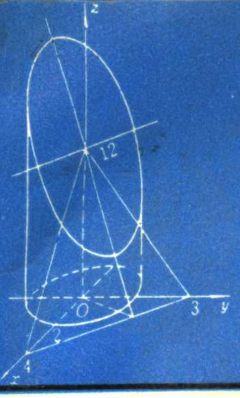
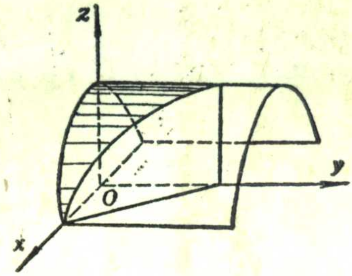
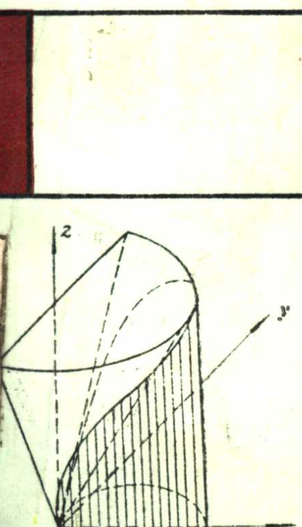




高等数学
例题与习题

同济大学高等数学教研室　编



同济大学出版社

高等数学

例题与习题

同　济　大　学
高等数学教研室编

同济大学出版社

内　容　提　要

本书是根据国家教委审订的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》，按照同济大学数学教研室主编的《高等数学》教材的章节顺序编写而成的，可以与该教材配合使用。全书共12章，每章分若干节，每节包括内容提要与解题范例，并配置习题A；然后按章配置习题B及习题C。习题A是与各节内容相配合的基本题，习题B是有一定难度的基本题及综合题，而习题C则是高难度的习题。书末附有答案与提示、积分表、常用数学公式、常见平面图形和立体图形.

本书编集习题3000余道，能适合各种层次的读者，是工院科校、成人高校与函授院校师生进行"高等数学"教学的理想参考书，也可作为工程技术人员的自学用书及工科硕士研究生入学考试复习用书.

责任编辑　李炳钊
封面设计　李志云

高等数学例题与习题
同济大学高等数学教研室编
同济大学出版社出版
（上海四平路1239号）
新华书店上海发行所发行
上海崇江外文印刷厂排版　启东第三印刷厂印刷
开本　850×1168　1/32　印张　20　字数596千字
1990年8月第1版　1990年8月第1次印刷
印数　1－6500　定价7.95元
ISBN　7 5608 0580 9/O 65

前　　言

同济大学数学教研室在1959年编写出版的《高等数学习题集》，自公开发行以来，赢得了众多的读者，为我国高等工业学校的数学课程教学作出了贡献．经过长期的、特别是近十年来的教学实践，我们教研室的教师在使用该书的同时，又积累了一大批优秀的习题，从而产生了修订该书的愿望．然而考虑到该书的历史作用，我们觉得新编一本例题与习题集也许更为妥当．经过三年的努力，在同济大学应用数学系全体教师的关心与帮助下，在同济大学出版社的大力支持下，现在这本新编的《高等数学例题与习题》终于与读者见面了．

本书是根据国家教委审订的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》，按照同济大学数学教研室主编的《高等数学》教材的章节顺序编写的，可以与该教材配合使用．全书共十二章，每章分若干节．每节包括内容提要与解题范例，并配置习题A；然后按章配置习题B及习题C．习题A是与各节内容相配合的基本题，习题B是有一定难度的基本题及综合题，而习题C中的习题是高难度的，是为对高等数学课程有较高要求的读者编写的．各章中包含少量超《基本要求》的内容，这类内容及所涉及的习题都加“*”标明（如果某节内容全属超《基本要求》，则在该节的标题上加“*”号，而该节所属的习题A中的习题就不再加“*”号）．我们希望这样的编排使本书能适合各种层次读者的需要．

参加本书编写的人员有：骆承钦、齐绍朴、王章炎、周葆一、郭景德、李生文、徐鑑青、杨德荣、邵婉鸣等．全书由骆承钦总纂定稿．由于编者水平所限，书中难免有不妥乃至错误之处，殷切期望同行们和广大读者给予批评指正．

编　　者

1989年10月于同济大学

目　录

第七章　空间解析几何与向量代数

第八章　多元函数微分法及其应用

第十二章　微分方程

第一章　函数与极限

一、函　　数

1. **函数的定义**　设有两个变量 x 和 y，D 是给定的一个数集．如果当变量 x 在 D 中任意取定一个数值时，变量 y 按照某一确定的法则总有确定的数值与它对应，则称 y 是定义在 D 上的 x 的函数，记作 $y=f(x)$（或 $y=F(x)$ 等）．称D为这个函数的定义域，x 为自变量，y 也叫作因变量．

2. **函数的图形**　平面 xOy 上的点集 $\{(x,y)\,|\,y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$（$x\in D$）的图形．

3. **复合函数**　如果函数 $y=f(u)$的定义域为 D_1，函数$u=\varphi(x)$的定义域为 D_2，值域为 W_2，并且 $W_2\subset D_1$，则对于每个数值 $x\in D_2$，有确定的数值 $u\in W_2$ 与之对应．由于 $W_2\subset D_1$，这个值 u 也属于函数 $y=f(u)$的定义域 D_1，因此有确定的值 y 与值 u 对应．这样，对于每个数值 $x\in D_2$，通过 u 有确定的数值 y 与之对应，从而得到一个以 x 为自变量，y 为因变量的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$及$u=\varphi(x)$复合而成的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，$(x\in D_2)$，而称 u 为中间变量．

4. **反函数**　设单值函数 $y=f(x)$在 D 上单调，W 为其函数值域，则对于 W 中的任一值 y_0，总有唯一的数值 $x_0\in D$，使 $y_0=f(x_0)$，这就确定变量 x 为变量 y 的函数 $x=\varphi(y)$（$y\in W$），称为 $y=f(x)$的反函数，并显然有

$$f[\varphi(y)]\equiv y(y\in W)\text{ 及 }\varphi[f(x)]\equiv x(x\in D).$$

反函数 $x=\varphi(y)$ 也常记作 $y=\varphi(x)$.

5 隐函数 对于二元方程 $F(x, y)=0$，如果任取 $x\in I_x$，相应地总有唯一的 $y\in I_y$，满足这一方程，则称由方程 $F(x,y)=0$ 在区间 I_x 上确定了一个隐函数.

例 1 求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}+\arccos\dfrac{3x-1}{2}$ 的定义域.

解 第一项 $\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$ 当 $1-2x>0$ 时取实数值，而第二项 $\arccos\dfrac{3x-1}{2}$ 当 $-1\leqslant\dfrac{3x-1}{2}\leqslant 1$ 时才有意义. 因此，自变量 x 应同时满足 $x<\dfrac{1}{2}$ 及 $-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$. 从而函数的定义域为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$ 与 $\left[-\dfrac{1}{3},1\right]$ 的公共部分 $\left[-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$.

例 2 求函数 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2-1})$ 的反函数.

解 由 $$y=\log_a(x+\sqrt{x^2-1})$$

得 $$x+\sqrt{x^2-1}=a^y,$$

移项得 $$x-a^y=-\sqrt{x^2-1},$$

两边平方有 $$(x-a^y)^2=x^2-1,$$

得 $$x=\frac{1+a^{2y}}{2a^y},$$

即 $$x=\frac{a^{-y}+a^y}{2},$$

或改用习惯记法，得所求反函数为

$$y=\frac{a^{-x}+a^x}{2}.$$

例 3 判断函数 $y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$ 的奇偶性.

解 因为 $f(x)=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$,

$$f(-x)=\lg\frac{1+(-x)}{1-(-x)}=\lg\frac{1-x}{1+x}=-\lg\frac{1+x}{1-x},$$

故有
$$f(-x)=-f(x),$$

所以，$y=\lg\frac{1+x}{1-x}$是奇函数.

例 4 设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\quad(x>0)$，试求 $f(x)$.

解一 因为 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}}$

$$=\frac{1}{\frac{1}{x}}+\frac{1}{\frac{1}{x}}\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}\ (\text{注意 } x>0),$$

所以，
$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{x^2+1}=\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

解二 因为
$$f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\tag{1}$$

现令 $t=\frac{1}{x}$，$x>0$. 于是 $x=\frac{1}{t}$，$t>0$，代入(1)得

$$f(t)=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}=\frac{1}{t}+\frac{1}{t}\sqrt{1+t^2}=\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t},$$

所以
$$f(x)=\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

例 5 描绘 $y=\arcsin(\sin x)$的图形.

解 当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$时，$y=x$;

当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$时，$y=\pi-x$;

由于 $y=\arcsin(\sin x)$是以 2π 为周期的周期函数，故只要沿 x 轴正负方向每隔 2π 平行移动在$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$上的图形就能得到其整个图形(图 1.1).

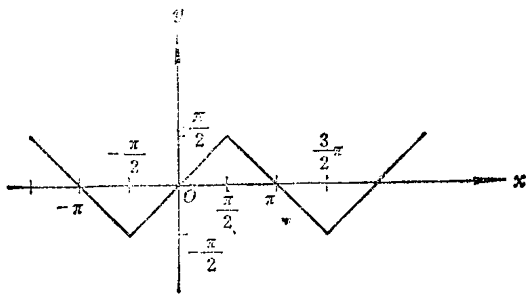


图 1.1

习 题 A

1.1 解下列不等式:

(1) $0<(x-3)^2<4$;　　　(2) $\left|\frac{x}{1+x}\right|>\frac{x}{1+x}$.

1.2 求下列方程的实根:

(1) $|2x+3|=x^2$;　　　(2) $|\sin x|=\sin x+2$.

1.3 设 $\varphi(x)=x^2+1$, 求 $\varphi(x^2)$ 及 $[\varphi(x)]^2$.

1.4 设 $f(x)=x^2-3x+5$,

求 $f(x+\Delta x)$ 及 $f(x+\Delta x)-f(x)$.

1.5 设 $\varphi(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$,

证明 $\varphi(y)+\varphi(z)=\varphi\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)$.

1.6 设

$$\varphi(t)=\begin{cases}2^t, & -1<t<0,\\ 2, & 0\leqslant t<1,\\ t-1, & 1\leqslant t\leqslant 3.\end{cases}$$

试求 $\varphi(0)$、$\varphi(2)$、$\varphi(3)$、$\varphi(0.5)$、$\varphi(-0.5)$及$\varphi(t+a)$.

在题 1.7~1.14 中,确定各函数的定义域:

1.7 $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{(1-x)(3-x)}}$.

1.8 $y=\lg\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$.

1.9 $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$.

1.10 $y=\log_2(\log_2 x)$.

1.11 $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$.

1.12 $y=\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$.

1.13 $y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$.

1.14 $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}, & x<0,\\ \dfrac{x}{2x-1}, & 0\leqslant x<1,\\ 2^x, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

1.15 已知从高度为 h 处落下重物所经过的路程 s 与所费时间 t 的关系由公式 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 确定.

试问：(1) 此函数的定义域是什么？

(2) 解析式 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 的定义域又是什么？

1.16 下列 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否表示同一个函数？为什么？并说明它们在哪一区间内是表示同一个函数.

(1) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$，　　$g(x)=\dfrac{1}{1+x}$；

(2) $f(x)=\sqrt{x^2}$，　　$g(x)=(\sqrt{x})^2$；

(3) $f(x)=\sqrt{(1-x^2)^2}$，　　$g(x)=1-x^2$；

(4) $f(x)=\sec^2 x-\operatorname{tg}^2 x$，　　$g(x)=1$；

(5) $f(x)=\sin(\arcsin x)$，　　$g(x)=x$；

(6) $f(x)=\cos(\arccos x)$ ， $g(x)=x$.

1.17 证明函数 $y=\frac{x}{x^2+1}$ 在它的整个定义域内是有界的.

1.18 指明下列函数中,哪些是奇函数?哪些是偶函数?哪些是非奇非偶函数?

(1) $y=x-x^2$; (2) $y=2^x$;

(3) $y=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$; (4) $y=\sin x-\cos x$;

(5) $y=e^{-x^2}$; (6) $y=\frac{a^x+1}{a^x-1}$.

1.19 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是奇函数，试证复合函数 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$ 也是奇函数.

1.20 确定下列函数中哪些是周期函数?对周期函数指出其最小正周期 T:

(1) $y=\sin(x^2)$; (2) $y=\sin^2 x$;

(3) $y=\cos\pi x$; (4) $y=\cos\frac{1}{x}$;

(5) $y=\sin\frac{x}{4}+2\cos\frac{x}{3}$; (6) $y=a\sin\omega x+b\cos\omega x$;

(7) $y=\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}x)$.

1.21 下列函数在$(0,+\infty)$内是否为单调函数?为什么?

(1) $y=3x-6$; (2) $y=\lg x+x$;

(3) $y=2^{x-1}$.

1.22 证明: (1) $y=10^{\lg y}$, $(y>0)$;

(2) $x^3=10^{3\lg x}$, $(x>0)$.

1.23 求下列函数的反函数:

(1) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$; (2) $y=1+2\sin\frac{x-1}{x+1}(x\geqslant0)$;

(3) $y=2\sin 3x\left(\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$; (4) $y=1+\lg(x+2)$;

(5) $y=\frac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}+1$; (6) $y=3^{2x+5}$.

1.24 求下列各组函数复合所得的复合函数，并指明其定义域：

(1) $y=u^3$, $u=\sin x$;

(2) $y=\operatorname{arc\,tg} u$, $u=\sqrt{v}$, $v=\log_a x$.

1.25 设 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\geqslant 0,\\ x^2+4, & x<0.\end{cases}$

求 $f(x-1)$.

1.26 下列函数由哪几个基本初等函数复合而得？

(1) $y=3^{\sin x}$;　　(2) $y=\operatorname{tg}\lg\frac{x}{3}$;

(3) $y=(3x+2)^5$;　　(4) $y=[\arccos(3^{-x^2})]^2$

1.27 试画出函数 $y=x^2+cx+1$，当 $c=-2$，$c=0$，$c=2$ 时的三个图形.

1.28 试画出下列函数的图形：

(1) $y=-|x-2|$;　　(2) $y=|x^2-1|$;

(3) $y=x-x^2$;　　(4) $y=\frac{2}{x}$;

(5) $y=\frac{x^2+1}{x}$;　　(6) $y=x^k$, 当 $k=\frac{1}{3}$、$k=\frac{2}{3}$时;

(7) $y=\lg ax$, 当 $a=1, a=-2$ 时;

(8) $y=1-\cos x$.

1.29 利用图形的叠加作下列函数的图形：

(1) $y=x+\sin x$;　　(2) $y=\sin x+\cos x$.

1.30 建立下列函数的反函数,并画出两种函数的图形：

(1) $y=2^x+1$;　　(2) $y=\log_4 x+1$;

(3) $y=\sin(x-1)$;　　(4) $y=x^2-2x$;

(5) $y=\arcsin\frac{1-x}{4}$.

1.31 作函数 $y=\begin{cases}1-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ \frac{1}{|x|}, & |x|>1\end{cases}$ 的图形.