

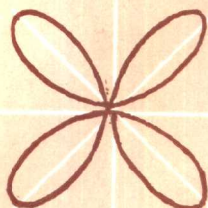
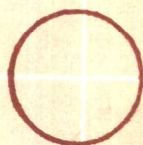
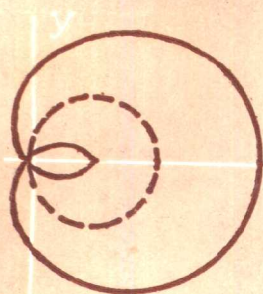
中学数学自学辅导教材

(修订版)

# 代数

第二册(一) 课本

中国科学院心理研究所 卢仲衡 主编



地质出版社

中学数学自学辅导教材（修订版）

# 代 数

第二册 （一） 课本

中国科学院心理研究所 卢仲衡 主编

北京海淀区教师进修学校 张士充 审阅

地 质 出 版 社

## 内 容 简 介

本套教材按照中学数学教学大纲的要求编写，经教育部批准公开出版发行。全套书共包括代数四册、几何两册以及配套使用的练习本和测验本，程度与内容基本和人教社初中数学教材一致，但富有学习心理学特点，便于自学，并能激发学习者的兴趣和自信心。1965年开始实验，经多次修订，现已在全国二十二个省市的部分中学推广试验，在培养学生自学能力、形成自学习惯和自学能力迁移方面的效果显著。本套教材可作为正式中学的实验课本，也可以在没有教师指导的情况下用于自学，是同年级学生课外阅读和社会青年、青工、干部等自学的良好读物，并对中学数学教师和教研人员亦有一定的参考价值。

### 中学数学自学辅导教材（修订版）

#### 代 数

##### 第二册（一） 课本

中国科学院心理研究所 卢仲衡 主编

北京海淀区教师进修学校 张士充 审阅

责任编辑：赵薇 张翊

地质出版社出版

（北京西四）

张家口地区印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·全国新华书店经售

开本：787×1092<sup>1</sup>/<sub>32</sub> 印张：10 字数：216,000

1984年8月北京新一版·1984年8月第一次印刷

共三本 印数：1—196,400册 定价：元

统一书号：7038·新128（之一）

# 前 言

一、数学自学辅导实验教材，是1965年由中国科学院心理研究所卢仲衡根据人民教育出版社课本内容，贯彻九条有效的学习心理学原则，并结合我国优秀教师的教学经验，首次编写出的一种自学教材。开始，这套教材每册有三个本子，一是课本，一是留有空白让学生做题的练习本，一是答案本，当时曾称“三本”教学（现在已把答案附在课本后面，又增加了一个小测验本，即没有答案的练习题本）。1966年初在北京市女六中和西四中学与正常教学班级进行对比实验，效果略优于对比班，学生的学习时间对比班缩短四分之一以上。后由于“文化大革命”，实验被迫停止。1973年至1974年重新在北京一七二中和三中进行实验。在这连续一年半的实验中，不仅获得与1966年实验的同样效果，而且学习者自学能力的成长速度对比班快多了。但是在“四人帮”的干扰破坏下，无法深入研究下去。1978年以来，在上级领导和各方面的支持下，我们又恢复并逐步扩大了实验班。1980年在全国七省市23个班进行实验，1981年扩大到十八个省市，1982年扩大到二十二个省市，1983年扩大到全国二十五个省市。绝大多数实验班的学生，在学业成绩、自学能力成长和自学能力迁移上都取得了良好的效果，一些实验班的学生初步显示出各学科全面发展的优越性（见《教育研究》1984年第二期“数学自学辅导教学实验扩大研究结果”一文）。

二、使用这套教材做实验时，教师启发、指导、提问和

11/105

小结等,平均每课时约占10分钟左右,这些活动都是在开始上课时或在下课前进行的,中间约有35分钟让学生集中精力粗、细、精地阅读课本内容,接着做练习和对答案,中间不打断学生的思路,以便快者快学,慢者慢学。学生学完老师规定的进度之后,可以自学参考书或人教社编的课本。在学生自学时,老师可以巡回视察学生的学习情况并辅导差生。学生做练习时,应在做完一大题所包含的全部小题以后再对答案,而不要做一小题就对答案,以免造成思维步子过小,影响思维能力的成长;但也不要全部做完一个练习才对答案,这样会出现连锁性的错误(具有较好的数学才能的学生可以做完一个练习再对答案)。本套教材的使用方法详见《教育研究》1982年第11期“怎样进行自学辅导教学实验”一文;实验教师需要参考的教学原则详见《教育研究》1984年第1期“自学辅导教学实验的教学原则”。

三、为了便于老师和学习者检查对自学教材的掌握程度,每学完一个小单元(几个练习)之后,就有一个小测验,测验题单独装订成册,由教师掌握。小测验是没有答案的,做完后交老师批改。个人自学的,可以互改或找高年级的学生帮助批改。每个小测验几乎都包含概念题、基本题、变式题和思考题(教师可以根据具体情况来增删),这样可以全面了解自学者掌握知识和思维能力发展的情况。教师对小测验题要认真详细地批改,如果多数学生没有掌握某种类型的题或出现较多错误的话,老师可以进行复习性的讲述,务必使绝大多数学习者认真弄懂为止。个别学习者出现的错误,则可在课上或课下进行个别辅导,不必进行全班讲述,以免影响大多数学生的宝贵时间。

四、练习本中间编有选作题,这是为那些精力有余、时

间充分、喜欢探索的同学们准备的。感到学习吃力和时间紧张的同学可以不做或少做。这些题目比较繁难，带有“\*”号的题更难，学习者最好量力而为，不然不仅无益反而有碍于正常的学习。

五、这套中学数学自学辅导教材，过去一直是参照人教社编的数学课本改写而成，这次又参照人教社1983年版重新修改。第二册代数课本由卢仲衡、宋同华、赵文华编写，练习本由卢仲衡、宋同华编写，测验本由卢仲衡、叶咏嫦编写。本教材曾请严以诚、孙嘉谟等同志提过意见，赵爱秋给予过帮助，特此致谢。由于水平所限，错误之处定然不少，请批评指正。

中国科学院心理研究所

数学自学辅导教学实验组

1984年4月

# 目 录

|                                  |    |
|----------------------------------|----|
| <b>第五章 二元一次方程组</b> .....         | 1  |
| 5.1 问题的提出.....                   | 1  |
| 5.2 二元一次方程和它的解.....              | 3  |
| 5.3 二元一次方程组和它的解.....             | 7  |
| 5.4 二元一次方程组的解法.....              | 19 |
| (一) 代入消元法.....                   | 11 |
| (二) 加减消元法.....                   | 15 |
| 5.5 三元一次方程组.....                 | 24 |
| 5.6 列方程组解应用题.....                | 30 |
| 小 结.....                         | 37 |
| <b>第六章 整式乘除法</b> .....           | 39 |
| 一、整式的乘法.....                     | 39 |
| 6.1 同底数幂的乘法.....                 | 42 |
| 6.2 幂的乘方.....                    | 45 |
| 6.3 积的乘方.....                    | 47 |
| 6.4 单项式乘法.....                   | 50 |
| 6.5 单项式与多项式相乘.....               | 54 |
| 6.6 多项式乘以多项式.....                | 57 |
| 二、乘法公式.....                      | 64 |
| 6.7 平方差公式.....                   | 65 |
| 6.8 两数和与两数差的平方公式 (统称完全平方公式)..... | 69 |
| (一) 两数和的完全平方公式.....              | 69 |
| (二) 两数差的完全平方公式.....              | 70 |

|                                          |     |
|------------------------------------------|-----|
| 6.9 两数立方和与立方差公式                          | 72  |
| 三、整式的除法                                  | 77  |
| 6.10 同底数幂的除法                             | 77  |
| 6.11 单项式除以单项式                            | 80  |
| 6.12 多项式除以单项式                            | 82  |
| 6.13 多项式除以多项式                            | 83  |
| 小 结                                      | 86  |
| 第七章 因式分解                                 | 88  |
| 7.1 因式分解的意义                              | 88  |
| 7.2 提取公因式法                               | 89  |
| (一) 提取公因式是因式分解的一种方法                      | 89  |
| (二) 怎样确定公因式                              | 91  |
| (三) 提取公因式的步骤                             | 92  |
| (四) 当公因式为多项式时提取公因式的方法                    | 93  |
| (五) 改变原多项式某项因式的形式后, 提取公因式                | 95  |
| (六) 复习提取公因式一节的内容                         | 98  |
| 7.3 应用公式法                                | 100 |
| (一) 平方差公式                                | 101 |
| (二) 立方和与立方差公式                            | 103 |
| (三) 完全平方公式                               | 105 |
| (四) 公式中的字母代表多项式                          | 107 |
| (五) 五个因式分解的公式及因式分解的一般步骤                  | 109 |
| 7.4 可化为 $x^2 + (a+b)x + ab$ 型的二次三项式的因式分解 | 112 |
| 7.5 分组分解法                                | 120 |
| (一) 四项式的分组分解法                            | 120 |
| (二) 拆项或添项分组分解法                           | 127 |
| (三) 复习分组分解法                              | 132 |

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| 7.6 总复习                   | 134 |
| (一) 因式分解的意义               | 134 |
| (二) 提取公因式法                | 134 |
| (三) 应用公式法                 | 135 |
| (四) 常数项分解法                | 136 |
| (五) 分组分解法                 | 137 |
| (六) 按步骤想题                 | 138 |
| (七) 利用因式分解化简和解方程          | 140 |
| (八) 应用题举例                 | 142 |
| 7.7 因式分解的选学项目             | 144 |
| (一) 十字相乘法                 | 144 |
| (二) 利用十字相乘法分解可以化成二次三项式的式子 | 146 |
| (三) 五项式的分组分解法             | 148 |
| (四) 六项式的分组分解法             | 149 |
| 小 结                       | 151 |
| <b>第八章 分式</b>             | 154 |
| 8.1 分式                    | 154 |
| 8.2 分式的基本性质               | 157 |
| 8.3 约分                    | 163 |
| 8.4 分式的乘法                 | 170 |
| 8.5 分式的除法                 | 172 |
| 8.6 分式的乘方                 | 173 |
| 8.7 最低公倍式                 | 173 |
| 8.8 通分                    | 181 |
| 8.9 分式的加减法                | 187 |
| (一) 分母相同的分式的加减法           | 187 |
| (二) 分母不相同的分式的加减法          | 189 |
| 8.10 繁分式                  | 195 |

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| 8.11 含有字母已知数的一元一次方程 ..... | 198 |
| 8.12 可化为一次方程的分式方程 .....   | 201 |
| 8.13 分式方程的应用题举例 .....     | 208 |
| 小 结 .....                 | 211 |

## 练习题答案

|                   |     |
|-------------------|-----|
| 第五章 二元一次方程组 ..... | 214 |
| 第六章 整式乘除法 .....   | 234 |
| 第七章 因式分解 .....    | 260 |
| 第八章 分式 .....      | 284 |

## 第五章 二元一次方程组

### 5.1 问题的提出

在第三章里，学习一元一次方程解应用问题时，做过下面类型的题目。

**问题1** 一年级的一、二两班共有学生98人，又知二班比一班多4人，问每班各有多少个学生？

这个问题中有两个未知数：一班学生人数和二班学生人数。同时也有两个条件：①两班学生人数之和等于98；②二班学生人数与一班学生人数之差等于4。当时我们解这类问题（已知两数和，求两数差）时，是根据条件之一（如①）得等量关系：

二班学生数加一班学生数 = 学生总数。

再利用另一条件（如②），把一个未知数用另一个未知数表示出来：

二班学生数 = 一班学生数加4。

这样，只须用一个字母 $x$ 表示未知数，即一班学生人数，则第二个未知数——二班学生人数，就可用含 $x$ 的代数式 $x+4$ 表示出来了。于是可把根据条件①得出的等量关系写成含有一个未知数的等式：

$$x + 4 + x = 98,$$

即列出一个一元一次方程再求解，求得一班学生数为47人，二班学生数为51人。

现在要问，为什么不用两个字母分别表示两个未知数

呢？如用 $x$ 表示一班人数， $y$ 表示二班人数，并把两个条件所表明的两个等量关系：

$$\text{一班学生数} + \text{二班学生数} = 98,$$

$$\text{二班学生数} - \text{一班学生数} = 4,$$

分别写成含未知数的等式，则有：

$$x + y = 98, \quad (a)$$

$$y - x = 4, \quad (b)$$

可以看出，设一个未知数列一个一元一次方程来求解，不如设两个未知数，列这样两个方程来得直接，容易考虑。

下面我们再看问题2。

**问题2** 买3公尺毛呢和4公尺的确良用91元。买2公尺同样的毛呢和5公尺同样的的确良用77元。问毛呢每公尺多少元？的确良每公尺多少元？

对于这个问题，可以用 $x$ 表示1公尺毛呢的价值，用 $y$ 表示1公尺的确良的价值，把题中两个条件所给出的两个等量关系写成两个含未知数的等式：

$$3x + 4y = 91, \quad (c)$$

$$2x + 5y = 77. \quad (d)$$

这的确比列出一个一元一次方程简捷明了得多（有兴趣的同学可用过去的办法列出一个一元一次方程并求解，答案是毛呢每公尺21元，的确良每公尺7元）。

以上的想法很好。但是，这样得到的含有未知数的等式（a）与（b）、（c）与（d）中的任一个，叫做什么方程呢？

（a）和（b）为一组，（c）和（d）为另一组，每组的两个方程之间又有什么关系呢？能够从（a）和（b）一组求出问题1的解答，从（c）和（d）一组求出问题2的解答吗？

这些问题提出来了，下面将一个一个地去解决。现在我

们先做一些练习，为以下的学习和解决上面那些有意思的问题作必要的准备。

(翻开练习本做练习一)

## 5.2 二元一次方程和它的解

前面(a)和(b)、(c)和(d)是四个含有未知数的方程。单独看每一个等式，都含有两个未知数，而且含有未知数的项的次数都是1。过去说过，方程中的“元”指的是未知数，“次”指的是含未知数的项的次数。因此，把含有两个未知数并且含有未知数的项的次数都是1的等式叫做二元一次方程。所以，(a)、(b)、(c)、(d)中的每一个方程，都是一个二元一次方程。

学习一元一次方程时，我们把适合一元一次方程的未知数的值，叫做一元一次方程的解，并且知道，任一个一元一次方程都有且只有一个解。那么一个二元一次方程是否有解呢？什么叫作它的解呢？下面，我们以问题1中的方程(a)为例来讨论这个问题。

方程(a)为：

$$x + y = 98.$$

它的实际意义是等量关系：

一班学生人数加二班学生人数 = 学生总数。

一般意义是：两数之和等于98。那么满足这个条件的两数是只有一对呢，还是有许多对？显然不止一对。可以随便列举，如：1和97，2和96，等等。既然不止一对，怎样把所有能满足条件的“数对”一对对地都求出来呢？

应用方程同解原理，我们曾把一元一次方程都变成

$ax = b$  ( $a \neq 0$ ) 的形式, 并从而解出  $x = \frac{b}{a}$ , 即用已知数把未知数  $x$  表示出来. 用样, 应用方程同解原理, 也可以把方程 (a), 即  $x + y = 98$  变成

$$y = 98 - x.$$

在这个方程里, 如果  $x$  取一个值, 就可以求出与它对应的  $y$  的一个值. 例如:

$$\begin{cases} x = -1, \\ y = 99; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 97; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2.5, \\ y = 95.5; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 100, \dots\dots \\ y = -2. \end{cases} \quad (I)$$

显然, 把上面每一组  $x$  与  $y$  的值代入方程 (a), 都能使等式成立, 也就是都适合 (或满足) 方程 (a). 对于方程 (b)、(c) 或 (d), 也都有类似的情况.

我们称能够适合一个二元一次方程的一对未知数的值, 叫做这个二元一次方程的一个解.

上面我们已求出了方程 (a) 的一些解, 显然, 由于  $x$  可以取任何数, 并且  $y$  都能得到相应的数, 因此, 这样的数对是有无限多个的. 所以一般来讲, 一个二元一次方程是有无限多个解的. 所有的这些解构成一个以数对为元素的集合, 称为二元一次方程的解集合.

**注意:** 二元一次方程的每个解, 都必须如前面 (I) 式中那样记法, 因为两个数配成一对 (或一组) 才是方程的一个解, 并且所谓 “对”、“组” 中的两个数, 是有顺序的. 如对方程  $x + y = 98$  来说

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 98; \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x = 98, \\ y = 0. \end{cases}$$

是两个不同的解. 用上面的记法, 就既能表明一个解是一对 (一组) 数而不是一个数, 又能表明这对数中第一个是  $x$  的

值，第二个是 $y$ 的值，是有顺序的。

(翻开练习本做练习二)

一般一个二元一次方程都有无数个解。但是在列出二元一次方程解应用问题时，实际问题的解却不一定是无数个了。这是因为除了给出的等量关系的条件外，常常还有没有明显地提出的条件，解题时必须注意到这种条件，培养自己观察和审题的能力。请看下面的问题。

**例1** 长4米与长7米的钢筋共有5根，问两种长度的钢筋各自可能有几根？

分析：两种钢筋的根数之和等于5，可根据这个等量关系列方程。但还有两个没明显提出的条件，即每种钢筋的根数都必须是正整数，且它们都必须小于5，因此在解方程时，未知数的值就不能是没有限制的。

**解：**设4米长的钢筋有 $x$ 根，7米长的钢筋有 $y$ 根。根据题意得方程：

$$x + y = 5.$$

**注意到** $x$ 必须取小于5的正整数，即 $x$ 只可取1、2、3和4，把它们分别代入方程，可求得 $y$ 的对应值分别是4、3、2和1。

∴ 方程的解是

$$\begin{cases} x=1, \\ y=4; \end{cases} \begin{cases} x=2, \\ y=3; \end{cases} \begin{cases} x=3, \\ y=2; \end{cases} \begin{cases} x=4, \\ y=1. \end{cases}$$

**答：**长4米的钢筋和长7米的钢筋的根数分别可能是：

(1) 1根和4根； (2) 2根和3根；

(3) 3根和2根； (4) 4根和1根。

单就方程 $x + y = 5$ 说，有无数个解；而这个问题把根数限制在小于5的正整数范围内，因此，只能有上面4个解。

**例2** 一个正两位数加上27，它的个位数字和十位数字就交换了位置，求这个两位数。

**解：**设个位数字是 $x$ ，十位数字是 $y$ 。

根据题意： $10y + x + 27 = 10x + y$ 。

整理得： $y = x - 3$ 。

$y$ 不能小于等于0，因此 $x$ 必须是大于3的数字，列表如下：

|     |   |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

**答：**这个两位数是：14, 25, 36, 47, 58和69。

**例3** 在下列方程中，用含 $x$ 的代数式表示 $y$ ：

(1)  $3x + y = 6$ ;

**解：** $3x + y = 6$

$\therefore y = 6 - 3x$ ;

(2)  $5x - 2y = 6$ 。

**解：** $5x - 2y = 6$

$5x - 6 = 2y$

$\therefore y = \frac{5x - 6}{2}$ 。

**注意：**要求用含 $x$ 的代数式表示 $y$ ，则 $y$ 的系数必须是1。

如例3的(2)必须写成 $y = \frac{5x - 6}{2}$ ，不能写成 $2y = 5x - 6$ 。

把新学的二元一次方程和过去学过的一元一次方程相比较，其共同点是：

(1)都是含有未知数的整式方程，都能根据方程的同解原理进行变形；(2)含有未知数的项的次数都是一次，即未

知数与未知数之间，只有加、减的运算。

其不同点是：(1)一元一次方程含有一个未知数，二元一次方程含有两个未知数；(2)一元二次方程的解也可以叫做根，二元一次方程的解不能叫做根；(3)通常一元一次方程有一个解，二元一次方程有无数个解。

(翻开练习本做练习三)

### 5.3 二元一次方程组和它的解

从5.1节的问题1和问题2这两道应用题可以看出，设一个未知数列一个一元一次方程，不如利用题中的两个条件设两个未知数，直接写出两个等量关系，即列出两个二元一次方程容易考虑。问题是这两个二元一次方程之间是否具有一定的关系呢？又如何利用它们去求出题中所要求的量呢？

回想5.1节开头的问题1，用了两个各自含两个未知数的等式

$$x + y = 98, \quad (a)$$

$$y - x = 4, \quad (b)$$

完全地表达出了问题的两个条件，两个条件是：①两班学生人数之和等于98；②二班人数与一班人数之差等于4。问题1要求这两个各含两个未知数的等式（现在把它们叫做两个二元一次方程）同时成立，也就是既要求两班人数之和等于98，又要求两班人数之差等于4。此外，两方程中的字母 $x$ 都代表一班学生人数，字母 $y$ 都代表二班学生人数，也就是说，两方程中同一个字母代表问题中的同一个未知数（未知量的数值）。所以，方程(a)和(b)不是随便的，毫无关系的两个二元一次方程，而是一组方程。我们称它们为一组，是因为它们具有上述表现在两个“同”字上的关系：一