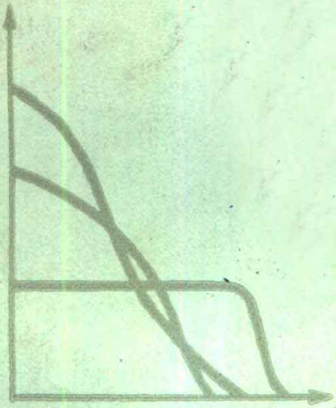
统计物理学解题指导



高等院校理论物理解题指导丛书

高等院校理论物理解题指导丛书

统计物理学解题指导

李湘如 陈福生
李佛铨 王绍海 编

一九八三年·南昌

高等院校理论物理解题指导丛书
统计物理学解题指导
李湘如等编
江西人民出版社出版
（南昌市第四交通路铁道东路）
江西省新华书店发行　　江西新华印刷厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张 14.75　字数 35万
1983年10月第1版　1983年10月第1次印刷
印数 1—10,000
统一书号：7110·412　　定价 1.53 元

内 容 提 要

本书是高等院校理论物理解题指导丛书中的一本。全书分为七章，共选有几率、刘维定理和麦克斯韦分布律、平衡态的统计理论、配分函数和气体的平衡性质、非平衡态的统计理论、涨落理论、量子统计学大意方面的各种题目近四百道。

本书适合高等院校理工科有关专业师生使用，也可供自学青年参考。

前　言

理论物理学是高等院校理工科的必修课。它的任务是，建立各种物理量之间的关系，找出反映客观世界的物理规律。在当代的物理学中，人们正在致力于太空奥秘和物质结构更深层次的探索，因而理论物理学的有关思想和方法得到了非常广泛的运用。但是，不少人在学习理论物理的过程中，却感到其理论深奥难懂，解答问题亦较困难。为了适应我国四化建设的需要，有助于广大师生和有关人员的学习，江西人民出版社组织编写了这套“高等院校理论物理解题指导丛书”。

这套丛书共包括《理论力学解题指导》、《热力学解题指导》、《统计物理学解题指导》、《电动力学解题指导》和《量子力学解题指导》五本。

这套丛书的选题原则是，以加强基本训练为主，也适当收集一些难度较大的、反映现代科学技术内容的新题目，以适应不同读者的需要。其编写方式是，每本书的各章均包括以下四部分：一、本章解题所需的重要概念和关系式；二、具有题意分析、解题思路、解题方法的典型例题，其中部分例题做了简要说明和讨论，指明了解题时容易出现的错误，提出了判断解答正误的方法；三、仅有简单演算或证明过程的题解；四、供读者自己练习的计算或求证习题，其中计算习题附有答案。

《统计物理学解题指导》全书分为七章，共有统计物理学方面的各种题目近四百道。

本书适合综合性大学、高等师范院校、部分理工科院校等有关专业的广大师生使用，也可供电视大学、业余大学、进修

学院有关专业师生和自学青年参考。

本书由李湘如、陈福生、李佛铨、王绍海同志编写，李湘如同志主编。全部书稿承中国科学院上海生物化学研究所徐京华研究员、丁达夫副研究员审阅，在此表示由衷的谢意。

由于时间仓促和我们业务水平所限，错误和欠妥之处一定难免，诚恳地希望广大读者批评指正。

编　者

1982年9月

目　录

第一章　几　率

一、重要概念和关系式

1．几率：任意事件的集合中，某一事件发生的机会称为几率。在统计物理学中，几率是体系处在某一微观运动状态范围内的机会大小的量度。

2．几率密度：通常 $\rho(u)du$ 表示连续变量 u 在 u—$u+du$ 范围内发生的几率，其中 $\rho(u)$就称为连续变量 u 的几率密度。

3．几率归一化：考虑一个外界条件不变下的平衡态体系，一切可能的微观运动状态的总几率必然等于1。这个结果，称为几率归一化，即

$$\sum_i P_i = 1$$

对于连续变化的状态，几率归一化条件写成

$$\int \rho(u)du = 1$$

积分包括所有一切可能的微观运动状态。

4．几率加法定理：相互排斥的诸事件中，发生其中之一的几率，等于诸事件单独发生时的几率之和。例如，事件 i 和事件 j 不可能同时发生，而发生事件 i 或 j 的几率为

$$P_{i+j} = p_i + p_j$$

5．几率乘法定理：相互独立的诸事件，它们同时发生的几率，等于诸事件单独发生时的几率之积。例如，相互独立的多组事件，在第一组中的第 i 个事件 A_i 发生的几率为 p_i，第二组中的第 j 个事件 B_j 发生的几率为 q_j，……第 r 组中的第 k 个事件 C_k 发生的几率为 s_k。同时考虑这 r 组事件时，事件 A_i、B_j、……C_k 同时发生的几率为：

$$P_{i\times j\times\cdots\cdots\times k}=p_iq_j\cdots\cdots s_k$$

6．热力学几率：一种分布（宏观状态）下体系所包含的微观运动状态数 Ω（又称配容数）称为热力学几率。这是相对几率，它的数值可以足够大，通常用下式表示：

$$\Omega=\frac{N!}{\prod\limits_i(N_i!)}$$

式中 N 为体系的粒子数，N_i 是具有能量为 ε_i 的粒子数。

7．二项式分布：给定 N 个统计独立的事件，每一事件发生的几率为 p，不发生的几率为 $q=1-p$，则 N 个事件中有 n 个事件发生的几率就是二项式分布：

$$P(n)=\frac{N!}{n!(N-n)!}p^nq^{N-n}$$

8．平均值：我们定义变量 u 的平均值为

$$\overline{u}=\sum_i P_iu_i$$

累加号是对 u 的所有可能值求和，式中 P_i 表示特殊值 u_i 发生的几率。

9．弥散：我们定义变量 u 的弥散为：

$$\overline{(\Delta u)^2}=\sum_i P_i(u_i-\overline{u})^2$$

10．涨落和相对涨落：我们定义变量u的涨落和相对涨落分别为：

$$\left[\overline{(\Delta u)^2}\right]^{1/2} \text{ 和 } \frac{\left[\overline{(\Delta u)}\right]^{1/2}}{\overline{u}}$$

11．泊松分布：

$$P(n)=\frac{\overline{n}^{n}}{n!}e^{-\overline{n}}$$

12．高斯分布：

$$P(n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{n}}}e^{-\frac{(n-\overline{n})^2}{2\overline{n}}}$$

13．原点矩和中心矩：我们定义随机变量n的k阶原点矩为：

$$\overline{n^k}=\sum_{n=0}^{\infty}n^kP(n)$$

定义随机变量n的k阶中心矩为：

$$\overline{(n-\overline{n})^k}=\sum_{n=0}^{\infty}(n-\overline{n})^kP(n)$$

14．斯特令近似公式：当N很大时，则有

$$N!=\left(\frac{N}{e}\right)^N(2\pi N)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ln N!=N\ln N-N+\frac{1}{2}\ln(2\pi N)$$

15．定积分公式：

(1) $\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx=\Gamma(n)$

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)，\text{当 } n>0 \text{ 时 } \Gamma(n+1)=n!$$

而 $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

(2) $\int_0^\infty u^{2n}e^{-\lambda u^2}du=\frac{1\cdot 3\cdots\cdots(2n-1)}{2^{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}$

(3) $\int_0^\infty u^{2n+1}e^{-\lambda u^2}du=\frac{n!}{2\lambda^{n+1}}$

(4) $erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-y^2}dy$

16．相空间：用广义坐标q_1、q_2、……、q_S，广义动量p_1、p_2、……、p_S为直角坐标构成的一个$2S$维的抽象数学空间，称为相空间。

17．代表点：相空间中的任何一点，代表力学体系某时刻的一个微观运动状态。这个点，通常称为该力学体系的代表点。

18．相轨迹：随着时间的进展，力学体系的微观运动状态将随之改变，代表点将在相空间中运动。于是在相空间中可由正则方程确定代表点的运动轨道，称为相轨迹。

二、典 型 例 题

【例题 1】 一个质点按正弦规律$x=\sin(\omega t+\varphi)$振动。如果偶然测量该质点的位置，试求能够在$(x,\ x+dx)$间隔内发现该质点的几率。

（一）题意分析：

1．因为按正弦形式振动的质点在不同的x处具有不同的速度，在$(x,\ x+dx)$这一间隔内发现该质点的几率不仅与x有关，且与dx有关。换句话说，质点在不同的x处将以不

同的速度通过相同的间隔 dx，但质点在不同 x 处的相同间隔中停留的时间是不同的（见图1—1）。因此，在偶然测量的情形下，发现该质点落在指定间隔（x，$x+dx$）内的几率与考察时间 dt 有关。

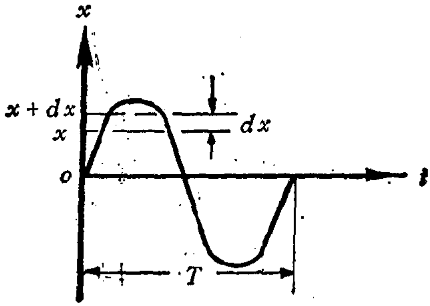


图1—1

2．振动的初位相 φ 对本题的结果不会有影响。

（二）解题思路：

1．根据题意分析，最好是选取质点在不同 x 处经历相同间隔 dx 所需的时间 dt，来定义题目所要求的几率。这是因为 dt 能够很好地反映出质点在不同 x 处的速度差异。

2．应当注意到，对于一个周期性的振动而言，质点将在 $\frac{1}{2}$ 周期内以 dt 时间间隔通过 x，$x+dx$ 的距离一次（见图1—1）。

（三）解法：

解法一：

1．根据几率的定义及解题思路的说明，可以立即写出

$$P(x)dx=\frac{dt}{T/2}=\frac{2dt}{T} \tag{1}$$

其中 dt 是质点通过 x，$x+dx$ 这段距离所需的时间。它应当

是 x 的函数，故对振动方程求微商即得：

$$dx=\omega\cos(\omega t+\varphi)dt=\omega\sqrt{1-x^2}dt \tag{2}$$

2. 我们注意到周期 T 与振动的圆频率 ω 之间的关系是：

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \tag{3}$$

把式(2)和式(3)代入式(1)，得到

$$P(x)dx=\frac{dx}{\pi\sqrt{1-x^2}} \tag{4}$$

解法二：

1. 根据分析 1 和思路 1 的说明，我们设几率为

$$P(x)dx=Adt \tag{5}$$

式中 A 为待定常数。

2. 用质点振动位移 x 表示时间 t，则有

$$t=\frac{1}{\omega}\arcsin x \tag{6}$$

3. 在式(6)中，当 x 取主值 $-1\sim1$ 时，t 取主值 $-\frac{\pi}{2\omega}\sim\frac{\pi}{2\omega}$，由几率归一化条件

$$\int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}} Adt=1$$

得

$$A=\frac{\omega}{\pi} \tag{7}$$

把式(6)和式(7)代入式(5)，得到

$$P(x)dx=\frac{\omega}{\pi}d\left(\frac{1}{\omega}\arcsin x\right)=\frac{\omega}{\pi}\cdot\frac{dx}{\omega\cos\omega t}$$

$$= \frac{dx}{\pi\sqrt{1-x^2}} \tag{8}$$

【例题 2】 设有 N 个自旋为$\frac{1}{2}$的粒子组成的理想体系，每个自旋都带有磁矩μ_0。如果该体系放置在一个外磁场B中时，则每个磁矩向上（指平行于B的方向）的几率为 p，向下（指反平行于B的方向）的几率为q，且 $p \neq q$，但这两个几率之和等于1。试证明N个磁矩中有 n 个向上的几率为

$$P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N$$

若外磁场B不存在，且令$N = 6$，算出各种可能的$P(n)$值。

（一）题意分析：

1. 首先注意到理想自旋体系所有磁矩是统计独立的，而每个磁矩的取向只能向上或向下，二者择一。

2. 如果理想自旋体系处在外磁场B中，则 $p \neq q$。如果没有外磁场B存在，则 $p = q = \frac{1}{2}$。

3. 本题要求在外磁场存在的情况下导出$P(n)$的表达式，此外还要求在外磁场不存在的情况下，具体算出$N = 6$的各种可能的$P(n)$值。

（二）解题思路：

1. 抓住分析1和2，先写出在N个粒子中有n个磁矩向上，而其余$N-n$个磁矩向下这一特定情形的几率。

2. 注意到从N个粒子中任意取出 n 个的组合方法数，立即可以得出$P(n)$的表达式。

3. 把$P(n)$的表达式改写成外磁场不存在的情形，并令$N = 6$，即可算出$N = 6$的各种可能的$P(n)$值来。

（三）解法：

由思路1得到 $p^n q^{N-n}$，由思路2得到$\frac{N!}{n!(N-n)!}$，从而得到

$$P(n)=\frac{N!}{n!(N-n)!}p^n q^{N-n} \tag{1}$$

由思路3得知，在外磁场不存在的情况下，$p=q=\frac{1}{2}$，且$N=6$，故式(1)成为

$$P(n)=\frac{6!}{n!(6-n)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{6-n}=\frac{6!}{n!(6-n)!}\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

由此可得：

$$\left.\begin{aligned}
P(0)&=\frac{6!}{0!6!}\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}\\
P(1)&=\frac{6!}{1!(6-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{6}{64}\\
P(2)&=\frac{6!}{2!(6-2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{15}{64}\\
P(3)&=\frac{6!}{3!(6-3)!}\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{20}{64}\\
P(4)&=\frac{6!}{4!(6-4)!}\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{15}{64}\\
P(5)&=\frac{6!}{5!(6-5)!}\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{6}{64}\\
P(6)&=\frac{6!}{6!0!}\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

（四）说明和讨论：

1．式(1)称为二项式分布，这是因为二项式$(p+q)^N$的展开形式是：

$$(p+q)^N=\sum_{n=0}^{N}\frac{N!}{n!(N-n)!}p^n q^{N-n} \qquad (3)$$

由此可见，式（3）中的等号右边的每一项，恰好就是式（1）中的$P(n)$，故称式（1）的$P(n)$为二项式分布。

2．把式（2）中的各种可能的$P(n)$值加起来，得到$\frac{64}{64}=1$。由此得知，式（1）的几率分布是满足归一化条件的，即

$$\sum_n P(n)=1 \qquad (4)$$

事实上由于$p+q=1$，故直接由式（3）便可得知式（4）成立。因此，归一化条件（4）是普遍成立的。

【例题3】 已知离散型随机变量n服从泊松分布

$$P(n)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \qquad (n=0,1,2,\cdots\cdots)$$

试计算随机变量n的原点矩与中心矩（均计算到四阶）。

（一）题意分析：

1．本题要求在已知泊松分布情形下计算n的原点矩和中心矩，均计算到四阶为止。

2．为了应用原点矩和中心矩的定义式，必须先检验题给的泊松分布$P(n)$是否归一化？如果是已经归一化了的$P(n)$，则可直接使用定义式。

（二）解题思路：

1．先验证题给的泊松分布是否满足归一化条件。

2．应用原点矩和中心矩定义式直接计算出二者的结果（到四阶为止）。

（三）解法：

1．根据思路1，有

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\left(1+\frac{\lambda}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\cdots\right)$$

$$=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1 \tag{1}$$

可见题给的泊松分布是归一化的，故可以应用原点矩和中心矩的定义式进行计算。

2。n 的各阶原点矩可以用两种等效的方法计算，$\overline{n}$ 和$\overline{n^2}$ 用一种方法，$\overline{n^3}$ 和$\overline{n^4}$ 用另一种方法。

$$\overline{n}=\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}=\lambda e^{-\lambda} e^{\lambda}=\lambda \tag{2}$$

$$\overline{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\cdot n$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(n-1) \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\right]$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\left[\lambda \sum_{n=2}^{\infty}(n-2) \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}+e^{\lambda}\right]=\lambda^2+\lambda \tag{3}$$

$$\overline{n^3}=\sum_{n=0}^{\infty} n^3 \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\left(\lambda+\frac{8 \lambda^2}{2!}+\frac{27 \lambda^3}{3!}+\frac{64 \lambda^4}{4!}+\cdots\right)$$

$$=e^{-\lambda}\left[\lambda+\lambda^2+\frac{\lambda^3}{2!}+\frac{\lambda^4}{3!}+\cdots+3\left(\lambda^2+\lambda^3+\frac{\lambda^4}{2!}+\frac{\lambda^5}{3!}+\cdots\right)\right.$$

$$\left.+\lambda^3+\lambda^4+\frac{\lambda^5}{2!}+\frac{\lambda^6}{3!}+\cdots\right]$$

$$=e^{-\lambda}\left[\lambda e^{\lambda}+3 \lambda^2 e^{\lambda}+\lambda^3 e^{\lambda}\right]=\lambda+3 \lambda^2+\lambda^3 \tag{4}$$

$$\overline{n^4}=\sum_{n=0}^{\infty} n^4 \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\left(\lambda+\frac{16 \lambda^2}{2!}+\frac{81 \lambda^3}{3!}+\frac{256 \lambda^4}{4!}+\cdots\right)$$