射影几何习题集

邱敦元　李全英　合编
杨文茂　审校

科学技术文献出版社重庆分社

高等学校教学参考书

射影几何习题集

邱敦元　李全英　合编

杨文茂　　审校

科学技术文献出版社重庆分社

射影几何习题集

邱敦元　李全英　编

科学技术文献出版社重庆分社　出版
重庆市市中区胜利路132号
新华书店重庆发行所　发行
四川省隆昌县印刷厂　印刷

开本：787×1092毫米 1/32 印张：12 字数：27万
1986年7月第1版　1986年7月第一次印刷
科技新书目：131—292　印数：1—4,000册

书号：13176·150　定价 2.00 元

内 容 简 介

本书是国内第一本射影几何习题集。全书分6章37节，包括从一维到高维射影几何方面的习题一千余道，选材全面，内容充实。编排由浅入深，与大学数学系射影几何课程的现行教材相适应。各章开头为内容提要，书末附有习题答案与提示，并对典型题目或难题给出了详尽的解法。

本书可供综合大学几何专业和高等师范院校数学系师生使用，亦可供中学数学教师参考。

前　言

目前，为了加强高等学校数学系几何课程的基础教学，已陆续出版了多种射影几何（或高等几何）教材，但与之配合的习题集至今国内尚未出版过。鉴于这一情况，并考虑到一九八三年十二月全国射影几何教学调研会上许多同行提出出版习题集的愿望，我们收集整理了这方面的习题1047道，编写成集，作为射影几何课程的教学参考书。

本书共分六章三十七节，习题按章节组合，与现行教材的教学顺序和要求相适应。在每章的开头，对有关理论作了简明扼要的介绍，列出了其中的基本概念和重要的公式与定理，为读者使用本书提供了方便。书末附有答案或提示，并对有代表性或较难的习题（有＊号者）给出了完整的解答。

书中习题大都由浅入深编排，既有属于帮助进行基本功训练的，也有属于灵活运用基本理论和提高解题技巧的。书中还包括了射影几何中一些有名的或有趣的题目：如射影对应几种定义的等价性；非 Desargues 几何和有限几何的实例等。此外，根据我们的教学实践，还编入了一些一般书中少见的内容较新的习题。

在本书编写过程中，武汉大学杨文茂副教授给予了很多的鼓励与指导，并亲自审校了全部书稿，我们在此谨致衷心的感谢。

由于编者水平有限，错误和不妥之处在所难免，敬请读者予以斧正。

编者　　1985年7月

目　　录

第一章 基本概念

内容提要

一 中心投影(透视)

1. 同一平面内二直线间的中心投影 设l与l'是同一平面内两条不重合的直线，O是平面内不在l与l'上的任意一点，将O与l上的点A、B、…联线，交l'于A'、B'、…，则l上的点与l'上的对应点一般有一一对应关系。称此种对应关系为平面上以点O为**投影中心**的直线l与l'间的**中心投影**。OA、OB、…是**投影线**。

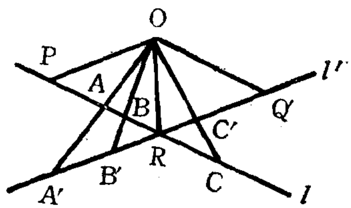

图 1.1

当$l \not\parallel l'$时，其交点R是**自对应点**；当投影线$OP \parallel l'$时，P的对应点不存在，称P为l上的**影消点**，当$OQ' \parallel l$时，Q'是l'上的影消点(图1.1)。

2. 从平面到平面的中心投影 设π与π'为两个不重合的平面(图1.2)，g为其交线，O为不在π与π'上的任意一点，过O引任一直线，依次交两平面于M及M'，

O 称**投影中心**，M 和 M' 互为**透视点**。π 与 π' 上的点之间的这种对应关系称为以点 O 为投影中心的平面 π 与 π' 间的**中心投影**。交线 g 是 **自对应线**。设 H 是 g 上 任 一 点。则 MH 与 $M'H$ 在此中心投影下是互相对应的。当投影线平行于二平面之一例如 π 时（图1.3），通过 O 作平面 $\omega \parallel \pi$，交 π' 于直线 l'，显然 $l' \parallel g$。l' 上任一点在 π 上不再有透视

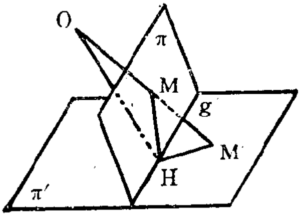

图 1.2

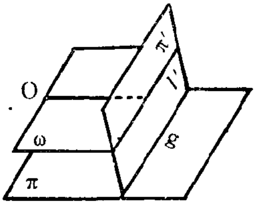

图 1.3

点，称 l' 为 π' 上的 **影消线**。类似地，过 O 作一平面平行于 π'，它与 π 的交线即为 π 上的影消线。

二　理想元素

影消点和影消线的存在，使得在中心投影下点与点之间的一一对应关系不完备，为了消除这种缺陷，必须引进理想元素对欧氏空间进行拓广。

1. 理想点　在平面内对于任何一组平行线引入唯一一点称为**理想点**（或**无穷远点**）与它们对应，此点在组中每一直线上而不在此组外任何直线上。欧氏直线补充了理想点后，称为**射影直线**。

2. 理想直线　一平面内一切理想点的集合组成一条直线，称为**理想直线**（或**无穷远直线**）。欧氏平面补充了理

想直线后，称为**射影平面**。

3. 理想平面　空间内一切理想直线的集合组成一个平面，称为**理想平面**（或**无穷远平面**）。欧氏空间补充了理想平面后，称为**射影空间**。

理想点、理想直线和理想平面统称为**理想元素**（或**无穷远元素**），非理想元素称为**真元素**。

引进理想元素之后，使得"平行"与"相交"两个概念得到了统一。

三　齐次坐标

为了解决无穷远元素的坐标问题，需要引进齐次坐标。

1. 一维齐次坐标　设欧氏直线上非无穷远点P的笛氏坐标为x，则适合$x_1:x_2=x$的两有序数x_1、x_2（其中$x_2\neq0$）称为P点的**一维齐次（笛氏）坐标**，记作$P(x_1,x_2)$。而$(x_1,0)$（其中$x_1\neq0$）或$(1,0)$规定为该直线上无穷远点的齐次坐标。为区别起见，称原有笛氏坐标x为**非齐次坐标**。

不同时为零的任何有序数x_1、x_2，可唯一确定直线上一点$P(x_1,x_2)$，$(0,0)$则不能决定任何一点。当$\rho\neq0$时，$(\rho x_1,\rho x_2)$与(x_1,x_2)表示同一点。

2. 二维齐次坐标　设平面内点P的笛氏坐标为(x,y)，则适合于$x_1:x_3=x$，$x_2:x_3=y$的三个有序数x_1、x_2、x_3（$x_3\neq0$）称为点P的**二维齐次坐标**，记作$P(x_1,x_2,x_3)$。而(x,y)则称为点P的**非齐次坐标**，平面内无穷远点的齐次坐标规定为$(x_1,x_2,0)$（其中x_1，x_2不同时为零）。

不同时为零的任何有序数x_1，x_2，x_3，可唯一确定平面内一点$P(x_1,x_2,x_3)$，$(0,0,0)$则不能决定任何一点。当$\rho\neq0$

时，$(\rho x_1, \rho x_2, \rho x_3)$与$(x_1, x_2, x_3)$表示同一点。

设平面内不过原点的直线方程为$ux+vy+1=0$，则称(u, v)为该直线的**非齐次坐标**或**卜氏**(Plücker)**坐标**。

设平面内直线l的卜氏坐标称为(u, v)，则适合于$u_1:u_3=u$，$u_2:u_3=v$的三个有序数u_1、u_2、u_3($u_3\neq 0$)称为直线l的**二维齐次坐标**，记为$l(u_1, u_2, u_3)$。

当$\rho\neq 0$时，$(\rho u_1, \rho u_2, \rho u_3)$与$(u_1, u_2, u_3)$是平面内的同一直线。

过原点的直线的齐次坐标为$(u_1, u_2, 0)$，但它无卜氏坐标；而无穷远直线$x_3=0$的齐次坐标为$(0, 0, 1)$。

平面上用齐次坐标时直线的方程是

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0 \qquad (1.1)$$

过平面内两点$A(a_1, a_2, a_3)$和$B(b_1, b_2, b_3)$的直线方程可写为

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0 \qquad (1.2)$$

在以点为基本元素的**点几何**里，点有坐标，直线有方程(1.1)，直线看作点移动轨迹(即点列)。

在以直线为基本元素的所谓**线几何**里，直线有坐标，点有方程(1.1)(此时把u_1，u_2，u_3看作变数，而x_1，x_2，x_3看作定数，于是(1.1)表示以定点(x_1, x_2, x_3)为中心的直线束)。点视为直线转动的包络。

设平面内两直线方程为

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$$

和

$$v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3=0,$$

则其交点的坐标为

$$x_1:x_2:x_3=\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \qquad (1.3)$$

3. 三维齐次坐标 设空间内点P的笛氏坐标为(x, y, z)，则适合于$x_1:x_4=x$，$x_2:x_4=y, x_3:x_4=z$的四个有序数x_1、x_2、x_3、$x_4(x_4\neq0)$称为点P的**三维齐次坐标**，记作$P(x_1, x_2, x_3, x_4)$。而(x, y, z)则称为点P的**非齐次坐标**。空间内无穷远点的齐次坐标规定为$(x_1, x_2, x_3, 0)$（其中x_1、x_2、x_3不同时为零）。

不同时为零的任何有序数x_1、x_2、x_3、x_4可唯一确定空间内一点$P(x_1, x_2, x_3, x_4)$，$(0, 0, 0, 0)$则不能决定任何一点。当$\rho\neq0$时，$(\rho x_1, \rho x_2, \rho x_3, \rho x_4)$与$(x_1, x_2, x_3, x_4)$表示同一点。

空间内用齐次坐标时平面的方程是

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4=0 \qquad (1.4)$$

且称(u_1, u_2, u_3, u_4)为该**平面的齐次坐标**。

无穷远平面$x_4=0$的齐次坐标为$(0, 0, 0, 1)$。

过空间不共线的三点$A(a_1, a_2, a_3, a_4)$，$B(b_1, b_2, b_3, b_4)$、$C(c_1, c_2, c_3, c_4)$的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}=0 \qquad (1.5)$$

在射影几何里，由于采用了齐次坐标，无穷远元素和非

无穷远元素即可不加区别了。

四　对偶原理

1. 射影平面内的对偶原理　点与直线称为射影平面内的**对偶元素**。点在直线上，或直线通过点，称为**点与直线接合**。若一几何命题只涉及到接合关系，便称为**射影的**。在射影命题中将“点”与“直线”互换，可得另一射影命题，这样的两个命题称为**对偶命题**。如果两命题一致，称为**自对偶命题**。

例如“两点决定一直线”与“两直线决定一点”是对偶命题；“三点及其两两联线组成一三点形”与“三线及其两两交点组成一三线形”是自对偶命题。

在射影平面内，如果两对偶命题中有一个命题成立，那么另一个命题也成立。此为射影平面内的**对偶原理**。

2. 射影空间内的对偶原理　点与平面称为射影空间内的对偶元素。点在平面上，或平面通过点，称为**点与平面接合**。只涉及到接合关系的几何命题称为**射影命题**。在射影命题中把“点”与“平面”互换，“直线”不变，可得另一射影命题，这样的两个命题称为**对偶命题**。如果两命题一致，称为**自对偶命题**。

在射影空间内，如果两对偶命题中有一个命题成立，那么另一个命题也成立。此为射影空间内的**对偶原理**。

五　复元素

在研究直线与二次曲线的相互位置时，需要考虑一元二次方程的根。若方程有两相异实根，则直线与二次曲线相交；

有两相等实根，则直线与二次曲线相切；无实根，则两者无公共点。引入复数解决了无实根的问题，相应地引入**复元素**可消除直线与二次曲线有无公共点的差别。

以复数为坐标的点或直线，称为**复点**或**复直线**。若两点或两直线的坐标互为共轭复数，则称为**共轭复点**或**共轭复直线**。

运用非齐次坐标时，坐标为实的，元素即为实的；坐标为虚的，元素即为虚的。运用齐次坐标时，当且仅当坐标相互的比值为虚数时，其代表的元素才是虚的。

所有复点的集合称为**复射影平面**。

复点 X 与复直线 u 相接合的条件仍为（1.1）。

一元素为实的充要条件是该元素与其共轭复元素重合。

如果复点 X 在复直线 u 上，则共轭复点 $\bar{X}$ 必在共轭复直线 $\bar{u}$ 上。

两共轭虚直线的交点为一实点；两共轭虚点的连线为一实直线。

六　平行投影与仿射

1. 同一平面内二直线间的平行投影　设 l 与 l' 是同一平面内不重合的两条直线，过 l 上诸点 A，B，C…画平行线截 l' 于 A'，B'，C'…。则 l 上的点 A，B，C，…与 l' 上的点 A'，B'，C'，…之间的一一对应关系称为直线 l 与 l' 间的**平行投影**，或称为直线 l 与 l'

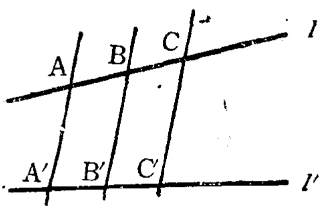

图　1.4

间的**透视仿射对应**。显然，它是一.1的中心投影当投影中心移到无穷远点时的特例。

2. 两平面间的平行投影 设π与π'是不重合的两个平面。过平面π内各点A，B，C，…引平行线交平面π'于A'，B'，C'，…。则π上的点A，B，C…与π'上的点A'，B'，C'，…之间的一一对应关系称为平面π与π'间的**平行投影**，或称为平面π与π'间的**透视仿射对应**。显然，它是一.2的中心投影当投影中心移到无穷远点时的特例。平行投影的自对应点的轨迹称为**对应轴**。

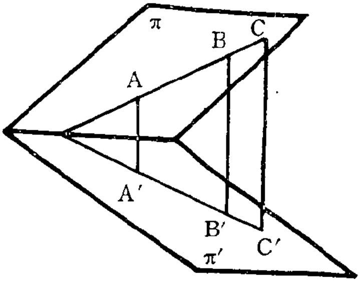

图 1.5

3. 简比 设A，B，C为同一直线上的三点，则有向线段$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{BC}$的代数长之比$\frac{AC}{BC}$称为三点A，B，C的**简比**（或**单比**），记作(ABC)，即

$$(ABC)=\frac{AC}{BC} \tag{1.6}$$

4. 仿射对应与仿射变换 由有限次的平行投影所组成的点与点之间的一一对应称为**仿射对应**。仿射对应将共线三点变成共线三点，且保持其简比不变。仿射对应的代数表示为

$$\begin{cases} x'=a_1x+b_1y+c_1, \\ y'=a_2x+b_2y+c_2, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1.7}$$