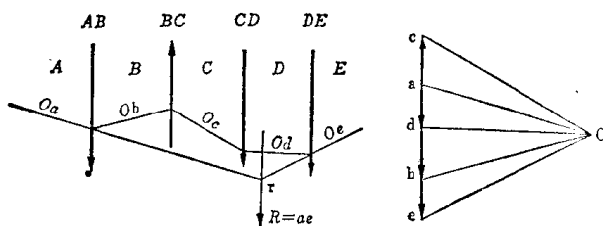


图 1.17