日本中学生数学丛书

5

不等式与区域

日本中学生数学丛书（5）

不等式与区域

［日］冈部 进 著

李淑萍 译 马忠林 校

吉林人民出版社

日本中学生数学丛书（5）

不等式与区域

〔日〕冈部 进 著

李淑萍 译 马忠林 审校

*

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行

长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 4印张 67,000字

1981年5月第1版 1981年5月第1次印刷

印数：1—13,820册

书号：13091·86 定价：0.53元

内 容 提 要

《不等式与区域》一书，是日本山梨大学教授横地 清主编的中学生数学丛书第5卷，冈部 进先生著。全书共有三章：第一章介绍了各种平面区域和空间区域，及用不等式表示它们的方法。第二章介绍了区间及不等式的解法。第三章介绍了凸区域上最大值，最小值的求法，及线性规划中的单纯形法等。

著者紧密地联系现实生活，纳入了大量生动有趣的事例，各章后附有简要的历史知识介绍。此书内容对培养学生的分析、解决问题的能力，扩大学生的知识面，是十分有益的。

出 版 说 明

为了解国外教学情况，我们组织翻译出版由日本山梨大学教授横地　清主编的一套中学生数学丛书共十二卷，它是日本中学生的数学课外读物。这套丛书是以近代数学的观点和方法，系统地阐述初等数学中的一些重要专题，对我国广大中学生和中学数学教师在理论上和思考分析问题的方法上均有参考价值。

共有十二名同志参加丛书翻译工作，由吉林师大数学系马忠林同志审校，从一九八〇年起陆续出版发行。

吉林人民出版社　一九八〇年元月

日本中学生数学丛书（全12卷） 横地 清 编

1. 集合与逻辑	横地 清 编	马忠林 译
2. 数的世界	森川几太郎 编	关桐书 译
3. 文字的世界	山岸雄策 编	刘正一 译
4. 方 程 式	村野英克 编	任永泰 译
5. 不等式与区域	冈部 进 编	李素苹 译
6. 代数与构造	高桥秀雄 编	高绪珏 译
7. 函数与变化	菊池乙夫 编	李开成 译
8. 函数与分析	冈森博和 编	阎邦正 译
9. 几何与证明	中東正立 编	布 公 译
10. 运动与变换	大山正信 编	刘凤璞 译
11. 空间与坐标	平冈 忠 编	王家彦 译
12. 概率与统计	町田彰一郎 编	苏明礼 译

吉林师大数学系马忠林审校 吉林人民出版社出版

一九八〇年元月

目　　录

第一章　什么是不等式

第二章　能够解不等式

第三章　不等式的应用

第一章　什么是不等式

§1. 分割平面

(1)领土的内部与外部

正雄的父亲做生意要去瑞士的苏黎世。正雄立刻打开世界地图看看瑞士。瑞士被法国、意大利、奥地利、德意志联邦共和国（西德）包围着，有苏黎世、伯尔尼、洛桑、日内瓦等有名的城市，还有震撼山民心胸的马特合恩峰。从瑞士坐国际列车能到法国的斯特拉斯堡、里昂，意大利的米兰，德意志联邦共和国的慕尼黑等地。正雄劝父亲一定要到这些城市去，就在地图上做了记号。图 1 就是正雄画的。

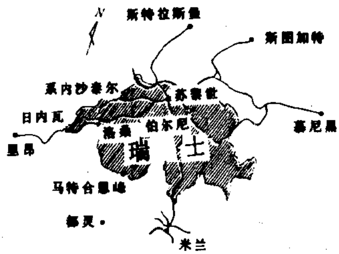


图1　正雄画的地图

正雄用线条表示从苏黎世伸向邻国的铁路，用点表示城市。在正雄的地图上，瑞士领土的内部与外部用边界线清楚地区分开了。

用边界线恰好把平面分成两部分。虽然正雄只画上主要的城市，但是可以认为地图上瑞士和邻国的所有地方都是无间隙地做为点而被包含着的。正雄把地图看成是点的集合。而且，地图上所表示的地方的全体做为全集合，包括边界线在内的瑞士领土做为它的子集合。于是，说苏黎世是瑞士的城市，就等于说表示苏黎世的点在子集合中；说慕尼黑不是瑞士的城市，就等于说表示慕尼黑的点不在此子集合中。这个事实我们用记号来表示一下看看。为此把正雄的地图如图2那样重新画一下。

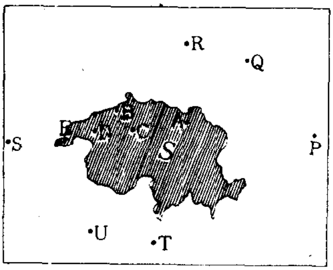


图2　换成记号的地图

包括边界线在内的瑞士的领土画成斜线部分，用记号 **S** 表示。各个城市分别用A，B，C，……表示。于是，苏黎世（A）是瑞士（**S**）的城市这个事实，用记号写成

$$A \in \mathbf{S}，或 \mathbf{S} \ni A， \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ①$$

读做“A 属于 **S**”。慕尼黑（S）不是瑞士的城市这个事实，用记号写成

$$S \notin \mathbf{S}，或 \mathbf{S} \not\ni S， \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ②$$

读做“S 不属于$\mathbf{S}$”。$\in$（$\ni$）与$\notin$（$\not\ni$）是表示属于与不属于关系的记号。于是，由图 2，如下的事实成立：

$$A，B，C，D，E \subset \mathbf{S}，$$

$$P，Q，R，S，T，U \notin \mathbf{S}，$$

因此，某个城市是在瑞士领土内部还是外部，由$\in$还是$\notin$就能清楚地区分开，平面（全集合）上的任何点也只能有这两种区分。

然而，即使这样，感到还没有充分说明问题。虽然在A与P，A与T之间能用$\in$，$\notin$做出区别，但是即使P与T表示不同的点，还没能对它们加以区别。于是，要使得P与T也能加以区别，怎么办才好呢？

图 3 是北海道带广市的详细的市街地图。大体上是以东西和南北走向的平行街道形成的整齐的排路。受到这样的市街构造的启示，点的位置关系似乎可以用相交成直角的（直交的）两组平行线来表示。可以想象，如同在平面上的方格纸那样，两组平行线一个接着一个，不间断地放着。于是，可以把各个点看做是任意两组平行线的交点。P与T位置的

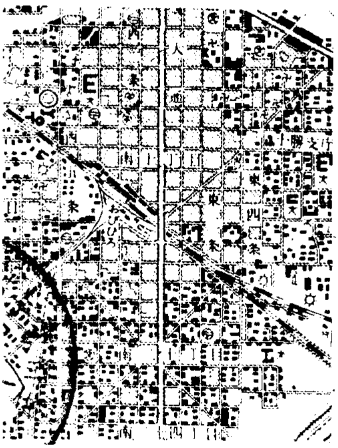


图3　带广市街

不同，表现为两组平行线交点的不同。图3就给了我们这样的启示。把这种想法推广，领土的内部和外部的关系，点的位置关系等等，就能用数和式来表示。用两组平行线的交点来表示平面上的点的想法，早已被希腊数学家阿波罗纽斯（公元前260 年－200 年）发现，由雷内·笛卡儿（1596－1650）进一步加以发展。

（2） 建立坐标

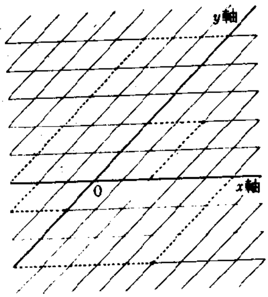


图4 不直交的坐标平面

现在，我们固定一个做为基准的点（称为原点），引两条相交与原点的基准线（称为x轴、y轴），再一个接着一个、不间断地引出两组平行于这些基准线的直线。实际上，因为不可能“不间断地”引直线，只能表示出其中的一部分直线。用它们相交生成的点来表示点的位置。图4就是这样一种情况。两组平行线也可以不一定相交成直角，然而，在我们的生活当中，象图3中带广市街那样的交成直角的情形很多。

这样作成的平面称为坐标平面。在这里，我们考虑相交成直角的情况。在图5中，一个接着一个、不间断地引出了相交成直角的两组平行线。

于是，在任何一条平行线上都有一个接着一个、不间断的交点。x 轴、y 轴上也都不例外。我们试着把这些交点填上数来看看。图6中，电杆沿着街道以同样的间隔并立着。我们知道，这就是以某处做基准，选取定长之后，就可第1根、第2根、……这样竖立起来的。现在我们可以利用这个办法。首先，在x 轴上在原点的右侧，用定长量下去。原点处填写数0，距原点等于定长处填写数1，定长的一半处填写数$\frac{1}{2}$，定长5倍处填写数5，在定长的□倍处填写数□。因为可往□里填写各个数，所以任意点都可以填上数。原点的左侧也与右侧同样地量下去。然而，因为在右侧与左侧不能填写同样的数，往左侧填写负数。于是，在x 轴上，原点填写数0，原点的右侧填写正数，原点的左侧填写负数。反之，因为在x 轴上能求出某个数表示的点，所

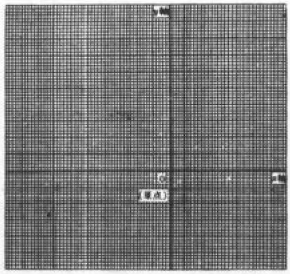


图5　直交的坐标平面

图6　以相等间隔竖立着的电杆

以x轴上的点与数一一对应。同样地，y轴上的点也与数一一对应。

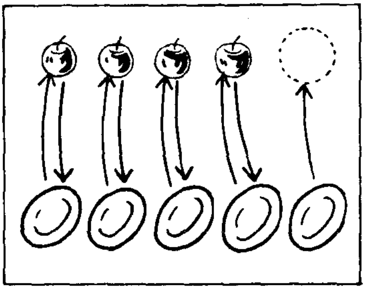


图7　苹果与盘子的对应

【想一想】　在图7中，苹果与碟子是否是一一对应着的?

【解】　不一一对应。

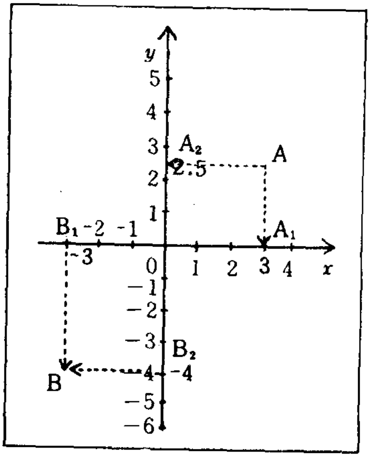


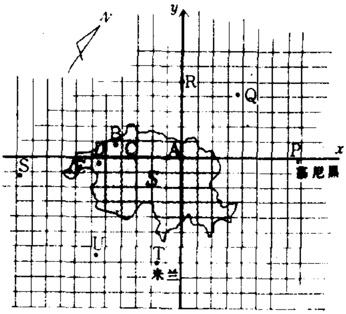
图8

其次，取平面上的点。在图8中，点A由x轴上点A_1表示的数3与y轴上点A_2表示的数2.5这两个数确定，可以写成（3，2.5），把x轴上的点表示的数写在前面。反之，取两个数－3与－4，作成（－3，－4），能确定分别对应这些数的点B_1，B_2，就能求出点B。这样，两个数的数组能与平面上的点一一对应，把数组称为点的坐标。

这样，点A的坐标是（3，2.5），可简单地写成A（3，2.5），3称为**x坐标**，2.5称为**y坐标**。

我们这样来应用坐标的思想。图2的p与T的位置关系，

如图 9 那样，可用不同的坐标 p （7.9，－0.2），T （－1.6，－7.2）表示出来。又一经表示出 $S \ni$ （7.9，－0.2），领土的内部与外部也能同时表 示出来，实在非常方便。



设苏黎世（A）为原点，连结苏黎世与斯特拉斯堡（R）的直线为 y 轴，在原点与 y 轴直交的直线为 x 轴，A 与 R 距离的五分之一为定长。

图9

【想一想】 （1）见图10，试求点A，B，C，D的坐标。

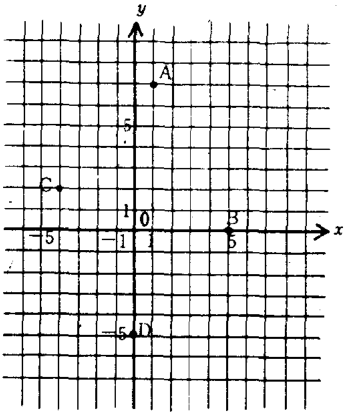


图10

（2）试把下列各点标在图10上：E （3.5，－2），F （－3，0），G （－5，－3），H （0，4）。

【解】 （1）A（1，7），B （5，0），C （－4，2），D （0，－5）。

（2）解答略。

（3） 用式子表示边界线（直线）

回过头来看图 3，看带广市街的地图时，在国铁带广车站的附近，直交的两条道路与铁路相交在一起。以这里做为

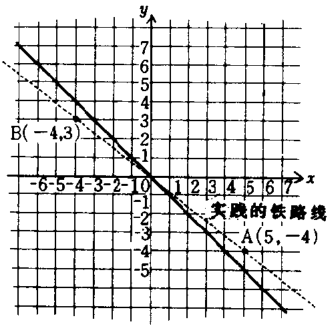


图11　带广市街的地图

原点，两条道路做为x轴、y轴来建立坐标平面，铁路线用直线来表示（修正了实际的铁路线）。把上述这些画成图11，铁路线成为把平面分成两部分的边界线。那么，形成边界线的铁路线（直线）怎么来表示呢？注意到直线上点的坐标，根据图11把明显的点的坐标列举出来成为

$$\left\{\begin{array}{l}\cdots\cdots\ (-3,3),\quad(-2,2),\quad(-1,1),\quad(0,0),\\ \qquad\ (1,-1),\quad(2,-2),\quad(3,-3),\quad(4,-4),\ \cdots\cdots\end{array}\right\}$$

还有无数个没有写出的点，它们也包含在这条直线中，直线是具有这些坐标的点的汇集。我们来研究一下，这些点的x坐标与y坐标之间的关系。因为

$(-3,3)$ 时，有 $-3+3=0$，

$(-2,2)$ 时，有 $-2+2=0$，

$(-1,1)$ 时，有 $-1+1=0$，

于是，当坐标为(a,b)时，有

$$a+b=0。$$

即x坐标与y坐标相加等于0，表示为

$$x+y=0。\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad③$$