经济类高等教育自学教材

微积分

（含标准化测试题）

关淑娟　刘书田
刘德荫　刘其隆　编著

中国人民公安大学出版社

经济类高等教育自学教材（含标准化试题）

微　积　分

关淑娟　刘书田
刘德荫、刘其隆　编著

中国人民公安大学出版社出版总发行
新华书店北京发行所经销
河北省迁安县印刷厂印刷
787×1092毫米　1/32　26.25印张　561千字
1989年4月第1版　1989年4月第1次印刷

ISBN 7-81011-100-0/O·1　定价：8.80元
印数：0001—5000册

前　言

本书是根据国家高等教育自学考试的要求及国家教委对成人高等教育的要求编写的。

根据成人教育的特点，本书力求做到深入浅出，通俗易懂，重点突出，便于自学。为了使学员适应各种考试的要求，书中有较多的例题。为了适应近几年自学考试、电大等考试中标准化试题比例增大的趋势，本书每章都配有标准化练习题。这是本书的主要特点之一。为了提高教学效果，每章之前都有基本要求，每章之后都有小结，书后有全部习题答案。

本书是根据作者在中央广播电视大学和职工大学授课讲义的基础上编著的，因此本教材可作为成人高等教育自学考试、电大、职大、夜大、函大经济类各专业的教材或教学参考书。

由于编者水平有限，书中缺点和不足之处，敬请读者批评指正。

编　者

1988年6月

目　录

第一章　函　　数

函数是微积分研究的对象，也是分析经济变量的重要工具之一。在这一章里，我们先介绍集合的概念，接着讲函数的概念及其简单性质，并复习在中学数学中已学过的基本初等函数，最后介绍经济中常用的函数。

基　本　要　求

1　了解集合概念。
2　理解函数概念，会求函数的定义域。
3　了解函数的单调性、奇偶性和周期性。
4　了解反函数和复合函数概念。
5　熟练掌握基本初等函数的性质及其图形。
6　能列出简单实际问题中的函数关系。

§1　集　　合

一　集合概念

在日常生活中，我们有时谈论：一批产品、一班学生、一套组合家俱、自然数等．在数学上，我们把具有某种属性的事物（或对象）的全体称为集合．组成一个集合的单个事物（或对象）称为这个集合的元素．

例 1　关于组成一个集合的例子．

(1) 北京电大全体在校学生．

(2) 生产洗衣机的所有工厂．

(3) 全体自然数 1，2，3，…．

(4) 一元二次方程 $x^2-3x+2=0$ 的根．

(5) 抛物线 $y=x^2$ 上所有的点．

通常，我们用大写字母 A，B，C，… 等表示集合，用小写字母 a，b，c，… 等表示集合中的元素．如果 a 是集合 A 的元素，则记作 $a\in A$，读做"a 属于 A"或"a 在集合 A 中"．如果 a 不是集合 A 的元素，则记作 $a\overline{\in} A$，读做"a 不属于 A"或"a 不在集合 A 中"．

符号"$\in$"读做"属于"，符号"$\overline{\in}$"读做"不属于"．这两个符号是用来表示元素和集合关系的．

例 2　如果用 N 表示全体自然数集合．25 是 N 的元素，记作 $25\in N$．25.3 不是自然数，即 25.3 不是 N 的元素，记作 $25.3\overline{\in} N$．

集合 A 中元素的数目称为集合 A 的基数．基数为有限数的集合，称为有限集合．如例 1 中的 (1)、(2) 和 (4)．基数不是有限数的集合，称为无限集合，如例 1 中的 (3) 和 (5)．有的书，把集合的基数称为势．

二　集合的表示法

常用的集合表示法有：列举法、描述法和图示法．

1　列举法：把集合中的元素一一列举出来，并用花括号{ }括起来，这种表示集合的方法称为列举法．

例 3　(1) 由数 2，4，6 组成集合 A，可以表示为 $A=$

$\{2, 4, 6\}$ 或 $A=\{4, 6, 2\}$ 或 $\{6, 2, 4\}$等.

(2) 全体自然数组成的集合 N，可表示为

$$N=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$$

(3) 由方程 $x^2-3x+2=0$ 的根组成的集合 A，可表示为 $A=\{1, 2\}$.

注 用列举法表示集合时，只与组成集合的元素有关，不重复地列出所有元素，而与元素排列次序无关。

2 描述法：把集合里的元素的公共性质（或规律）描述出来，这种表示集合的方法称为描述法。

例 4 (1) 北京电大全体在校学生组成的集合 B，可以表示为

$$B=\{x \mid x \text{ 为北京电大学生}\}$$

(2) 集合 $A=\{2, 4, 6\}$，可以表示为

$$A=\{x \mid x \text{ 为偶数且 } 2 \leqslant x \leqslant 6\}$$

(3) 由方程 $x^2-3x+2=0$ 的根组成的集合 A，可表示为

$$A=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$$

一般地，设 $p(a)$ 是某个（或组）与元素 a 有关的条件，如果集合 A 是由满足这个（组）条件的所有元素 a 所组成，那么就记作

$$A=\{a \mid p(a)\}$$

例 4 中的 (1)，$p(a)$ 是指“北京电大学生”；(2) 中的 $p(a)$ 是指“大于或等于 2 且小于或等于 6 的偶数”这一组条件。

注 一个集合用哪种方法表示好呢？这要看具体问题而定。

如集合 $A=\{$张、王、李、赵、刘$\}$，用描述法就困难。 $B=$

$\{x|x$ 为北京电大学生$\}$. 用列举法就太麻烦了。

3 图示法 用简单的平面图形表示集合，称为文氏图(Venn)，如图 1.1，集合内的元素以图形内的点表示.

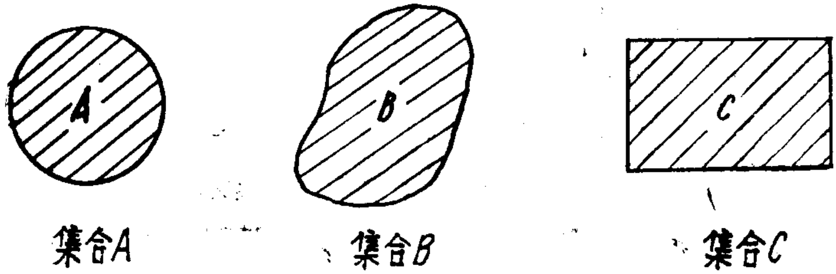


图 1·1

三 空集与全集

我们把不包含任何元素的集合称为空集，记作 ϕ. 把所讨论的所有事物构成的集合称为全集，记作 U.

例 5 (1) $A=\{x|x^2+1=0, x$ 为实数$\}$，A 为空集，即 $A=\phi$. $B=\{x|x$ 为实数$\}$，在全体实数范围内讨论问题时，B 为全集，即 $B=U$. 如果在全体复数范围内讨论问题时，B 就不是全集。

(2) 一批产品全是一等品或二等品，那么废品的集合为空集。

四 子 集

在两个集合之间，有时存在这样的情形：集合 A 中的每一个元素都是集合 B 中的元素。例如集合 $A=\{a, b, c\}$ 和 $B=\{a, b, c, d, e\}$，显然 A 中的每一个元素都是 B 中的元素。这时把 A 称为 B 的子集。给出定义如下：

定义 1.1 设 A、B 是两个集合，如果对任一 $a\in A$，都有

$a \in B$，则称 A 为 B 的子集。记作"$A \subset B$"或"$B \supset A$"，读作"A 包含于 B"或"B 包含 A"，如图 1.2。

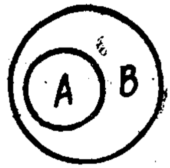


图 1.2

例 6 (1) 设 $U = \{x | x$ 为一批产品$\}$，$A = \{x | x$ 为一等品$\}$，$B = \{x | x$ 为合格品$\}$，则有

$$A \subset B, \ A \subset U, \ B \subset U.$$

(2) 设 N 表示全体自然数的集合，F 表示全体有理数的集合，R 表示全体实数集合，则有

$$N \subset F, \ F \subset R. \text{ 如图 } 1.3\text{。}$$

我们约定：

1 空集 ϕ 是任意集合 A 的子集，即 $\phi \subset A$。

2 集合 A 本身也是它自己的子集。

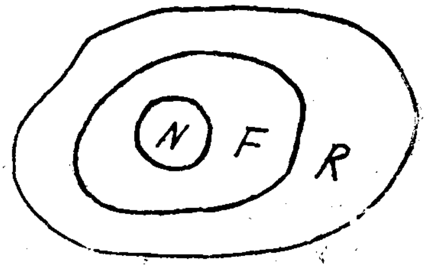


图 1.3

另外，根据定义，集合的包含关系有传递性：

如果 $A \subset B$，$B \subset C$，则有 $A \subset C$。

定义 1.2 设有集合 A、B，如果 $A \subset B$，同时有 $B \subset A$，则称集合 A 与 B 相等，记作 $A = B$。

例 7 (1) 由方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的根组成的集合与集合 $\{1, 2\}$ 是相等的。记作

$$\{x | x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$$

(2) 集合 $A = \{1, 3, 5, 7\}$ 与 $B = \{3, 1, 7, 5\}$ 是相等的。记作 $A = B$

注 两个集合相等是指两集合互相包含，它们的文氏图必然是互相重合的。

五 集合的运算

1 并集与交集

设有两个集合

$$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B=\{2, 3, 5, 6, 7\}$$

由 A 和 B 的所有元素组成的集合 C，称为 A 与 B 的并集．

$$C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

由 A 和 B 的所有公共元素组成的集合 D，称为 A 与 B 的交集．$D=\{2, 3, 5\}$.

定义 1.3 设有集合 A 和 B，由 A 和 B 的所有元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的并集．记作 $A\cup B$．由 A 和 B 的公共元素组成的集合，称为 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$．集合 A 与 B 的并集或交集可以分别表示为

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

如图1.4 和图 1.5 的阴影部分．

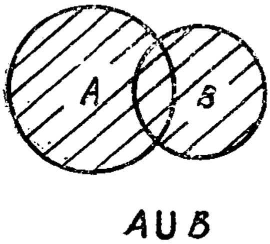


图 1.4

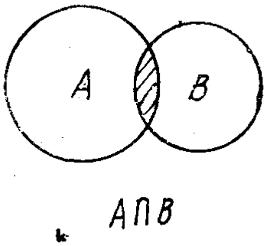


图 1.5

例 8 (1) 设 $A=\{x \mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$, $B=\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 4\}$，则

$$A \cup B = \{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 4\}$$

$$A \cap B = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$$

(2) 设 A 为某厂职工参加文娱活动的人的集合，B 为参加体育活动的人的集合，那么

$A \cup B$ 表示至少参加一项文体活动的人的集合。

$A \cap B$ 表示两项文体活动都参加的人的集合。

(3) 设 $A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in N\}$，$B = \{x \mid x = 2n, n \in N\}$ 则

$$A \cup B = \{x \mid x = n \quad n \in N\}$$

$$A \cap B = \phi.$$

说明 A 表示自然数中奇数集合，B 表示自然数中偶数集合，A 与 B 的并集为全体自然数集合，而 A 与 B 的交集为空集合。

关于并集与交集显然有下列性质：

(1) $A \subset A \cup B$，$B \subset A \cup B$，

$A \cap B \subset A$，$A \cap B \subset B$；

(2) 对于任何集合 A 有

$A \cup \phi = A$，$A \cup U = U$，$A \cup A = A$，

$A \cap \phi = \phi$，$A \cap U = A$，$A \cap A = A$.

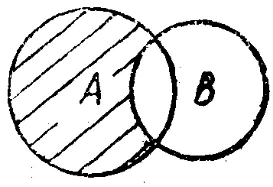
2 差集与补集

定义 1.4 设有集合 A 与 B，属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为集合 A 与 B 的差集，记作 $A - B$.

差集可表示为

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \overline{\in} B\}$$

如图1.6阴影部分。



$A - B$

图 1.6

显然有　$A-B\subset A$, $B-A\subset B$.

例 9　(1) 设有两个集合

$$A=\{2,3,4,5\},B=\{4,5,6,7\}$$

则

$$A-B=\{2,3\},B-A=\{6,7\}.$$

(2) 设 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 5\}$, $B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$

则

$$A-B=\{x|2<x\leqslant 5\},B-A=\{x|-1\leqslant x<0\}.$$

定义 1.5　全集 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，称为集合 A 的补集，记作 $\overline{A}$. 如图 1.7，即

$$\overline{A}=\{x|x\in U \text{ 且 } x\overline{\in}A\}$$

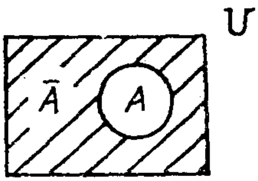


图　1.7

例 10　(1) 设一批产品的集合为全集 U.

如果 A 表示合格品的集合，那么 $\overline{A}$ 表示不合格品的集合。

(2) 设 $U=\{a,b,c,d,e,f\}$

如果 $A=\{a,c,d\}$. 则 $\overline{A}=\{b,e,f\}$.

显然，关于补集有下列性质：

$$A\cup\overline{A}=U,A\cap\overline{A}=\phi$$

六　集合运算律

1　交换律　(1) $A\cup B=B\cup A$

　　　　　(2) $A\cap B=B\cap A$

2　结合律　(1) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

　　　　　(2) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

3　分配律　(1) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

(2) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

4　吸收律　(1) $(A\cup B)\cap A=A$

(2) $(A\cap B)\cup A=A$

5　德摩根律　(1) $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$

(2) $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

这些运算律都可以用集合论的方法加以证明.现举一例:

证明分配律(2)　$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

根据两个集合相等的定义,要证明上式左右两端的集合相等,只需证明上式左、右两端的集合互相包含。

先证　左$\subset$右,即$(A\cap B)\cup C\subset(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

设　$x\in(A\cap B)\cup C$,由并集的定义知道,

$x\in(A\cap B)$或者$x\in C$,

当　$x\in(A\cap B)$时,由交集的定义知,$x\in A$且$x\in B$,当然有$x\in A\cup C$且$x\in B\cup C$;再由交集的定义可得

$$x\in(A\cup C)\cap(B\cup C).$$

当　$x\in C$时,显然有$x\in A\cup C$,$x\in B\cup C$;再由交集的定义得出$x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

这就证明了,$(A\cap B)\cup C$中的元素必是

$$(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

的元素,因此有

$$(A\cap B)\cup C\subset(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

再证　右$\subset$左,即$(A\cup C)\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup C$.

设　$x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$,则由交集的定义知,

$$x\in(A\cup C)\text{且}x\in(B\cup C).$$

这时只有两种可能

当　$x\in C$时,则显然有$x\in(A\cap B)\cup C$;

当 $x \overline{\in} C$ 时，由于 $x \in (A \cup C)$ 且 $x \in (B \cup C)$ 可得 $x \in A$ 且 $x \in B$，即 $x \in A \cap B$. 可推出 $x \in (A \cap B) \cup C$.

这也就证明了 $(A \cup C) \cap (B \cup C)$ 中的元素必是

$$(A \cap B) \cup C$$

的元素，因此有 $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subset (A \cap B \cup C$.

综上所述，这就证明了分配律 (2)

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

为了直观，我们用文氏图来说明分配律 (2) 成立，如图 1.8。

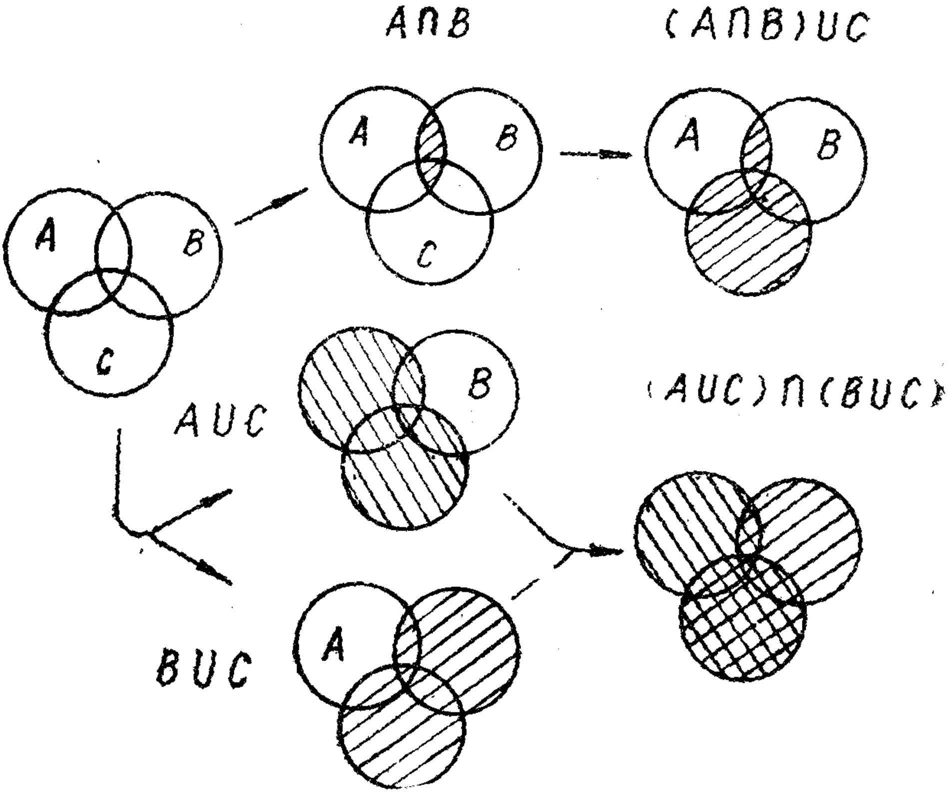


图 1.8