现代经济管理应用数学基础

微积分

薛贵珍 主纂

能 源 出 版 社

123
456
789

内 容 提 要

本书是《现代经济管理数学基础》系列教材之一。总共分十章：函数、极限与连续性、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微分法、二重积分、级数、微分方程简介。书中通过较多的例题和每章的习题加深理解概念，掌握解题方法和技巧，最后有习题答案，以备自我检查，本书力求深入浅出，通俗易懂。

本书可供管理干部学院作为大专班、短训班以及各成人高校经济管理专业的教材或参考书。

微 积 分

田书京 薛贵珍 主纂

能源出版社 首都发行所发行

河北省定兴县兴华印刷厂印刷

787×1092毫米 1/32开本15.72印张 320千字

1989年2月第一版 1989年2月第一次印刷

印数：1—6,250册

ISBN7—80018—145—6/G·28 定价：6.30元

北京地区管理干部学院数学学会

教材编委会

前　　言

《现代经济管理应用数学基础》系列教材，由北京地区管理干部学院数学学会聘请有关的管理干部学院数学教研室主任以及具有多年高教经验的副教授、讲师共同编写，目的拟推荐给各管理干部院校作为大专班、短训班以及各成人高教经济管理类等专业的数学教材或参考书。教材共分四册：《微积分》、《实用线性代数》、《线性规划》、《应用概率统计》。

本教材是参照国家原经委制定的管理干部大专班的《教学计划》，并针对干部高教的特点编写的。编写过程中努力突出以下特点：

（1）深浅适度；（2）“少而精”、理论联系实际；（3）“模块式”编排，富有“弹性”；（4）循序渐进，深入浅出，简明易懂；（5）具有一定的先进性。

在编写本教材的过程中，曾得到各有关管理干部院校领导大力支持和指导，在此表示衷心的感谢。

我们特聘长期兼任成人高教的数学教学工作的北京邮电学院朱兆仓副教授为顾问，朱老为本书编写提供了宝贵意见。

由于编写时间仓促，错误和不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

北京地区管理干部学院数学学会

教材编委会

1988年12日

目　　录

第一章　函数

十七世纪，笛卡尔把变量引入了数学，变量的引入对数学产生了巨大的影响，使数学从研究常量进一步发展到研究变量，从而产生了一个崭新的分支——微积分。微积分是研究变量数值变化以及变量之间的关系的数学，微积分常被称为"变量的数学"，而变量之间的依赖关系是用函数来描述的，因而函数概念是微积分中研究的重要对象。

§1·1　函数的概念

（一）常量与变量

我们观察各种自然现象、经济现象或技术过程时，常会遇到各种不同的量。例如：距离、时间、温度、速度、劳动生产率、产量、成本、价格、利润等等。尽管它们各自代表的意义不同，但在所研究的某一现象或过程中，就这些量的变化状态来说，一般可分为两类：在某一过程中只取同一数值的量，叫做常量；可取不同数值的量，叫做变量。

例如：观察某一工厂一年中生产情况，总投资为常量，每月产品的产量则是变量，它随时间的变化而不尽相同。

又如：某商店一年中各月份销售灯泡的个数及所得的收入是变量，而灯泡的单价是常量。

一个量是常量还是变量是对某一过程来说的，并不是绝

对的。同一个量在某种条件下是常量，在另一种条件下就可能是变量。如上例中，灯泡的单价，在观察某商店某一天的销售情况时，是常量，而在观察商店若干年的销售情况时，灯泡的单价就可能是变量。常量是变量的特殊情况。

在高等数学中，习惯上用字母a、b、c等表示常量，用字母x、y、z等表示变量。

因为量是通过数来表示的，所以可用数轴上的一个点来表示。常量，用数轴上的一个定点来表示；变量，用数轴上的动点来表示。

以后，为了表示变量的变化范围，往往采用"区间"的符号，设实数a与b，且$a<b$，满足不等式$a<x<b$的实数x的集合，称为以a、b为端点的开区间，记为（a，b）。如图1-1(a)

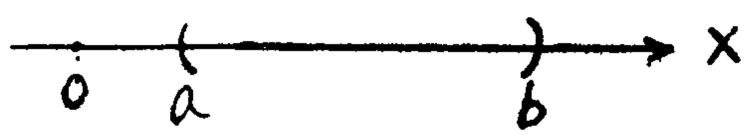

图 1—1（a）

满足不等式$a\leqslant x\leqslant b$的实数x的集合，称为以a、b为端点的闭区间，记为［a，b］，如图1-1(b)

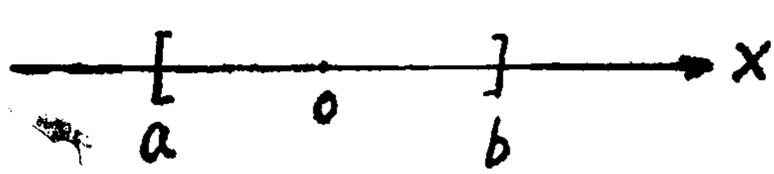

图 1—1（b）

还有半闭半开区间〔a，b)，如图1-1(c)和半开半闭区间(a，b〕如图1-1(d)，它们分别表示满足不等式$a \leqslant x < b$，$a < x \leqslant b$的实数x的集合。

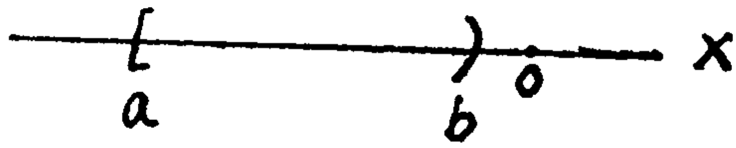

图 1—1（c）

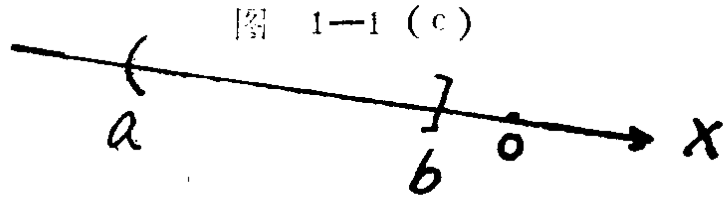

图 1—1（d）

显然，开区间不包含端点，闭区间包含端点。上述区间是有限区间，其右端点b与左端点a之差$b-a$，称为区间的长度。

除有限区间外，还有无穷区间，满足不等式$x > a$，$x \geqslant a$的实数x的集合，分别记为$(a, +\infty)$，$[a, +\infty)$；满足不等式$x < b$，$x \leqslant b$的实数的集合，分别记为$(-\infty, b)$，$(-\infty, b]$；全体实数的集合，记为$(-\infty, +\infty)$。“$-\infty$”，“$+\infty$”分别读为“负无穷大”与“正无穷大”，它们不是数，仅仅是记号。形式上可把$-\infty$，$+\infty$看为无穷区间的端点。

在微积分中常常用到邻域这个概念：在数轴上一个以点a为中心，长度为2δ的开区间$(a-\delta, a+\delta)$（$\delta > 0$）它表示满足不等式$a-\delta < x < a+\delta$，即$|x-a| < \delta$的实数x的集合，这个开区间称为点a的δ领域，点a叫做这邻域的中

心，δ 叫做这邻域的半径，如图1-2(a)所示。

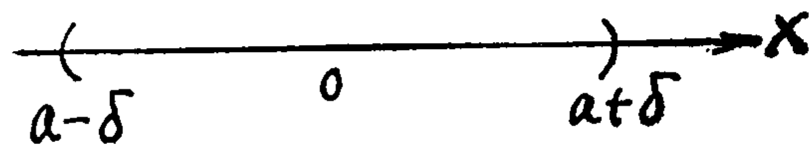

图 1—2 (a)

在点a的δ邻域内去掉点a，其余点所组成的集合，称为点 a 的δ空心领域，它是开区间 $(a-\delta,a)$ 与$(a,a+\delta)$的并集，即 $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ 也即满足不等式$0<|x-a|<\delta$ 的实数x的集合，如图1-2(b)所示。

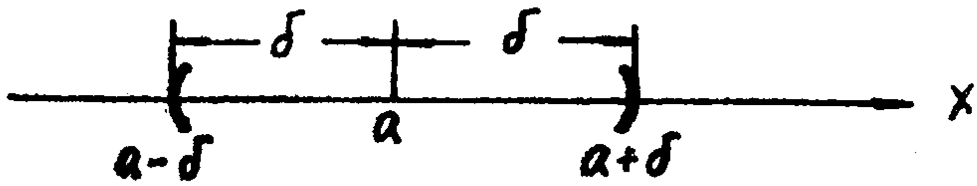

图 1—2 (b)

实数a_1，a_2，……，a_n中的最小者记为$\min\{a_1,a_2,\cdots\cdots a_n\}$，最大者记为$\max\{a_1,a_2,\cdots\cdots a_n\}$。

（二）函数的定义

在同一个自然现象，经济现象或技术过程中，我们所研究的各个量之间，一般都不是彼此孤立存在的，而是相互联系、相互依赖或相互制约的。

例1 圆盘面积S与其半径r之间的关系为$S=\pi r^2$，当 r 变化时，S也随之变化，在 $r>0$的范围内，任给 r 一个具体

数值，就有一个确定的S值与之对应，如当$r=4$米时，$S=16\pi$米^2，当$r=7$米时，$S=49\pi$米^{2}等等。

例2 某商品每件成本为3元，今卖出100件，如果每件价格用x（元）表示，所获利润P（元），它们之间就有关系

$$P=100(x-3)(\text{元})$$

在$x>3$的范围内，任给x一个具体数值，就有一个确定的P值与之对应，如当$x=5$（元）时，$P=200$（元）等等。

例3 粮店售粮员把标准面粉的销售量x千克与收款数y元列成表格如下

表 1-1

x	1	2	3	4	5	…	10
y	0.370	0.740	1.110	1.480	1.850	…	3.700

给定x一个不超过10的正整数值，根据上面表格所给出的对应规律，就有一个y值与之对应。

例4 炮弹M在空中飞行过程中，其轨迹是一条平面曲线，如图1-3所示。

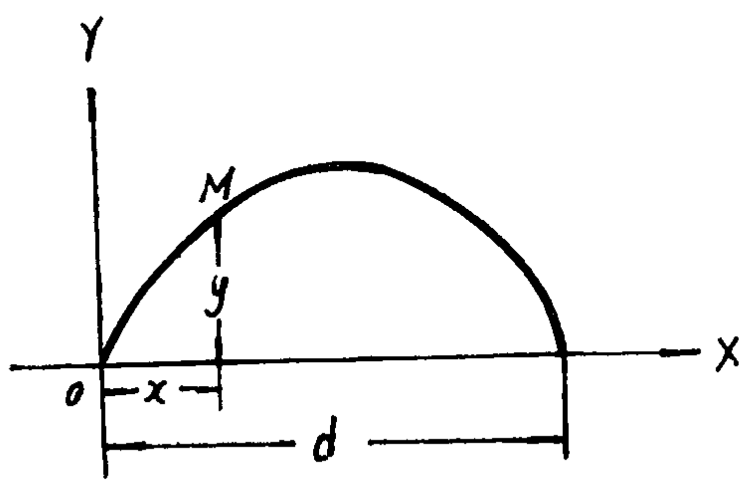

图 1—3

炮弹飞行高度y与水平距离x都在变化，显然，在$0\leqslant x\leqslant d$的范围内，给定一个x值，根据这条平面曲线，就有一个y值与之对应。

象这样的例子是很多的，虽然所包含的具体意义不相同，但它们具有一个共同的特点，就是：这两个变量是相互联系相互依存的，其中一个变量在某一变化范围内取一个确定的值时，另一个变量就按照一定的规律得到一个确定值与之对应。

定义1·1 设有两个变量x和y，若变量x在某范围D内变化，且每取某个确定值时，变量y按照一定的规律，总有唯一确定的值与之对应，则称变量y是变量x的函数，记为$y=f(x)(x\in D)$。

其中，变量x称为自变量，自变量x的取值范围D称为函数的定义域；变量y称为因变量，因变量y的取值范围称为函数的值域；f表示对应规律，也称函数关系。

函数关系与定义域是构成函数的两个基本要素，缺一不可。基于这一点，两个函数相等，必须是对应关系相同，而且定义域也相同，否则，就不是相同的函数。如$y=2\ln x$；$x\in(0、+\infty)$与$y=\ln x^2$，$x\in(-\infty、0)\cup(0、+\infty)$是不相同的函数，因为定义域不一样。

注意1　在同一个问题中，同时讨论了几个不同的函数关系，那就要用不同的函数记号来表示，如$y=f(x)$，$z=g(x)$，……等。

注意2　根据函数的定义，并不排斥这样的情况，对应于自变量的所有取值，函数总取同一数值，即$y=c$，$(x\in D)$，其中c是某个确定实数。

上述定义的函数我们称y是单值函数；当x任取一个值，函数y有两个或两个以上的值与之对应，我们称y是多值函数。本门课程只讨论单值函数，有时遇到多值函数，把它分成几支，每支都是单值函数，然后进行讨论。如$y^2=2x$，$x\in[0, +\infty)$，当$x=2$时，y有2和-2两个确定的值与之对应，这里y就是x的多值函数，我们可以把它分成两支单值函数：$y=\sqrt{2x}$与$y=-\sqrt{2x}$分别进行讨论。

（三）函数的定义域和函数值

1.函数定义域的确定

定义域是允许自变量取值的范围。如何确定函数定义域可分下面两种情况进行讨论：

第一种：对于由实际问题得到的函数，定义域是根据函数的实际意义来确定的。

如在例1中，圆盘面积S与其半径r的函数关系式$S=\pi r^2$，由于半径r不能为负数，也不能为零，它可以是任何正实数，故此函数定义D为$(0, +\infty)$。

又如在例2中，某商品所获利润P（元）与每件价格x（元）的函数关系式$P=100(x-3)$(元)，每件价格只有大于3的任何实数才能获得利润，故此函数定义域D为$(3, +\infty)$。

第二种：对于没有说明其实际背景的函数表达式，其定义域就是要使表达式中，所有的运算都有意义的自变量的取值范围，这样确定的定义域又称为函数的自然定义域（以下简称定义域）。

例5 正整数次幂函数x^n(n为正整数)，奇次根式$\sqrt[2n+1]{x}$(n为正整数)、指数函数a^x($a>0$)、正弦函数$\sin x$、反正

切函数 $\mathrm{arctg}x$、以及多项式$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$，这些函数的定义域是$D$为（$-\infty, +\infty$）。

例6 确定 $y = \dfrac{4}{x^2 - x - 3}$ 的定义域。

解 由于$x^2 - x - 3 = 0$有实数根 $x_1 = -1$，$x_2 = 3$，所以此函数的定义域 D为$x_1 \neq -1$，$x_2 \neq 3$的所有实数，也可写成

$$D为\ (-\infty, -1) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$$

例7 确定$y = \sqrt{x^2 - x - 6}$ 的定义域。

解 解不等式$x^2 - x - 6 \geqslant 0$，得$x \leqslant -2$或$x \geqslant 3$，所以此函数的定义域D为〔$-\infty, -2$〕$\cup$〔$3, +\infty$〕。

例8 确定$y = \log_3[\log_5(x+7)]$的定义域。

解 解不等式$\log_5(x+7) > 0$，即$x + 7 > 1$，得$x > -6$，所以此函数的定义域 D为（$-6, +\infty$）。

例9 确定 $y = \arcsin\dfrac{x-3}{4}$的定义域。

解 解不等式$\left|\dfrac{x-3}{4}\right| \leqslant 1$，即$-1 \leqslant \dfrac{x-3}{4} \leqslant 1$，得$-1 \leqslant x \leqslant 7$，所以此函数的定义域$D$为〔$-1, 7$〕。

例10 确定 $y = \sqrt{4 - x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$的定义域。

解 解不等式组

$$\begin{cases} 4 - x^2 \geqslant 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ x > 1 \end{cases}$$

所以此函数的定义域D为（$1, 2$〕。

例11 确定 $y = \dfrac{\sin x}{(x-2)\lg(x+5)}$ 的定义域。

解 解不等式组

$$\begin{cases} x-2\neq 0 \\ \lg(x+5)\neq 0 \\ x+5>0 \end{cases} \quad 即 \begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq -4 \\ x>-5 \end{cases}$$

所以此函数的定义域D为$(-5,-4)\cup(-4,2)\cup(2,+\infty)$。

2．函数值的求法

对于自变量x在定义域内所取的每一数值，因变量y所对应的值叫函数值。给定函数$y=f(x)$，当自变量x在定义域内取某一数值x_0时，其对应的函数值记为$f(x_0)$或$y|_{x=x_0}$此时我们称函数$y=f(x)$在x_0处有定义。若$f(x_0)$不存在，则称为$f(x)$在x_0处无定义。

例12 已知$y=f(x)=3x^2-2x+1$，求$f(0)$、$f(x_0)$、$f(a+b)$。

解 $f(0)=y|_{x=0}=3\cdot 0^2-2\cdot 0+1=1$；

$f(x_0)=y|_{x=x_0}=3x_0^2-2x_0+1$；

$f(a+b)=y|_{x=a+b}=3(a+b)^2-2(a+b)+1$。

例13 已知$f(x)=x^4-\dfrac{6}{x}+\sin x$，求$f(3)$、$-f(x)$、$f(-x)$、$\dfrac{1}{f(x)}$、$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$、$f^2(x)$、$f(x^2)$、$f(x)+2$、$f(x+2)$、$f(\sin x)$、$f(u)$。

分析：形式上可把这个函数所表达出来的对应关系看成是$f(\quad)=(\quad)^4-\dfrac{6}{(\quad)}+\sin(\quad)$，等号左端括号里填上什么量，在等号右端括号里也填上那个量。

解 此函数的定义域D为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$。

$$f(3)=3^4-\frac{6}{3}+\sin 3=79+\sin 3$$

$$-f(x)=-\left(x^4-\frac{6}{x}+\sin x\right)=-x^4+\frac{6}{x}-\sin x;$$

$$f(-x)=(-x)^4-\frac{6}{-x}+\sin(-x)=x^4+\frac{6}{x}-\sin x$$

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x^4-\frac{6}{x}+\sin x};$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^4-\frac{6}{\left(\frac{1}{x}\right)}+\sin\frac{1}{x}=\frac{1}{x^4}-6x+\sin\frac{1}{x}$$

$$f^2(x)=\left(x^4-\frac{6}{x}+\sin x\right)^2$$

$$f(x^2)=(x^2)^4-\frac{6}{x^2}+\sin(x^2)=x^8-\frac{6}{x^2}+\sin(x^2)$$

$$f(x)+2=x^4-\frac{6}{x}+\sin x+2$$

$$f(x+2)=(x+2)^4-\frac{6}{x+2}+\sin(x+2)$$

$$f(\sin x)=(\sin x)^4-\frac{6}{\sin x}+\sin(\sin x)$$