普通数学

第四卷

度量空间·可微映射·隐函数·积分

[法]C. Pisot, M. Zamansky 著
邓应生 译 陈昌平 校

高等教育出版社

普 通 数 学

第 四 卷

度量空间·可微映射·隐函数·积分

[法] C. Pisot, M. Zamansky 著
邓应生 译 陈昌平 校

高 等 教 育 出 版 社

这套书系根据法国 Dunod 出版社 1972 年出版的《Mathématiques générales》第二版译出，是法国大学第一阶段、工程师学校预科第一、二学年与工程师学校第一、二学年的数学教材，是按法国官方教学大纲编写的. 全套书共分六卷，本书是第四卷

本书内容为度量空间、可微映射、隐函数和积分论.

本书可供高等学校数学专业师生参考.

普通数学

第四卷

度量空间·可微映射·隐函数·积分

[法] C. Pisot, M. Zamansky 著

邓应生 译　　陈昌平 校

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 7.5 字数 180 000

1989年 6月第1版 1989年 6月第1次印刷

印数 00 001—1 750

ISBN 7-04-000085-7/O·35

定价 2.40 元

目　录

第一章　度量空间，赋范空间，巴拿赫空间

在第二卷中已定义和使用了距离概念．这里收集了有关度量空间的一些最重要的初等概念．

除了关于紧致空间的定理(波雷尔-勒贝格)外，读者可以发现在第一部分里没有多少实质性的定理．

第二部分用来讲连续函数．在这里主要的是求从一个范数空间到又一个范数空间的线性映射为连续的必要与充分条件（它的证明是极其简单的，同时借助它可以正确地理解连续可微映射的概念)，并初步阐明线路与可求长的弧．

建议读者重温第二卷数学分析部分，第三章(§§ 2,3,4)，第四章(§§ 1,2)，那里可以找到一些主要思想与一部分性质．对于与刚才引证的那些章节有关的问题，我们只在需要时复习一下；当它们成立是很明显或参考第二卷就容易证明时，这里不再给出．

例子不是全部仿效以前诸卷中相应的例子．

最后应该知道，如果要理解本章，必须很好地了解实数．

建议： 虽然几何表示的过分简略要提防，但仍要建议读者利用图形，来说明本章的内容．

第一部分　度量空间

§1　一般概念

1．距离

所谓在集 E 上定义了距离，是指给定了从 $E\times E$ 到实数 ≥ 0 的

集合的映射 d，使得对E内的任意 x,y,z，有

$d(x,y)=0$ 等价于 $x=y$，

$d(x,y)=d(y,x)$，

$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$ （三角形不等式）.

具有这个距离的集E（或偶对(E,d)）叫做度量空间.

从d的定义又引出第二个三角形不等式：对 (E,d) 的任意 x,y,z，有

$$|d(x,z)-d(z,y)|\leqslant d(x,y).$$

所谓离差或半距离，是指从 $E\times E$ 到实数$\geqslant 0$的集的映射 d'，它满足对距离提出的条件，并附一个限制，即 $d'(x,y)=0$并不一定导致 $x=y$. 例如，在$[a,b]$ 上阶台函数的集Φ上，$\int_a^b|\varphi(t)-\gamma(t)|\,dt$只能定义作离差，因为

$$\int_a^b|\varphi(t)-\gamma(t)|\,dt=0$$

要除了在有限多个点上外，才导致 $\varphi=\gamma$.

然而 $d'(x,y)=0$ 在E上显然定义一等价关系$\mathscr{R}$，且同时可见，如果 ξ,η 是用 x，y 定义的两个等价类 $(x\in E, y\in E, \xi\in E/\mathscr{R}, \eta\in E/\mathscr{R})$，则令 $d(\xi,\eta)=d'(x,y)$，就定义了 $E/\mathscr{R}$ 上的一个距离.

2. 子度量空间

如果(E,d)是度量空间，则 d 在 E 之非空子集A上的限制 δ是在A上的距离，并把(A,δ)叫做(E,d)的子度量空间. 这时反过来说，A被嵌入E，距离 δ 被延拓为E上之距离 d.

例

1. 具有距离 $|z-z'|$ 的C以R为子空间，后者又以Q为子空间.

2. 如果$\mathscr{E}$ 是$[a,b]$上具有实数值的阶梯函数的空间，则距离

$$d(f,g)=\sup_x|f(x)-g(x)|$$

将它作成一度量空间，而连续函数空间$\mathscr{C}$以及阶台函数的空间ϕ就都在此距离下成为$\mathscr{E}$的子空间.

然而具有下式所定义的距离

$$d_1(f,g)=\int_a^b|f(t)-g(t)|dt$$

的$\mathscr{C}$不是$(\mathscr{E},d)$的子空间.

3. 度量空间之积

设(E,d)，(F,d')是两个度量空间. 如果x,x'是E的点，y,y'是F的点，则$X=(x,y)$，$X'=(x',y')$是$E\times F$的点.

从$E\times F$到实数$\geqslant 0$的集的由下面各式定义的一些映射

$$(X,X')\longrightarrow\sup(d(x,y),d'(x',y')),$$
$$(X,X')\longrightarrow d(x,y)+d'(x',y'),$$
$$(X,X')\longrightarrow((d(x,y))^2+(d'(x',y'))^2)^{1/2}$$

是$E\times F$上的一些距离，将它们分别用$\sup(d,d')$，$d+d'$，$(d^2+d'^2)^{1/2}$来表示.

它们是等价的(见§3后面). 所谓度量空间(E,d)，(F,d')的积空间，是具有上述三个距离之一的集$E\times F$. 然而实际上只用前两个.

4. 球，球面；圆盘，圆周

在(E,d)内一个以$a\in E$为中心，r为半径的开球(或闭球)，是$x\in E$的集合，它使$d(a,x)<r$(或$\leqslant r$)；一个中心在a，半径为r的球面是$x\in E$的集，它使$d(a,x)=r$.

在R^2中，则说是圆盘，而不说球；说圆周，而不说球面. 用$B(a,r)$或$\mathring{B}(a,r)$表示开球；用$B'(a,r)$或$\overline{B(a,r)}$表示闭球.

注——一个闭球，即使$r=0$，也不是空的，因为中心总属于它. 半径为零的开球是空的. 我们在数学分析的论证中已经很好地认

识了这个现象，那里说："设 ε 严格>0，…"；因为一个中心在 a、半径 $r>0$ 的闭球包含一个中心在 a、半径 $r'>0$（例如 $r'=r/2$）的开球，所以在数学分析的论证中，例如写：如果 $\varepsilon>0$，则

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

或

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant\varepsilon.$$

5. 有界集

(E,d)的一个子集 A，如果它能被完全框入一个半径为有限数的球内时，是有界的集.

可以做到：整个 E 是有界的；例如将 R 的一个区间（在 R 内有界）看作是 R 的子空间时就是那样；如果将 E 的距离 d 换为距离 $\delta=d/(1+d)$ 时也将是这样.

§2 开集，闭集，邻域

1. 开集

设 E 是一度量空间（对一给定的距离 d）. 所谓 E 之（或 E 中）开集是指 E 之这样的子集 $\mathcal{O}$，它使每个 $x\in\mathcal{O}$ 是一半径严格为正且整个含于 $\mathcal{O}$ 内的一开球之中心. 还认为，空子集是一开集.

还可以采用一个等价的定义：$\mathcal{O}$ 是一开集，是指 $\mathcal{O}$ 的每个 x 含于一非空的开球内，而此开球又含于 $\mathcal{O}$ 内. 只须证明：如果开球 $B(a,r)\subset\mathcal{O}$，又如果 $x\in B(a, r)$，则可找到 $B(x, \rho)$，$\rho>0$，使 $B(x,\rho)\subset B(a,r)$ 即可. 显然取 $\rho=\dfrac{1}{2}(r-d(a,x))$ 便可.

定理 1——在一度量空间里，一切开集的并是开集. 有限个开集的交是开集.

因为，为了便于考虑可以取空集作为开集，这个定理的证明是显然的.

非有限个的开集之交一般不是开集.

例

1. 根据开集本身的定义,整个空间E是开集.

2. 在度量空间里,开球是开集,因为或者它是空集,或者,如果 $x\in B(a,r)$,则 $B(a,r)$ 包含 x, 而 $B(a,r)$又包含于E. 这就说明球之为开球这一名称的理由.

3. 数直线是开集,且

$$R=\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty}]n,n+2[;$$

欧几里德平面 R^2 是开集, 它是中心在O,半径为任意 r 的一切开圆盘的并:

$$R^2=\bigcup_{r\in R}B(O,r).$$

在 R 上一开区间$]a, b[$(当它不是空集时, 它是中心在$(a+b)/2$,半径为$(b-a)/2$ 的开球)是$]a+1/n, b-1/n[$的并, 这里 n 取大于 $2/(b-a)$的一切整数值.

4. 在 R 中,退化为一点的集不是开集. 开区间$]-1/n, 1/n[$的交不是开集.

2. 闭集

设E是度量空间(对给定的距离 d). 所谓E的 (或在E内的) 闭集是这样的任一子集$\mathscr{F}$,它对E的补集是开集,此外, 约定空集是闭集.

关于一个给定集的子集的计算规则表明:

定理 2——在一度量空间里,一切闭集的交是闭集,有限个闭集的并是闭集.

例

1. 由于把空集$\varnothing$看作是开集, 空间 $E=\complement\varnothing$是闭集.

2. 闭球是闭集. 实际上,如果 $B'(a,r)$是一闭球, 设 x_0 是其

补集的一点；则 $d(a,x_0)>r$，且中心在 x_0，半径为

$$\rho=(d(x_0,a)-r)/2$$

的开球整个儿位于 $B'(a,r)$ 的补集之内；因为，如果 y 是开球 $B(x_0,\rho)$ 的一点，则根据第二个三角形不等式，有

$$d(y,a)\geqslant|d(a,x_0)-d(x_0,y)|,$$

且因 $d(a,x_0)=2\rho+r$，$d(x_0,y)<\rho$，所以 $d(y,a)\geqslant\rho+r>r$；于是 $y\notin B'(a,r)$，且 $B(x_0,\rho)$ 整个位于 $B'(x,r)$ 的补集内.

3. 退化为一点的集是闭集.

4. R^2 是闭球 $B'(0,r)$ 的并，这里 r 是任意正实数.

5. R 是闭区间 $[n,n+1]$ 的并，这里 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

6. 在 R 上，a 与 b 是有限的，n 为整数 $\geqslant1$，

$$[a,b]=\bigcap_{n=1}^{+\infty}[a-1/n,b+1/n],$$

然而

$$\bigcup_{n\geqslant n_0}^{+\infty}[a+1/n,b-1/n]=]a,b[,\ (n_0>2/(b-a))$$

3. 邻域

在度量空间 E 里，所谓点 x 的邻域，是 E 的所有这样的非空子集，它包含一个包含 x 的开集.

例——在 R 中，$]-1,+1[$，$[-1,+1]$，$]-1,+1]$，$[-1,+1[$ 都是 0 的邻域. $[-3,-2[$，$]-1,+1]$ 与一切整数点 $n\geqslant2$ 的并也是 0 的邻域.

点 x 的开邻域是 x 的一个邻域，而这个邻域又是开的. 包含 x 的一切开集是 x 的邻域；于是一个开集是其每个点的邻域，且其逆亦真：如果一个集 A 是其每个点 x 的邻域，则它包含一中心在 x 的非空开球，而且显然，A 是所有这些开球的并从而 A 是开集.

一个点 x 的闭邻域是 x 的一个邻域，而此邻域是闭集.（这个

概念是难使用的，下文一般地宁愿不采用闭邻域）．如果一个闭集包含 x 且是 x 的邻域，则它包含一包含 x 的开集．

例

1．在欧几里德平面里，由 $0<x<1, 0<y<1$ 定义的“方形”是其每一点的邻域；闭方形 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$ 也是上述方形每一点的邻域．

2．在 R 上闭区间 $[a,b]$，$a\neq b$，是 $]a,b[$ 的每一点的闭邻域，然而不是它自己每一点的邻域．

4．内点，接触点．聚点，孤立点

设 A 是度量空间 E 的非空子集．所谓 x 是 A 的*内点*，是指 A 是 x 的邻域，即指存在一包含 x 且含于 A 内的一个开球．A 的内点的集叫做 A 的内部，并记作 $\mathring{A}$．约定空子集以空子集为内部．

A 的内部可能是空的．例如，如果 A 退缩为一点，则 $\mathring{A}=\varnothing$；如果 A 是 R^2 之直线段（例如具有欧几里得距离），则 $\mathring{A}=\varnothing$．

显然，$\mathring{A}\subset A$，$\mathring{A}$ 是开集，它是 A 内所有开集的并（可能为空集），一个开集等同它的内部．

一个点是 A 的*接触点*，是指 x 的每个邻域与 A 相交，因而即指 x 的每个邻域至少与 A 有一共同点．A 的接触点的集叫做 A 的*闭包*，并记作 $\bar{A}$．约定 $\varnothing$ 的闭包是 $\varnothing$．

A 的所有的点都是 A 的接触点：$\bar{A}\supset A$．退化为一点的集的闭包即为此点．非空集 A 可能有空的内部；而它的闭包却是非空的．

度量空间一点 x 是（E 的）集 A 的*外点*，是指它是 A 之补集 $E-A$ 的*内点*．

要当心，根据这个定义，不属于 A 的点不一定是 A 的外点（例如，在 R 上，$A=[0,1[$，$1/2$ 是 A 的内点，$3/2$ 是 A 的外点，而 0 与 1 既非 A 的内点，也非外点．）

A的外部是$\widehat{E-A}^{\circ}$，故$\bar{A}=E-(\widehat{E-A}^{\circ})$；于是$\bar{A}$是开集的补集，所以是闭集. 可是闭集$F$的外部是开集$E-F$的内部，它是开集，于是

$$\bar{F}=E-(\widehat{E-F}^{\circ})=E-(E-F)=F.$$

所以，闭集等同于它的闭包.

A的界点是这样的点x，它的每个邻域同时与A和$E-A$相交(即同时包含A与E-A的点). A的界点的集叫做A的边界；常将它记作 fr$A$，并且显然有$\overline{\mathrm{fr}A}=\bar{A}\cap\overline{E-A}$；于是 fr$A$ 是一闭集.

所谓A的一个聚点是指，x的每个邻域包含x以外的A的另一点. 所谓A的孤立点x是指，存在x的一个邻域，它不包含x以外的A的其他点.

还可以说，A的孤立点是A的一点又不是A的聚点. 要指出，所谓点x是A的孤立点，首先是指x属于A；而聚点则不一定属于A.

5. 在子空间内的开集，闭集与邻域.

设E是度量空间，以d为距离，A是E的子集. 如果$x,x'\in A$，则

$$d'(x,x')=d(x,x')$$

定义A的一个距离，于是A成为度量子空间. 设$x\in A$，$B(x,r)$是E内的一个开球；于是$A\cap B(x,r)$是A内的一个开球. 反过来，如果对于$x\in A$考虑使$d'(x',x)<r$的点$x'\in A$，则A内的这个开球是E内开球$B(x,r)$与A的交(或在A上的迹).

因而显然，在子空间A内，每个开集是E的一个开集的迹，每个闭集是E的一个闭集的迹，A的每个点的邻域是E内此点邻域的迹.

6. 稠密集，处处稠密集

所谓集 A 在集 B 内稠密，是指 $\bar{A}=B$. 当 A 在空间 E 内稠密时，就说 A 处处稠密.

如果 E 包含一可数稠密集，就说 E 是可分的度量空间.

下面是些例子:

1. Q 是在 R 内(处处)稠密的集，R 是可分空间.

2. R^2 内具有有理坐标的点的集是 R^2 内的稠密集.

3. 数 $1/2,1/4,3/4,\cdots$，即 $k/2^n$，这里 k 与 n 是正整数，n 是任意的，$0\leqslant k\leqslant 2^n$，这种数的集在 $[0,1]$ 内是稠密的.

4. 在紧致的 $[a,b]$ 上、且有一致连续范数的阶梯函数的空间 $\mathscr{E}$ 中，阶台函数的集 Φ 是稠密的. 如果 $\mathscr{E}$ 具有 L^1 的范数(见第四章: 积分法)，Φ 在 $\mathscr{E}$ 内稠密; 而在 $[a, b]$ 上连续的函数的集也在 $\mathscr{E}$ 内稠密，但要当心，在此情况下，要把除了在至多可数个点集以外有等值的两个函数看作相等.

关于子空间的一个重要注——前面的每个概念对于度量空间的子空间都是有效的. 然而，当在度量空间 (E, d) 内考虑一个子集 A 时，必须善于区别 A 是作为 (E,d) 的子空间，还是只把 A 看作是 E 的子集.

这样，集 A 可能不是 E 中的闭集，然而，子空间 (A,d) 看作为一个空间，它是闭的. 如果 x 是在 E 之子集 A 内的孤立点，则 x 不是子空间 A 内的孤立点.

§3 序列，极限，等价距离

回顾一下，序列是从 N 到集 E 内的映射，常说它是 E 中的序列；记作 $(x(n))$，或 $(x_n)_{n\in N}$. x_n 是 E 的点；它们是序列的值，有时用 $x(N)$ 来表示；说 $a\in x(N)$，是指至少存在一个 n，使 $x_n=a$；然而可能有：对无穷多个 n，$x_n=a$(例如常序列，在 R 内只取两个值的序列). 我们也用点列这个说法，但是我们保留这种说法，只把它

用于那样的序列：凡 $i\neq j$，就有 $x_i\neq x_j$

1. 收敛序列

度量空间(E, d)内的序列(x_n)收敛，是指存在一个 $a\in E$，使 $d(x_n,a)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$；$a$ 叫做极限.

这相当于说，对半径 $\varepsilon>0$ 的任意开球 $B(a,\varepsilon)$，除有限个指标 n 外，$x_n\in B(a,\varepsilon)$. 代替中心为 a 的非空开球也可考虑 a 的邻域.

要避免说下面的话：如果 a 的每个邻域包含除有限个以外的一切的点 x_n，则x_n 趋于 a（或收敛到 a）.（例如，在 R 上，由 $x_{2p}=0$，$x_{2p+1}=1$ 给定的序列不收敛，而每一个球$(0,\varepsilon)$，这里 $0<\varepsilon<1$，包括除有限个以外的一切点 x_n）.

如果(x_n)收敛，则它的极限是唯一的；因为设有两个 $a\neq a'$，对一切十分大的$n\geqslant n_0(\varepsilon)$，有 $d(x_n,a)<\varepsilon/3$，$d(x_n,a')<\varepsilon/3$，且 $\varepsilon=d(a,a')/3$，则由第二个三角形不等式有

$$d(x_n,a')\geqslant d(a,a')-d(a,x_n)\geqslant 2\varepsilon$$

这是不可能的.

从收敛序列 (x_n) 中抽出的所有序列 (x_{n_k}) 收敛且有相同的极限.

如果(x_n)收敛到 a，则 a 是此序列值的集 $x(N)$ 的接触点. 这是显然的.

设 A 是(E,d)的非空子集，且 $a\in\bar{A}$. 如果 $a\in A$，则由对任意 n 令 $x_n=a$ 定义的列序收敛到 $a\in A$. 如果 $a\notin A$，但为 A 的接触点，则以 a 为中心、半径>0 的每个开球与 A 相交，即包含 A 的点. 设 $\varepsilon_1>0$. 在 $B(a,\varepsilon_1)$内存在 $x_1\in A$ 与 $x_1\neq a$. 设 $\varepsilon_2=d(a,x_1)/2$，在 $B(a,\varepsilon_2)$存在 $x_2\in A$ 与 $x_2\neq a$(且$\neq x_1$). 这样下去，则构造了一个序列(x_n)，它由 E 的两两相异的点形成并收敛到 a，这样，非空子集 A 的每个接触点是于 A 内取值的序列的极限；如果 $a\notin A$，则 a 是 A 的聚点，且存在 A 的点列(x_n)，它的项是两两相异的，且收敛到 a.

2. 柯西序列

设(E,d)是度量空间．所谓序列(x_n)为柯西序列，是指

$$\lim_{p,q\to\infty} d(x_p,x_q)=0.$$

每个收敛序列是柯西序列；其逆一般是不成立的．然而，如果(x_{n_k})是从柯西序列中抽出的且为收敛，则柯西序列收敛．

3. 等价的距离

所谓定义在同一集合E上的两距离d和d'是等价的，是指对每个$x\in E$，(E,d)内以x为中心的任何开球包含着一个且包含于一个(E,d')之以x为中心的开球．

一个充分条件是：存在两个严格正的有限实数α,β，使对E内任意x,y，有

$$\alpha d(x,y)\leqslant d'(x,y)\leqslant \beta d(x,y),$$

或者，$E\times E$上的数值函数d，d'适合$\alpha d\leqslant d'\leqslant \beta d$（于是也有$(1/\beta)d'\leqslant d\leqslant (1/\alpha)d'$）．

结果，对于(E,d)，(E,d')，开集的概念，闭集的概念是一样的；收敛序列的概念，柯西序列的概念也是一样的．特别，极限的概念是一样的：如果(x_n)在(E,d)内收敛到x，则(x_n)也在(E,d')内收敛到x，反之也一样．

例——在第二卷已见到这样的例子．

如果考虑两个度量空间(E,d)，(F,d')，则在$E\times F$上，距离$\sup(d,d')$，$d+d'$，$(d^2+d'^2)^{1/2}$是等价的．这是从两个正数a,b间的不等式得出的结果：

$$(1/2)(a+b)\leqslant \sup(a,b)\leqslant a+b\leqslant (2^{1/2})(a^2+b^2)^{1/2}$$
$$\leqslant (2^{1/2})(a+b)\leqslant 2^{3/2}\sup(a,b).$$

要指出，如果(E,d)是一度量空间，$\delta=d/(1+d)$是等价于d的距离，然而一般地不存在$\alpha>0$，使

$$\alpha d\leqslant d/(1+d)=\delta.$$

§4 完备空间，紧致空间

1. 完备空间，度量空间的完备化

一个度量空间是完备的，是指在E中的每个柯西序列是收敛的.

换句话说：$x_n \in E$，$\lim\limits_{p,q\to\infty} d(x_p, x_q)=0$ 导致：存在 $a\in E$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, a)=0$.

当空间还是赋范空间的时候（见关于巴拿赫空间的一节，第二、三卷中的例子），可以了解到许多特殊例子.

设(E,d)是度量空间. 可以证明，能构造一个度量空间$(\hat{E},\delta)$，使得$(\hat{E},\delta)$是完备的，E可以等同于$\hat{E}$的一个子集；(E,d)是$(\hat{E},\delta)$的一个子空间，E在$(\hat{E},\delta)$内稠密. 空间$\hat{E}$叫做E的完备化空间. 它的证明超过本书的范围，然而多看一些例子（见后面，巴拿赫空间），就能很好地理解. 第一个例子是Q之例，它的完备化空间是R（它是从Q的柯西序列出发构造R的例子，它提供了一个典范，可以从E出发构造$\hat{E}$）. 还要指出在$[a,b]$上构造的阶梯函数的空间$\mathscr{E}$，它是$[a,b]$上阶台函数空间Φ在一致收敛的距离

$$d(\varphi,\gamma)=\sup_{x\in[a,b]}|\varphi(x)-\gamma(x)|$$

下的完备化空间.

关于上面的例子，有一个重要的注. $[a,b]$上的连续函数空间$\mathscr{C}$是$\mathscr{E}$的子空间（具有由一致收敛定义的距离）；此外，$\mathscr{C}$还是完备的. 这样$\mathscr{E}$是Φ的完备化空间，然而不是$\mathscr{C}$的完备化空间（对所考虑的距离），而$\mathscr{C}$却是完备空间$\mathscr{E}$的完备子空间. 还要指出，R是C的完备子空间，而C不是R的完备化空间.

2. 闭集和完备子空间

定理 1——在完备的度量空间内，存在闭集与完备子空间之