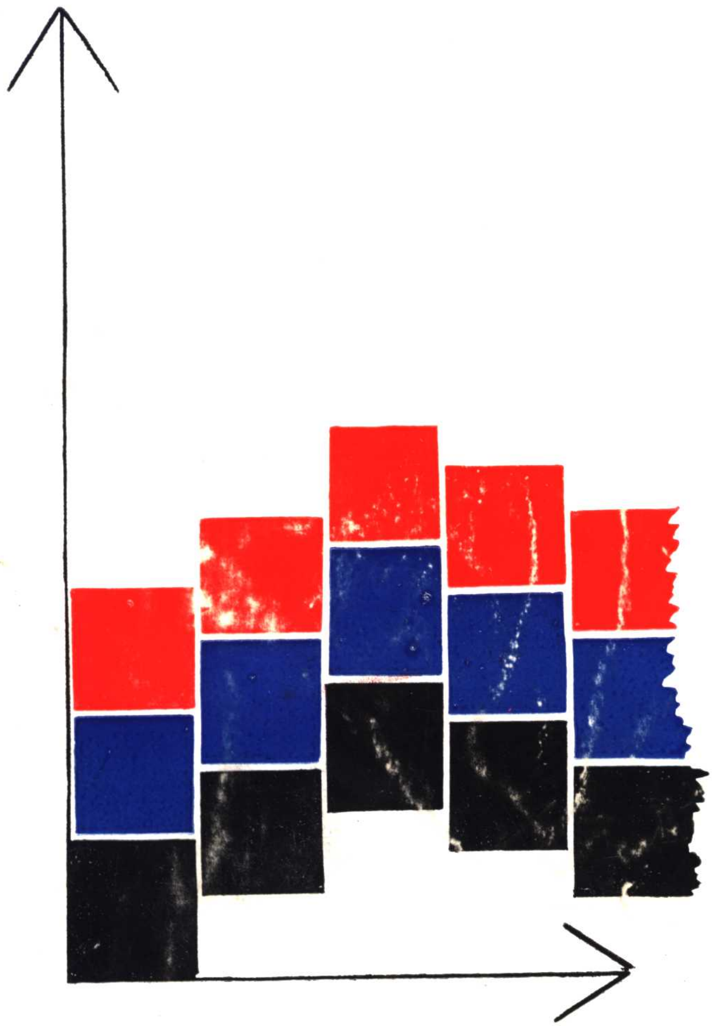
分段函数及其应用

湯光宋 郑隆炘 陈方年

华中理工大学出版社



分段函数及其应用

汤光宋　郑隆炘　陈方年　编著

华中理工大学出版社

内 容 提 要

本书集作者多年的教学经验和研究成果编著而成．书中系统地阐明了分段函数的概念、分段函数的基本性质、含绝对值的函数图象、求含绝对值函数的极值或最值、含绝对值的方程、含绝对值的不等式、几类含绝对值的方程组与不等式组的解法、关于含绝对值的复数方程的求解、分段函数的导数与积分、分段函数的积分表示与“分集”函数以及描述随机变量分布的分段函数。

本书内容新颖、材料充实、论述严谨、由浅入深、循序渐进、易于掌握。本书是理工科大学生以及职大、电大、函大、夜大学生的良好读物，也是值得中学生、自学青年阅读的一本好书，还是中学数学教师进行教学的极好参考书和第二课堂活动中数学课外小组难得的教材。

分段函数及其应用

汤光宋 郑隆炘 陈方年 编著

责任编辑 [redacted]

●

华中理工大学出版社出版发行

（武昌喻家山）

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社沔阳印刷厂印刷

●

开本：850×1168 1/32 印张：9 字数：218 000

1991年 8月第1版 1991年8月第 1次印刷

印数：1—1 000

ISBN 7-5609-0571-4/O·83

定价：3.90元

序　言

分段用不同的解析式表达的一元函数常简称为分段函数，这类函数无论在初等数学还是高等数学中屡见不鲜。例如，符号函数、阶梯函数、样条函数。然而，介乎初等数学与高等数学之间系统地介绍这类函数的书，目前尚属少见。汤光宋、郑隆炘、阵方年三位副教授编著的这本书，填补了这方面的空白，为广大数学教师和大中学生提供了一本很好的富有特色的教学参考资料和课外补充读物。

他们在繁忙的教学、行政工作之余，潜心钻研，认真搜集，写了不少研究这类函数的文章。本书大部分内容是他们教学经验、科研成果的结晶。全书写法上亦具匠心，立意新颖，论理准确，例证规范，文笔流畅，加之深入浅出，通俗易懂，实为普及与提高的佳作。

通过阅读本书，我想至少可获以下收益：

1.众所周知，在初等数学中，含绝对值符号的函数的极值求法，不等式与方程式的解法都是棘手的问题，靠乘方去绝对值符号，运算冗繁，且有增、遗根之烦。而本书介绍了一种简捷、快速、规范的方法，值得掌握。

2.熟悉用分段函数来逼近或表达一般函数的技巧，如同学会用曲线板画出千姿百态的曲线、图案一样有趣。领略化整体为局部，集局部为整体，变复杂为简单，用简单去认识复杂等充满哲理的分析问题与解决问题的数学思想，对学习样条函数和其它数学分支好处很大。

3.如何用高等数学的观点、指导初等数学的教学研究，如何在成熟的高等数学与初等数学之中找到一些教材，教法及其它问

题的研究课题，书中也提供了不少有益的启示，可以效法。

我相信读者还可以结合自己的实践从中吸取有益的东西。期望本书受到读者欢迎，关注和补正。

廖晓昕

1990年10月

目　录

第一章　分段函数的概念

在初等数学和高等数学中，经常遇到其定义域内分段表示的函数．本章介绍分段函数的概念、分段函数的反函数与分段函数的复合函数．

§1　什么是分段函数

一、分段函数的定义

1°　从绝对值的概念谈起

从几何角度来看，绝对值是实数在数轴上对应的点与原点间的距离．从代数角度来看，绝对值是一个非负的数．对正数、负数和零的绝对值分别作出如下的规定：

$$|a|=\begin{cases} a, & a>0; \\ 0, & a=0; \\ -a, & a<0. \end{cases}$$

这实际上是分段表示数．这对中学生都是非常熟悉的了．

现在，我们来研究函数

$$y=f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 0; \\ x, & x<0. \end{cases}$$

它是定义在（$-\infty$，$+\infty$）上的一个函数（不是两个函数），其对应规律在定义域（$-\infty$，$+\infty$）的两段上分别用两个公式来表示，即函数在定义域的其中一段（$-\infty$，0）上所对应的值按公式$y=x$来计算，而在另一段〔0，$+\infty$）上的函数值用 $y=x^2$ 来计算．如

$$f(-5)=-5,\quad f(0)=0^2=0,\quad f(4)=4^2=16.$$

这种函数的对应关系是分段表示的，称为**分段定义的函数**，简称**分段函数**.

2° 定义

若一元函数$f(x)$的定义域由若干段组成（每段可以是几个区间的并或一个区间或一个点），在不同段上有相应的表达式，则称在这个定义域上定义了一个分段函数.

例如，$f(x)=\begin{cases}x^5+1, & -2<x<1;\\ x^2-1, & 1<x\leqslant 3.\end{cases}$

它的定义域为$(-2,1)$，$(1,3]$.

可见，把握好分段函数的定义必须明确两点：第一，分段函数的对应关系是分段表示的，在自变量的不同变化范围，它的表达式一般不同；第二，定义域中的若干段，可以衔接，也可以不衔接，分成的段数可为有限的，也可为可数无限的（有与自然数集对应的基数）.

例1 设火车从甲站出发以0.5公里/分^{2}的匀加速运动前进，经2分钟后匀速前进，再过7分钟后以0.5公里/分^{2}匀减速运动到达乙站. 试将火车在这段时间内的速度表示为时间的函数，并作出图象.

解 按运动学中公式$V=V_0+at$，时间由0到11（分）时，速度V和时间t的关系是

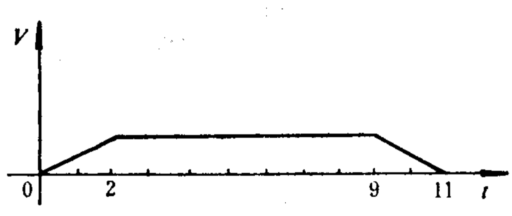


图1.1

$$V(t)=\begin{cases}0.5t, & 0\leqslant t\leqslant 2;\\ 1, & 2<t\leqslant 9;\\ 1-0.5(t-9), & 9<t\leqslant 11.\end{cases}$$

它的图形由两段斜率不同的直线段与一段水平直线段组成（图1.1）。

例2 把一克质量的冰加热，让温度由零下10°C升高到10°C。在这个过程中，冰所吸收的热量Q是温度T的函数，试写出函数的表达式，并作出图象。

解 冰的比热是2.1焦/克·度，因此温度由-10°C上升到0°C的过程中，

$$Q=2.1[T-(-10)]$$
$$=2.1T+21.$$

由于冰的融解热为336焦/克，水的比热是4.2焦/克·度，而温度达到0°C前所吸收的热量是21焦，因此温度由0°C上升到10°C的过程中

$$Q=4.2T+357$$

当$T=0$时Q没有一个确定的值与之对应。

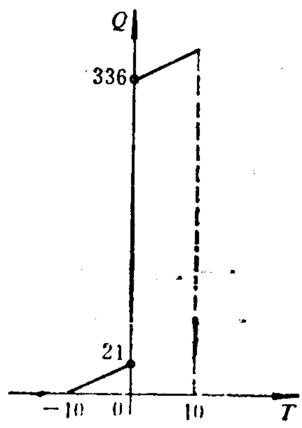


图1.2

这样，在T由-10增到$+10$时，Q和T的关系是

$$Q=\begin{cases}2.1T+21, & -10\leqslant T<0;\\ 4.2T+357, & 0<T\leqslant 10.\end{cases}$$

它的图形是两段斜率不同的直线段（图1.2）。

例3 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0\end{cases}$$

又称Kroneker函数，它在数学物理中很有用处（图1.3）。

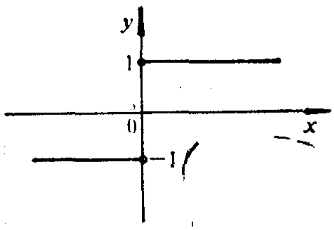


图1.3

因为对任意实数x，总有

$$|x| = x\operatorname{sgn}x,$$

所以，实际上sgn起到x的符号作用，符号函数的名称也由此而来。

例4 锯齿函数(图1.4)

$$f(x)=\begin{cases} x-n, & n<x\leqslant n+\dfrac{1}{2}; \\ -x+n+1, & n+\dfrac{1}{2}<x\leqslant n+1, \end{cases}$$

$n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

它就是定义域分成的段数为可数无限个情况的分段函数，在电子技术中用得很多。

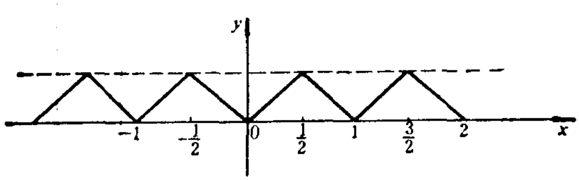


图1.4

锯齿函数的图象，在每个长度为$\frac{1}{2}$的区间上，图形是直线段，整个图形由左右无限伸展的折线组成。这样的函数也称折线函数。

二、分段函数的求值

因为分段函数在其定义域内是分段表示的，所以在计算函数值时，要根据自变量不同的取值范围，用不同的解析式计算。

例5 设$f(x)=\begin{cases} 1+x, & -\infty<x\leqslant 0; \\ 2^x, & 0<x<+\infty, \end{cases}$

求$f(-2)$，$f(0)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(\pi)$。

解 $f(-2)=1+(-2)=-1$，

$f(0)=1+0=1$，

$f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$，$f(\pi)=2^{\pi}$。

例6 作函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\cdot x$的图形，并求$f(-2)$，$f(0)$，$f(\pi)$。

解 当$x=\pm1$时，$f(\pm1)=0$；

当$|x|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}=-1$；

当$|x|>1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}=1$；

因此$f(x)$的表达式为(图1.5)

$$f(x)=\begin{cases} x, & x<-1; \\ 0, & x=-1; \\ -x, & -1<x<1; \\ 0, & x=1; \\ x, & x>1. \end{cases}$$

所以$f(-2)=-2$，$f(0)=0$，$f(\pi)=\pi$。

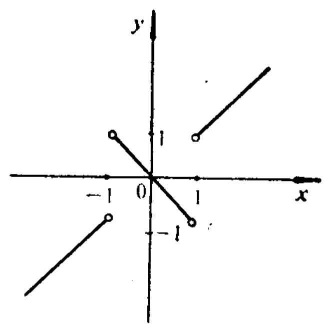


图1.5

三、分段函数是非初等函数

初等函数是只能用一个解析式子表示的函数，而这个解析式是由基本初等函数经过有限次代数运算以及有限次复合运算得到的。而分段函数在其定义域内的各段上有不同的表达式，因此分段函数是非初等函数。

我们前面举的例1至例6都是非初等函数．而绝对值函数

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0; \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

形式上是分段表示的，但是它可以用一个解析式 $y=\sqrt{x^2}$ 统一，所以它是初等函数．这是我们要注意的．但因它有类似分段函数的性质，在以后讨论有关问题时，我们都放在一起讨论．

§2　分段函数的反函数

我们知道，函数在其定义域上严格增加或严格减少，则存在反函数．一般地说，对分段函数也不例外．下面介绍求分段函数的反函数的方法．

一、作$y=f(x)$关于$y=x$的对称图形

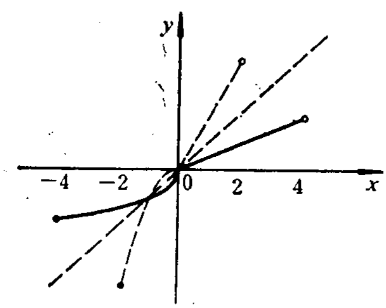


图1.6

例1　求

$$f(x)=\begin{cases} -x^2, & -2\leqslant x<0; \\ 2x, & 0<x<2 \end{cases}$$

的反函数．

解　先作出$y=f(x)$的图象，再作 $y=f(x)$ 关于 $y=x$ 的对称图形即$y=f^{-1}(x)$的图象（图1.6）．

所求$f(x)$的反函数为

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}, & 0<x<4; \\ -\sqrt{-x}, & -4\leqslant x<0. \end{cases}$$

这里用到函数$y=f(x)$的图形与其反函数$y=f^{-1}(x)$的图形关于直线$y=x$是对称的，且反函数$y=f^{-1}(x)$的定义域和值域

刚好分别是原来函数$y=f(x)$的值域和定义域。

例2　求 $f(x)=\begin{cases}\operatorname{ctg}x, & 0<x<\frac{\pi}{2};\\ -2x-4, & -2\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$ 的反函数。

解　先作出$y=f(x)$的图象，再作$y=f(x)$关于$y=x$的对称图形，即$y=f^{-1}(x)$的图象(图1.7)。注意到$y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$与$y=\operatorname{ctg}x$互为反函数，故所求$f(x)$的反函数为

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & x>0;\\ -\frac{1}{2}x-2, & -4\leqslant x\leqslant 0.\end{cases}$$

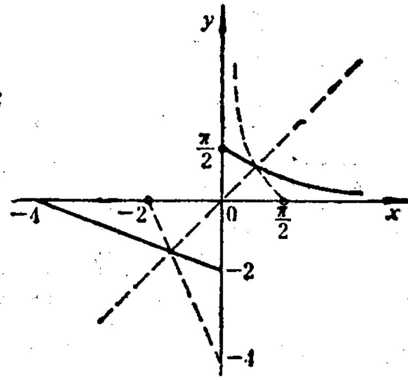


图1.7

例2说明了在其定义域内不满足严格单调的函数其反函数仍可以存在，这一点必须引起注意。

二、分段求反函数

用这种方法可按以下两步进行：

1°　对每一段的表达式$y=f_i(x)$，先视y为常数，解出$x=f_i^{-1}(y)$，然后将x、y位置互换得$y=f_i^{-1}(x)$。

2°　注意$y=f_i^{-1}(x)$的定义域之间的衔接，得所求$f(x)$的反函数$f^{-1}(x)$。

例3　求 $y=f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\geqslant 0;\\ 1-x^3, & x<0\end{cases}$ 的反函数。

解　当$x\geqslant 0$时，$y=-x^2$，解之，$x=\sqrt{-y}$，$y\leqslant 0$。x、y位置互换，得$y=\sqrt{-x}$，$x\leqslant 0$。当$x<0$时，$y=1-x^3$ 解

之，$x=\sqrt[3]{1-y}$，$y>1$

x、y位置互换，得$y=\sqrt[3]{1-x}$，$x>1$。

故所求$f(x)$的反函数（图1.8）为

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, & x\leqslant 0;\\ \sqrt[3]{1-x}, & x>1.\end{cases}$$

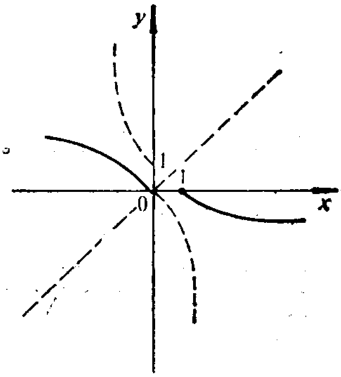


图1.8

从例3可以看到，分段求分段函数的反函数时，在每一个分段上，"分段"的反函数的定义域与"分段"的原函数的值域对应，而"合成"为整体时要注意衔接处的表示式。

例4 求

$$y=f(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1;\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4;\\ 2^x, & 4<x<+\infty.\end{cases}$$

的反函数。

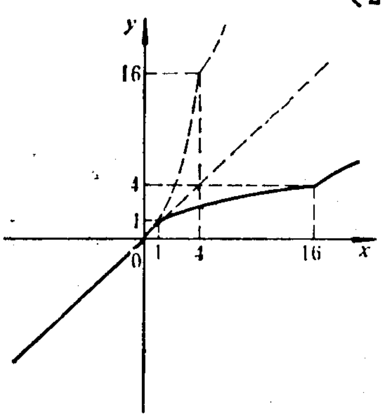


图1.9

解 当$-\infty<x<1$时，$y=x$的反函数是它本身$y=x$

当$1\leqslant x\leqslant 4$时，$y=x^2$。解之得

$$x=\sqrt{y}，1\leqslant y\leqslant 16。$$

x、y位置互换，得$y=\sqrt{x}$，$1\leqslant x\leqslant 16$。

当$4<x<+\infty$时，$y=2^x$。解之得$x=\log_2 y$，$16<y<+\infty$。x、y位置互换，得$y=\log_2 x$，

$16<x<+\infty$. 于是所求$f(x)$的反函数为(图1.9)

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} x, & -\infty<x<1; \\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16; \\ \log_2 x, & 16<x<+\infty. \end{cases}$$

§3 分段函数的复合函数

一、分段函数的复合函数的概念

先看一个例子，已知$f(x)=\begin{cases} 1, & x\geqslant 0; \\ -1, & x<0. \end{cases}$ $\varphi(x)=\sin x$，

怎么求出$f[\varphi(x)]$. 我们思考肯定也会有$f[\varphi(x)]=\begin{cases} 1, \\ -1 \end{cases}$的形式. 问题是要寻找何时等于1，何时等于$-1$. 再分析，无非要$\sin x\geqslant 0$时等于1，$\sin x<0$时等于$-1$. 很快得出（图1.10）

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases} 1, & 2n\pi\leqslant x\leqslant(2n+1)\pi; \\ -1, & (2n+1)\pi<x<(2n+2)\pi. \end{cases}$$

$n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

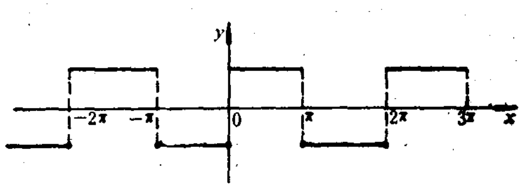


图1.10

这是可以复合的例子.

再看一个例子，已知

$$f(x)=\begin{cases}1, & 1\leqslant x<2;\\ x, & 0<x<1.\end{cases}\qquad \varphi(x)=\begin{cases}5, & x\geqslant 0;\\ 2x, & x<0,\end{cases}$$

问可不可以作成复合函数$f[\varphi(x)]$。我们思考如能作成，$f[\varphi(x)]$肯定会有 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}1,\\ \varphi(x)\end{cases}$ 的形式。问题是何时等于1，何时等于$\varphi(x)$。分析：要求 $1\leqslant\varphi(x)<2$ 时等于1，这是不可能的，因为 $5>2$，$2x<0$（$\because x<0$）。要求 $0<\varphi(x)<1$ 也不可能。所以这两个函数不可能进行复合。

这两个例子告诉我们，分段函数的复合与函数的复合一样，由$y=f(u)$与$u=\varphi(x)$复合时，函数$\varphi(x)$的值不能超出$f(u)$的定义域的范围，否则复合函数就没有意义。

定义 若$y=f(u)$ $u\in D, u=\varphi(x), x\in E$。设$E^*$表示$E$中使$\varphi(x)\in D$的$x$的全体所构成的非空数集。如果对于$E^*$中任何一个值$x$，通过函数$u=\varphi(x)$对应$D$中唯一的一个值$u$，又通过函数$y=f(u)$对应$y$的一个唯一值，则对于每一个$x\in E^*$，变量$y$都有一个确定的值与之相对应，这就得到一个确定在集$E^*$上的函数，记作$y=f[\varphi(x)]$，$x\in E^*$，称为由$y=f(u)$与$u=\varphi(x)$复合而成的复合函数。

二、分段函数的复合函数的作法

求分段函数的复合函数可按以下三步进行：

1° 先按定义写出$f[\varphi(x)]$关于$\varphi(x)$的表达式；

2° 按$\varphi(x)$的定义，分别求出x的取值范围或说明在此范围内不可能进行复合；

3° 最后将$\varphi(x)$的取值代入$f[\varphi(x)]$的表达式得出结果。

例1 已知$f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0;\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求$f[f(x)]$。

解 $f[f(x)]=\begin{cases}1+f(x), & f(x)<0,\\ 1, & f(x)\geqslant 0.\end{cases}$ 要$f(x)<0$，