

初中数学

概念 · 公式 · 定律

应用范例

- ★ 知识结构全面梳理
- ★ 规律方法深入探索
- ★ 重点难点详细讲解
- ★ 解题思路举一反三

龚冬梅 主编

江西高校出版社

前 言

《初中数学概念·公式·定律应用范例》是根据国家教委最新颁发的全日制中学数学教学大纲的要求,紧扣中学现行的这门学科统编教材的内容,针对教学大纲的实际需要以及中考的考试说明进行编写。全书的编写内容涵盖本学科全部知识要点,包括有关的图形、表格及公式、定律的应用范围、注意事项等;对一些容易出现的错误,以及纠正方法、记忆方法等也进行了比较全面的介绍,同时对每个重要的、难以理解的知识点匹配了相应的典型范例加以剖析,给出示范,帮助理解与掌握,提高解题的能力。

本书在编写时,充分注意了学科的系统性、顺序性和逻辑性。基本按照学生学习新课的顺序,将课堂上教师应该板书、学生应该掌握的基本内容汇编成册,突出学科的系统性、实用性,同时弥补了有些学生课堂笔记的不全。可以认为,拥有了这本书,可以将做课堂笔记的时间用在听取、理解老师的讲解上。因此,它既是学生随堂听课的工具书,也是学生复习时系统的参考书。本书集理论知识和理论知识应用于一体,突出知识应用的特点,是一本对教师、学生理解和掌握数学基础知识,解决实际问题,提高课堂效率、学习效率,培养能力都有帮助的应用性复习教学辅导书。

本书每节分两个知识板块,一是“概念公式定律”:归纳、分析、解释知识点,通俗、简练,是教材的精髓;二是“应用范例详解”:借典型例题的剖析对重要知识点进行诠释,帮助读者掌握本知识点的考查特点、解题思路、方法、技巧,力求能举一反三、触类

旁通。本书源于教材,高于教材,切中重点、难点,自成体系,便于自学。

本书在编写过程中,曾参阅了大量的资料、文献,在此向有关作者和出版单位表示衷心的感谢!

由于水平所限,书中错漏之处在所难免,恳请读者批评指正。

编 者

2002年2月5日

编委会主任:余俊辉

编委会副主任:朱斌宏

编委会委员:(以姓氏笔画为序)

万少华	王水根	朱林	刘涛
刘斌	刘华娟	刘利民	刘够媛
许方	李秀云	吴坚	吴元春
何菊生	余迎东	沈华	范茂华
罗俊	易增平	郑岷	翁小仙
徐秀芳	高见	涂斌	黄海
龚晓	龚冬梅	阎俊	程平
程学超			

目 录

初一代数

- | | |
|------|----------------------|
| (1) | 第一章 代数初步知识 |
| (6) | 第二章 有理数 |
| (16) | 第三章 整式的加减 |
| (22) | 第四章 一元一次方程 |
| (30) | 第五章 二元一次方程组 |
| (41) | 第六章 一元一次不等式和一元一次不等式组 |
| (55) | 第七章 整式的乘除 |

初二代数

- | | |
|------|-----------|
| (70) | 第八章 因式分解 |
| (74) | 第九章 分式 |
| (80) | 第十章 数的开方 |
| (83) | 第十一章 二次根式 |

初三代数

- | | |
|-------|-------------|
| (89) | 第十二章 一元二次方程 |
| (101) | 第十三章 函数及其图像 |
| (116) | 第十四章 统计初步 |

•

初一几何

- | | | | |
|-------|--|-----|---------|
| (123) | | 第一章 | 线段、角 |
| (138) | | 第二章 | 相交线、平行线 |

初二几何

- | | | | |
|-------|--|-----|-----|
| (155) | | 第三章 | 三角形 |
| (174) | | 第四章 | 四边形 |
| (184) | | 第五章 | 相似形 |

初三几何

- | | | | |
|-------|--|-----|--------|
| (195) | | 第六章 | 解直角三角形 |
| (202) | | 第七章 | 圆 |

附录

- | | | |
|-------|--|-----------|
| (220) | | 一、常数表 |
| (220) | | 二、平方、立方表 |
| (221) | | 三、常用计量单位表 |
-

初一代数

第一章 代数初步知识

概念公式定律

【代数式】 代数式是指用基本的运算符号(运算包括加、减、乘、除以及以后要学的乘方、开方)把数和表示数的字母连接起来的式子.另外单独的一个数或单独的一个字母也是代数式.

【代数式的书写注意事项】

1. 数和字母相乘时,数应写在字母前面,常省略乘号,若这个数带分数,应化为假分数.
2. 字母与字母相乘时,一般按字母顺序常省略乘号.
3. 数与数相乘时,乘号不宜省略.
4. 在代数式中出现除法运算时,一般按照分数的写法来写.

【列代数式】 列代数式是指把简单的与数量有关的词语用代数式表示出来.

【代数式的值】 用数值代替代数式里的字母,按照代数式指定的运算计算出的结果,叫做代数式的值.

【方程】 像 $2x + 3 = 37$ 这样含有未知数的等式,叫做方程.

【方程的解】 使方程左右两边相等的未知数的值,叫做方程的解.

【解方程】 求方程的解的过程叫解方程.

应用范例详解

【例1】 下列式子哪些是代数式?哪些不是代数式?

- (1)3. (2)0. (3) x . (4) $2 + 3$. (5) $2\pi R$. (6) $2a + b$.

$$(7)v = \frac{s}{t}, \quad (8)2x = y = 1.$$

分析 紧扣代数式概念及补充内容:用运算符号把数与字母连接而成的式子是代数式,单独一个数或单独一个字母也是代数式.

解答 (1)、(2)、(3)、(4)、(5)、(6) 都是代数式,(7)、(8) 不是代数式.

代数式不是公式、等式或不等式.

【例 2】指出下列代数式中,哪些符合代数式的书写要求,不符合的给予改正.

$$(1)3\frac{1}{2}a^2b. \quad (2)\frac{ah}{2}. \quad (3)x \times y \times 5.$$

$$(4)(x+y) \div (x-y).$$

分析 要使代数式正确表达,则必须正确理解代数式的书写注意事项.

解答 (1)不正确,应改写为 $\frac{7}{2}a^2b$ (2)正确 (3)不正确,应改写为

$5xy$ (4)不正确,应改写为 $\frac{x+y}{xy}$

代数式的书写主要是积与商这两种运算要注意.

【例 3】用代数式表示:

(1) m 与 n 的和除以 10 的商.

(2) m 的 2 倍与 n 的一半的平方的差.

(3)被 6 除商 a 余 1 的数.

(4)甲乙两数的平方和(甲数为 a ,乙数为 b).

(5)比 x 大 15% 的数.

(6)比 a 与 b 的倒数和小 1 的数.

分析 掌握和、差、倍、积、商等数学术语,以及大、小、多、少等数学术语,并正确把握数与量的关系,并用运算符号正确地按运算层次与顺序来表达.

解答 (1) $\frac{m+n}{10}$ (2) $2m - (\frac{n}{2})^2$ (3) $6n + 1$ (4) $a^2 + b^2$

$$(5)(1+15\%)x \quad (6)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - 1$$

列代数式关键在于正确寻找数与量的关系.

【例4】 根据下面 a 、 b 的值,求代数式 $2a^2 - b^2$ 的值.

$$(1)a = 4, b = 3.$$

$$(2)a = 1\frac{3}{4}, b = \frac{1}{2}.$$

分析 只需把相应数值代替代数式的字母,并计算即可.

$$(1) \text{ 当 } a = 4, b = 3 \text{ 时,}$$

$$2a^2 - b^2 = 2 \times 4^2 - 3^2 = 32 - 9 = 23.$$

$$(2) \text{ 当 } a = 1\frac{3}{4}, b = \frac{1}{2} \text{ 时,}$$

$$2a^2 - b^2 = 2 \times \left(\frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{49}{8} - \frac{1}{4} = \frac{47}{8}.$$

既要弄清运算符号,又要注意运算顺序.

【例5】 3个球队进行单循环比赛(参加比赛的每一个队都与其他所有的队各赛一场),总的比赛场数是多少?4个球队呢?写出 m 个球队进行循环比赛时总比赛场数 n 的公式,并求出 $m = 15$ 时 n 的值.

分析 (1)3个球队的比赛情况:

因为每个球队都要和其他所有队即 $3 - 1 = 2$ 个队比赛,因此共有 $3 \times (3 - 1) = 6$ 场.因为每场比赛均有两个队参加,所以6场中有重复场次,除去重复场次,所以实际场数为 $\frac{3 \times (3 - 1)}{2} = \frac{3 \times 2}{2} = 3$ 场.

(2)4个球队的比赛情况:

因为每个球队需和其他队比赛,即每个球队需参加 $4 - 1 = 3$ 场比赛,则4个球队共有 $4 \times (4 - 1) = 12$ 场.因此每一场比赛我们为参赛双方各记一次,所以12场中有重复数,除去重复数,实际比赛场数为 $\frac{4 \times (4 - 1)}{2} = 6$ 场.

(3) m 个球队的比赛情况:

因为每个球队均需和其他所有队比赛,即每个球队需参加 $(m-1)$ 场比赛,则 m 个球队共有 $m(m-1)$ 场.因为每场比赛我们为双方球队各记一次,所以 $m(m-1)$ 场中有重复数,实际比赛场数为 $\frac{m(m-1)}{2}$ 场.

解答 (1)3个球队参赛,总的比赛场数为 $\frac{3 \times (3-1)}{2} = 3$ 场.

(2)4个球队参赛,总的比赛场数为 $\frac{4 \times (4-1)}{2} = 6$ 场.

(3) m 个球队参赛,总的比赛场数为 $\frac{m(m-1)}{2}$ 场,即 $n = \frac{m(m-1)}{2}$ 场.

(4)当 $m = 15$ 时,

$$\begin{aligned} n &= \frac{m(m-1)}{2} \\ &= \frac{15 \times (15-1)}{2} \\ &= 15 \times 7 = 105(\text{场}). \end{aligned}$$

【例6】解方程: $0.7x + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.

分析 按解方程的步骤:

(1)方程两边都加以(或减去)同一个数.

(2)方程两边都乘以(或除以)同一个数,即可解答.

解答 方程两边都减去 $\frac{1}{3}$,得 $0.7x = \frac{1}{6}$.

方程两边都除以0.7,得 $x = \frac{5}{21}$.

实质上是利用等式的基本性质来求方程的解.

【例7】一个食品厂有煤520吨,用了半年后还剩46吨,求平均每月用煤多少吨?

分析 若设平均每月用煤 x 吨,则半年用了 $6x$ 吨煤,此时剩下的煤也可用 x 的代数式表示: $(520-6x)$ 吨,由已知可得出方程 $520-6x=46$,从而解出.

解答 设平均每月用煤 x 吨,依题可得

$$520 - 6x = 46,$$

解这个方程得 $x = 79$.

所以平均每月用煤 79 吨.

覆盖了列代数式与解方程的知识点.

第二章 有理数

概念公式定律

【正数】 像 5、3.5、 $\frac{21}{2}$ 、8848 等大于 0 的数,叫做正数.

【负数】 像 -5、-3.5、 $-\frac{21}{2}$ 、-155 等在正数前面加上“-”(读作负)号的数,叫负数.

【零】 0 既不是正数,也不是负数.

【自然数】 正整数与 0 统称自然数.

【整数】 正整数、零、负整数统称整数.

【分数】 正分数、负分数统称分数.

【有理数】 整数和分数统称有理数.

【数轴】 规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴.

【数轴上两数大小比较规律】

1. 在数轴上表示的两个数,右边的数总比左边的数大.
2. 正数都大于 0,负数都小于 0;正数大于一切负数.

【相反数】 像 6 与 -6, $2\frac{1}{2}$ 与 $-2\frac{1}{2}$ 这样只是符号不同的两个数,我们说其中一个数是另一个数的相反数.

另外:(1) 0 的相反数是 0.

(2) 数 a 的相反数是 $-a$.

【绝对值】 一个数 a 的绝对值就是数轴上表示数 a 的点与原点的距离,数 a 的绝对值记作 $|a|$.

【绝对值的代数意义】 一个正数的绝对值是它本身,一个负数的绝对值是它的相反数,0 的绝对值是 0,即

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

【利用绝对值,两个负数大小比较的规律】 两个负数,绝对值大的反

而小.

〔有理数加法法则〕

1. 同号两数相加,取相同的符号,并把绝对值相加.
2. 绝对值不相等的异号两数相加,取绝对值较大的加数的符号,并用较大的绝对值减去较小的绝对值.互为相反数的两个数相加得 0.
3. 一个数同 0 相加,仍得这个数.

〔有理数加法交换律〕 两个数相加,交换加数的位置,和不变.即

$$a + b = b + a.$$

〔有理数加法结合律〕 三个数相加,先把前两个数相加,或者先把后两个数相加,和不变.即

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

〔有理数减法法则〕 减去一个数,等于加上这个数的相反数.

〔有理数的乘法法则〕 两数相乘,同号得正,异号得负,并把绝对值相乘.任何数同 0 相乘,都得 0.

几个不等于 0 的数相乘,积的符号由负因数的个数决定.当负因数有奇数个时,积为负;当负因数有偶数个时,积为正.

〔有理数的乘法交换律〕 两个数相乘,交换因数的位置,积不变.即

$$ab = ba.$$

〔有理数乘法结合律〕 三个数相乘,先把前面两个数相乘,或者先把后面两个数相乘,积不变.即

$$(ab)c = a(bc).$$

〔有理数的分配律〕 一个数同两个数的和相乘,等于把这个数分别同这两个数相乘,再把积相加.即

$$a(b + c) = ab + ac.$$

〔倒数〕 乘积为 1 的两个数互为倒数.

〔有理数的除法法则〕

1. 除以一个数等于乘上这个数的倒数.(注:0 不能作除数)
2. 两数相除,同号得正,异号得负,并把绝对值相除.
3. 0 除以任何一个不等于 0 的数,都得 0.

〔乘方〕 求 n 个相同因数的积的运算,叫做乘方.

〔有理数乘方的法则〕 正数的任何次幂都是正数;负数的奇次幂是负数,负数的偶次幂是正数.

【科学记数法】 把一个大于10的数,记成 $a \times 10^n$ 的形式(其中 a 是整数数位只有一位的数, n 为整数),这种记数法叫做科学记数法.

【有理数混合运算顺序】 先算乘方,再算乘除,最后算加减.如果有括号,就先算括号里面的.

【近似数】 对于一些不可能或不必要准确地表示出来的数,都是近似数.

【有效数字】 从左边第一个不是0的数字起,到精确到的数位上,所有的数字都叫做这个数的有效数字.

应用范例详解

【例1】 把下列各数填入相应的括号里:

$-2.5, 3.14, -2, +72, -0.6, 0.618, \frac{22}{7}, 0, -0.10101, 2.\dot{5}\dot{1}$

正数集合() 负数集合()

负分数集合() 自然数集合()

分析 在分类时,要注意:(1)零既不是正数,也不是负数,但它是整数,也是自然数.(2)正数与负数的区别.(3)有限小数、无限循环小数都是分数.

解答 正数集合($3.14, +72, 0.618, \frac{22}{7}, 2.\dot{5}\dot{1}$)

负数集合:($-2.5, -2, -0.6, -0.10101$)

负分数集合:($-2.5, -0.6, -0.10101$)

自然数集合:($+72, 0$)

【例2】 在数轴上,标出下列各数,然后按从小到大的顺序用“<”连接:

(1)相反数等于本身的数.

(2)绝对值为2.5的负数.

(3)倒数等于本身的正数.

(4)绝对值大于3而小于5的整数.

分析 关键在于先把每小段文字的数求出,再在数轴上表示,最后比较大小.

解答 (1) 相反数等于本身的数是 0.

(2) 绝对值为 2.5 的负数为 -2.5.

(3) 倒数等于本身的正数是 1.

(4) 绝对值大于 3 而小于 5 的整数为 -4 与 4.

在数轴上表示如下:

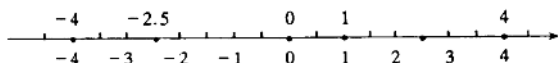


图 2-1

用“<”号连接为 $-4 < -2.5 < 0 < 1 < 4$.

对数轴、相反数、绝对值的综合理解与灵活运用.

【例 3】 填空:

(1) -5.7 是_____的相反数.

(2) $\frac{a}{3}$ 的相反数是_____, $m - n$ 的相反数为_____.

(3) 绝对值为 4 的数有_____个, 它们是_____; 绝对值小于 2 的整数是_____.

(4) 若 $|a| = -a$, 则 a 是_____数.

(5) $a - 1$ (其中 $a < 1$) 的绝对值为_____.

分析 对绝对值与相反数的概念加深理解与灵活运用.

解答 (1) 5.7 (2) $-\frac{a}{3}$, $n - m$, (3) 2 ± 4 ± 1 和
0 (4) 非正 (5) $1 - a$

【例 4】 计算:

(1) $(-1\frac{2}{3}) + (-2\frac{1}{2})$.

(2) $\frac{5}{3} + (-\frac{5}{3})$.

(3) $2\frac{1}{12} + (-5\frac{5}{6})$.

$$(4)(-3\frac{1}{4}) + (-7\frac{3}{4}) + 1\frac{3}{4} + (-2.25) + 7.75.$$

分析 (1) 在进行加法运算时,应先观察清楚是属于怎样两类数相加,便于确定和的符号,更进一步是考虑使用两加数的绝对值相加或相减.(2) 进行 n 个数加法运算时,注意技巧上运算,即若有相反的两个加数,则使用加法交换律与结合律,将运算简便;若无则可将正负两类加数分类分组运算.

$$\begin{aligned}\text{解答 (1) 原式} &= -(1\frac{2}{3} + 2\frac{1}{2}) \\ &= -4\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

$$(2) \text{原式} = 0.$$

$$\begin{aligned}(3) \text{原式} &= -(5\frac{5}{6} - 2\frac{1}{12}) \\ &= -3\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) \text{原式} &= [(-3\frac{1}{4}) + (-2.25)] + [(-7\frac{3}{4}) + 7.75] + 1\frac{3}{4} \\ &= -5\frac{1}{2} + 0 + 1\frac{3}{4} \\ &= -3\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

符号的确定,绝对值的运算、灵活运用运算律是解答本题的关键.

【例 5】 计算:

$$(1) 0 - (-\frac{1}{2}) - (-\frac{1}{3}) - (-\frac{1}{4}) - (+\frac{1}{6}).$$

$$(2) (+9) - (-8.9) - 7.5 + (-6).$$

分析 将加减法统一成加法,进而再省略括号运算.

$$\begin{aligned}\text{解答 (1) 原式} &= 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \\ &= (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) - \frac{1}{6} \\ &= \frac{13}{12} - \frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$= \frac{11}{12}.$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 原式} &= 9 + 8.9 - 7.5 - 6 \\ &= (9 + 8.9) - (7.5 + 6) \\ &= 17.9 - 13.5 \\ &= 4.4. \end{aligned}$$

【例 6】 计算:

$$(1) 1\frac{2}{3} \times (-1\frac{1}{5}).$$

$$(2) (-6.5) \times (-\frac{5}{6}).$$

$$(3) (-\frac{22}{7}) \times 0.$$

$$(4) (-3) \times \frac{5}{6} \times 1 - 1\frac{4}{5} \times (-\frac{1}{4}).$$

分析 乘法运算, 首先确定符号, 再用各因数的绝对值相乘.

解答 (1) 原式 $= -(\frac{5}{3} \times \frac{6}{5}) = -2.$

(2) 原式 $= +(\frac{13}{2} \times \frac{5}{6}) = 5\frac{5}{12}.$

(3) 原式 $= 0.$

$$\begin{aligned} (4) \text{ 原式} &= (-3) \times \frac{5}{6} \times 1 + \frac{4}{5} \times (-\frac{1}{4}) \\ &= + (3 \times \frac{5}{6} \times \frac{9}{5} \times \frac{1}{4}) \\ &= 1\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

在乘法运算时, 若因数为小数, 则把这个小数化为分数运算简便.

【例 7】 计算:

$$(1) (-8) \div 6.$$

$$(2) (-45) \div (-3).$$

$$(3) 2\frac{1}{12} \div (-1.25).$$