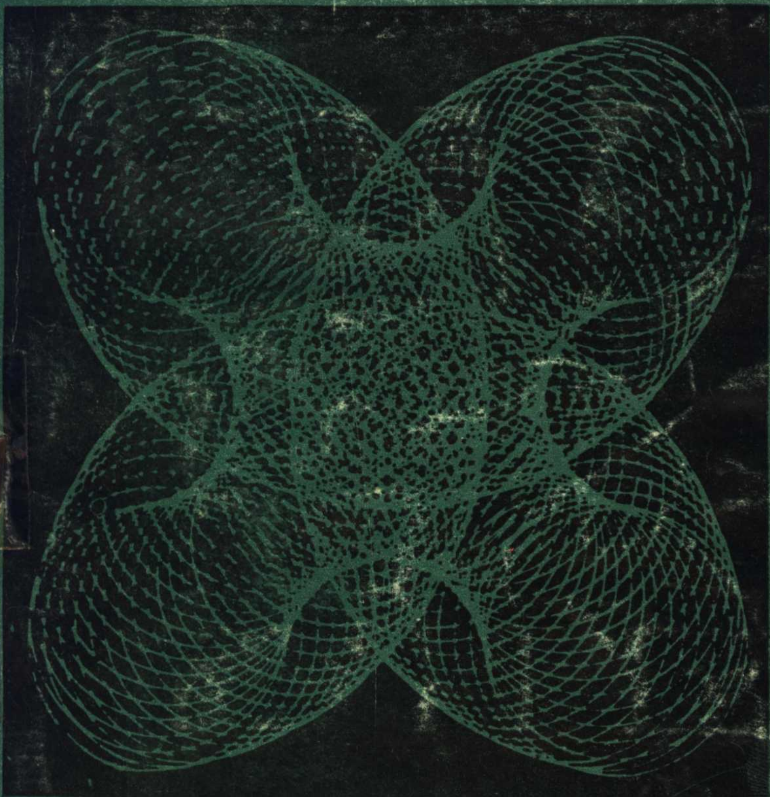
陈叔瑾 编著

多复变函数论

（积分表示及其应用）



多复变数函数论
(积分表示及其应用)

*

陈叔瑾　编著
厦门大学出版社出版
厦门大学印刷厂印装

*

开本 787×1092　1/32　11.25 印张　248 千字
1989 年 12 月　第 1 版　　1989 年 12 月　第 1 次印刷
1—1000 册
ISBN　7—5615—0249—4/O·15
定价:2.20 元

序　言

熟知，Cauchy 积分公式在单复变数分析中占有极其重要的地位，它贯穿于当今单复变数分析的教科书。在单复变数分析中取得极大成功的积分公式在多复变数分析中直至本世纪60年代却感到应用上的困难，究其原因无非是在多复变数分析中所建立的积分公式，不同时具备公式的普遍性与积分核的全纯性。本世纪 60 年代 J. J. Kohn 和 L. Hörmander 成功地得到了 $\bar{\partial}$方程的解的 L^2 估计；70 年代 G. M. Henkin 和 I. Lieb 又成功地得到了 $\bar{\partial}$方程的解的积分表示，使得在多复变数分析中用其他方法难以解决的一系列问题，用积分表示作为工具得以简单地解决.

作为一本入门书，尤其成为教材的书，我感到对于这门课尚为陌生的读者来说，一定期望了解为什么多复变数分析能成为一个独立的学科？为什么它为越来越多的数学工作者的重视，并进行专门的研究，成为近代数学中十分活跃的分支？究竟多复变数分析与单复变数分析有哪些本质的差别？因此本书先从此入手，在引论中谈及此类问题。我想当读者读完本书后，再回头看看引论也许还会有新的体会。在现有的一些多复变数分析书中，在论述积分表示理论时，是一个个地介绍散见于各数学刊物中的积分表示，当然这些积分公式的证明是各有特色，富有启发性的，不过对于初学者来说不容易理会各种积分表示之间的联系。60 年代 F. Norguet 提出了多复变数的统一 Cauchy 公式的思想，因此本书试图用统一的观点来阐

述多复变数积分表示理论。本书最后介绍了 G. M. Henkin 和 J. Leiterer 用层论和纤维丛理论把$\mathbb{C}^n$空间中的积分表示推广到 Stein 流形的结果，这是近期多复变数的重要成果，它与现代微分几何有紧密的联系。现代微分几何的主要问题是研究流形的整体性质，尤其是局部与整体性质的关系。因此研究复流形上的多复变数函数论是十分重要的。

由于作者水平所限，加上写得也很匆忙，书中缺点甚至错误在所难免，恳望得到读者的指正批评。

本书的写作过程一直得到方德植教授的关怀和鼓励，钟同德教授和李轮焕副教授对本书稿提出不少宝贵的意见和建议，使书稿有很多的改进，邱春晖同志对本书稿的校阅付出了辛勤的劳动。借此，向他们表示最衷心的感谢。

陈叔瑾

1988 年 4 月 6 日

内容简介

本书系统地介绍多复变数函数的积分表示及其应用，是一本入门读物。书中先用比较的手法叙述多复变数分析与单复变数分析本质差别，以及多复变数全纯函数，多次调和函数，微分形式和一些域的概念。然后用统一的观点论述$\mathbb{C}^n$空间中的积分表示及其应用。最后把$\mathbb{C}^n$空间中的积分表示推广到Stein流形。本书简明扼要，清晰易懂，并包含国内外在多复变数积分表示这个领域中的许[illegible]成果。它可做为数学系高年级学生和有关专业研究生教材，亦可供大学教师、数学工作者以及其他科技工作者参考。

目录

引论

多复变函数的研究虽然历史已很悠久，但直至人们发现了多复变函数与单复变函数的本质差别之后才引起重视。因此实际上到了十九世纪末至二十世纪初才有较多人进行专门的研究。

下面我们来比较$\mathbb{C}^1$空间和$\mathbb{C}^n$空间($n\geqslant 2$)中几个经典问题。

1. 全纯域(正则域)

一开集$\Omega\subseteq\mathbb{C}^n$是全纯域，如果不存在非空开集$\Omega_1,\Omega_2$；$\Omega_2$是连通的，$\Omega_1\subset\Omega_2\cap\Omega$，$\Omega_2\not\subset\Omega$，使得对每一在$\Omega$上全纯的函数$u$，存在$\Omega_2$上全纯函数$u_2$，使得在$\Omega_1$上$u=u_2$(见图1)。

全纯域的这定义是复杂的，因为它需考虑$\partial\Omega$自身相交的可能性。如果不考虑这种技术细节，我们可以说一个开集Ω不是全纯域，如果在Ω上每个全纯函数u都能全纯开拓到稍微大的开集（且这开集不依赖于u)。

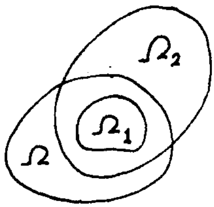


图 1

在$\mathbb{C}^1$空间中，每一开集都是全纯域。对于圆盘D这论断有一个巧妙的证明。令$f_0(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{-n}z^{(2^n)}$，$f_0$在$\overline{D}$上连续，在$D$中全纯，然而$f_0(e^{i\theta})=\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{-n}exp(i2^n\theta)$是Weierstrass无处可

微函数。f_0 不可能可微地(更何况全纯地)开拓到更大的开集。根据 *Riemann* 映射定理,平面上每一个光滑有界的单连通开子集都是全纯域。对于一般情形,令 $\Omega\subseteq\mathbb{C}^1$ 是任何适当的开集,$\{z_j\}_{j=1}^{\infty}\subset\Omega$ 是一点列,它在 Ω 中没有聚点,但在 Ω 的每一边界点处有聚点(读者可利用到边界的距离函数来构造这种集合). 由 *Weierstrass* 定理(见下面除法部分),在 Ω 上存在非常数的全纯函数在每一 z_j 为 0。若 u 可通过任何边界点全纯地开拓,则 u 的零点集应有一个内部聚点。那么 u 就恒等于 0 了。因此 u 不能开拓,从而 Ω 是全纯域。

在 $\mathbb{C}^n(n\geqslant 2)$ 空间中则不同。某些开集是平凡的全纯域,例如对 $\Omega=D^2(0,1)\subset\mathbb{C}^2$,只需设 f_0 是 $\mathbb{C}^1$ 中所构造的函数,并置 $u(z_1,z_2)=f_0(z_1)\cdot f_0(z_2)$,则 $u(z_1,z_2)$ 就不能开拓到 $D^2(0,1)$ 外。但不是所有 $\mathbb{C}^n$ 中的开集都是全纯域。例如,令 u 是 Ω 上全纯函数。对于 $|z_1|<1$ 中的固定点 z_1,书

$$u_{z_1}(z_2)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z_1)z_2^n, \qquad (0,1)$$

其中 *Laurent* 展开式的系数由

$$a_n(z_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z_2|=\frac{3}{4}}\frac{u(z_1,\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta$$

给出。$a_n(z_1)$ 全纯地依赖于 z_1,但对于 $n<0$,当 $\frac{1}{2}<|z_1|<1$ 时,$a_n(z_1)=0$,因此 $a_n(z_1)\equiv 0$。这时幂级数表达式(0,1)就是 u 在整个域 $D^2(0,1)$ 的全纯开拓。

为何出现这种本质的差别?从下面所阐述的全纯开拓概念我们可得到一点启示。

设 $f(z)$ 是定义在开集 $G\subset\mathbb{C}^1$ 上的全纯函数,f 可以开拓

到最大的一个定义域 D_f 就称为 f 的自然定义域。一般 $D_f \not\subset \mathbb{C}^1$，因为有单值性问题，所以 D_f 一般是铺开在 $\mathbb{C}^1$ 上的域。例如 $f(z)=\sqrt{1-z}=1+\frac{1}{2}(-z)+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-z)^2+\cdots$，它的自然定义域就是 $\mathbb{C}^1-\{1\}$ 上的两叶铺开域。

在 $\mathbb{C}^n(n\geqslant 2)$ 中亦有全纯开拓的问题。若 $f(z)$ 是定义在 $G\subset\mathbb{C}^n$ 的一个全纯函数，同样可以用全纯开拓的方法，延拓到更大的定义域，这个最大的开拓的定义域 D_f 就称为 f 的自然定义域。这个 D_f 一般亦不包含在 $\mathbb{C}^n$ 中，但它一定是铺开在 $\mathbb{C}^n$ 上的域。今设 $F=\{f\}$ 是一族在 $G\subset\mathbb{C}^n$ 上定义的全纯函数，令 $D_F=\bigcap\limits_{f\in F} D_f$。若我们取 F 为 G 上全纯函数的全体，对于这种 F，$n=1$ 和 $n>1$ 的情况，D_F 是不同的。当 $n=1$ 时，$D_F=G$；而对于 $n>1$ 则未必如此。事实上，对于 $n=1$，若 $a\notin G$，函数 $(z-a)^{-1}$ 是 G 内的全纯函数，但 $a\notin D_{(z-a)^{-1}}$，故 $a\notin D_F$。对于 $n>1$ 的情形，例如 $n=2$，一般无法像 $n=1$ 的情形那样来构造类似 $(z-a)^{-1}$ 的函数，使得当 $a\notin G_F$ 时，推出 $a\notin D_F$。例如 $G=\mathbb{C}^2-\{0\}$，这里 $\{0\}$ 表示 $\mathbb{C}^2$ 中原点一个点所组成的集，一般无法找到一个在 $\mathbb{C}^2-\{0\}$ 全纯，而在 $\{0\}$ 这一个单点所成的集上具有奇性的全纯函数，因为在 $\mathbb{C}^2$ 中定义在任一区域的全纯函数的零点不是孤立的。类似于 $n=1$ 情形所考虑的函数 $(z-a)^{-1}$，我们自然会联想到函数 $f(z_1,z_2)=(z_1z_2)^{-1}$，但函数 z_1z_2 的零点集是 $(\mathbb{C}^1_{z_1}\times\{0\})\cup(\{0\}\times\mathbb{C}^1_{z_2})$，因此 $f(z_1,z_2)=(z_1z_2)^{-1}$ 只是在 $\mathbb{C}^2-\{(\mathbb{C}^1_{z_1}\times\{0\})\cup(\{0\}\times\mathbb{C}^1_{z_2}\}$ 上全纯，而不是在 $\mathbb{C}^2-\{0\}$ 上全纯。另外，函数 $f(z_1,z_2)=1/(|z|^2+|z_2|^2)$ 只在 $\mathbb{C}^2$ 中的原点有奇性，但它不是全纯函数。

什么域是全纯域，什么域不是全纯域，这是多复变函数论

中极其重要问题之一。1910 年 *Levi* 提出一域为全纯域的充要条件的猜想，即一域是全纯域当且仅当该域为拟凸域。直到 1953 年这问题才由 *Oka* 给出肯定的回答。

2. **全纯映照**

Riemann 定理指出 $\mathbb{C}^1$ 空间中的每个适当的单连通开子集 Ω 全纯同胚于圆盘，即存在一函数 u_Ω（实际上存在许多这种函数），使得 $u_\Omega: \Omega \to D^1(0,1) \subseteq \mathbb{C}^1$，$u_\Omega$ 是一一的，到上的，全纯的。但是在 $\mathbb{C}^n(n>1)$ 中没有类似的结果。1907 年 *H. Poincaré* 揭示双圆柱 $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2: |z_1|<1, |z_2|<1\}$ 和超球 $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2: |z_1|^2+|z_2|^2<1\}$ 不是全纯同胚的。其证法之一是计算并比较双圆柱和超球的自同构群。后来推广这种证法导致 $\mathbb{C}^n$ 中齐性（可递）域的完全分类（这属于 И. И. Пятецкий-Шапиро 的工作）。另一种证法是基于比较双圆柱和超球的不变量，即经计算单位超球的酉曲率是 $-2/(n+1)$，而单位多圆柱的酉曲率是

$$\frac{\left(\dfrac{|dz^1|^4}{(1-|z^1|^2)^4}+\cdots+\dfrac{|dz^n|^4}{(1-|z^n|^2)^4}\right)}{\left[\dfrac{|dz^1|^2}{(1-|z^1|^2)^2}+\cdots+\dfrac{|dz^n|^2}{(1-|z^n|^2)^2}\right]^2}。$$

由于可证酉曲率是全纯不变量，因此超球与多圆柱不全纯同胚。这种证法导致 $\mathbb{C}^n$ 中任何解析多面体和任何强拟凸域不是全纯同胚的结论。这样，$\mathbb{C}^n$ 空间 $(n\geq 2)$ 的函数论面临着域的分类问题。所谓域的分类问题就是将 $\mathbb{C}^n$ 中的域按是否全纯同胚分成等价类，在每一个等价类中找出一个形式最简单的标准域。由于域的分类问题尚未解决，这给多复变函数论的

研究带来极大的困难。

E'. Cartan 很简单地证明了对称域是可递域。那么可递域是否都是对称域呢？*E'. Cartan* 猜想可递域是对称域。当复变数的数目 $n=1,2,3$ 时，*E'. Cartan* 的猜想是对的。但是对一般的 n，这猜想自从 1936 年提出后，直至 1959 年才由 И. И. Пятецкий-Шапиро 在 $n=4,5$ 时举出反例否定了。这就产生了非对称可递域的分类问题。

E'. Cartan 又证明了有界对称域，除了 $n=16$ 及 $n=27$ 维复空间未确定外，可分成四大类。华罗庚把它们用矩阵形式表示出来，这就是熟知的四类典型域。

3. 奇点

在单复变数情形，不恒为零的全纯函数的零点必是孤立的。因此全纯函数的唯一性定理可叙述为：设 $\{z_k\}$ 是 D 内的一点列，在 D 内有极限点，如果对 D 内的全纯函数 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 有 $f_1(z_k)=f_2(z_k)(k=1,2,\cdots)$，那末 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 在 D 内恒等。而对于多复变数情形，全纯函数的零点构成低维的流形，因此所述的单复变数全纯函数的唯一性定理在多复变数中不成立。在单复变数情形，对于全纯函数可引进孤立奇点概念，而多复变数情形则不然。例如 $f(z_1,z_2)=1/(z_1+z_1-1)$ 的奇点是 2 维解析超曲面 $z_1+z_2-1=0$. 事实上由 *Hartogs* 现象可断言在 $\mathbb{C}^n(n\geqslant2)$ 中全纯函数奇点的非孤立性，即对于 $n\geqslant2$，当 $D\subseteq\mathbb{C}^n$ 是一开集时，若 $z\in D$，则在 $D\backslash z$ 中每一全纯函数都可全纯开拓到 z。因此 $\mathbb{C}^n(n\geqslant2)$ 空间中奇点如何分类，性质如何都比单复变数复杂得多。单复变数的 *Laurent* 展开和留数的概念都因 $\mathbb{C}^n(n\geqslant2)$ 空间中奇点的非孤立性带来推广上的困难。现有的推广形式是将留数用一个外微分式表示出来，有时

称之为残式。

与极点相联系的是亚纯函数。亚纯函数理论中带有根本重要性的问题是求一亚纯函数具有已给的极点者。在单复变函数论中有两个著名的定理。其一是 *Millag－Leffler* 定理（可找到一亚纯函数，使其主要部分等于预先给定的各极点上的主要部分。）。其二是 *Weierstrass* 定理（若 $\Omega\subset\mathbb{C}^1$，点集 $B\subset\Omega$，无聚点，则存在 Ω 上的全纯函数以 B 为其零点集。）。这两定理在 $\mathbb{C}^n(n>1)$ 空间中的推广就是所谓 *Cousin* 问题Ⅰ、Ⅱ。*Cousin* 问题Ⅰ的提法是：若 $\{U_j\}$ 是域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 的一组开复盖，相应有一组亚纯函数族 $\{f_j\}$，f_j 在 U_j 上亚纯，满足 $f_j-f_i\in Hol(U_i\cap U_j)$，问是否存在一在 Ω 上亚纯的函数 f，使得 $f-f_j$ 在 U_j 上是全纯的？*Cousin* 问题Ⅱ的提法是：若 $\{U_j\}$ 是域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 的一组开复盖，在每一个开集 U_j 中给定全纯函数 f_j，且在 $U_i\cap U_j$ 中 f_i/f_j 无零点，问是否存在一函数 f 在 Ω 中全纯，而 f_i/f 在 U_i 中无零点？这是 1895 年由 *P. Cousin* 提出来的。由于多复变数的奇点和零点不是孤立的，这两问题自然是十分困难的，一直到 1953 年才分别由 *K. Oka*，*H. Cartan* 和 *J. P. Serre* 应用层论工具漂亮地解决了。*Oka* 证明了单叶的全纯域上 *Cousin* 问题Ⅰ可解。*Cartan* 用层论的工具证明对于更一般的 *Stein* 流形上 *Cousin* 问题Ⅰ可解。*Serre* 得出 *Cousin* 问题Ⅱ在 *Stein* 流形上可解的条件。

4. 积分公式、$\bar{\partial}$问题、*Cauchy* 型积分公式

在单复变函论中有熟知的 *Cauchy* 积分公式，这公式在单复变函数论中扮演着极其重要的角色，它表明单复变全纯函数在区域内任一点的值可由边界上的值决定。但对于多复变全纯函数，在区域内任一点的值可不必由全部边界值确定。在

$\mathbb{C}^n(n>1)$空间中，用不同方法，从不同角度建立了许多全纯函数的积分表示式。例如 *Bochner*－*Martinelli* 公式，*Bergmann*－*Weil* 公式，凸区域和 n 重圆域上积分公式，强拟凸域上 Хенкин－*Ramirez* 公式，四类典型域上华罗庚公式，以及 *Cauchy*－*Fantappiè* 公式。这些公式不同时具备单复变数全纯函数的 *Cauchy* 积分公式的两个重要性质：1)公式的普遍性，即适用于任何有界域；2)积分核关于 z 是全纯的。

多复变数的 $\bar{\partial}$ 问题是 1950 年由 *D. C. Spencer* 提出的。60 年代至 70 年代 *Hörmander* 和 *Kohn* 给出拟凸域上 $\bar{\partial}$ 问题的解及其 L^2 估计方法；Хенкин，*Grauert*，*Lieb* 等给出拟凸域上 $\bar{\partial}$ 问题解的积分表示式及其 L^∞ 估计。利用 $\bar{\partial}$ 问题的解的 L^2 估计可以很简单地解决 *Levi* 问题，除法问题。$\bar{\partial}$ 问题的推广及其应用是目前国际上研究得很多的问题。

关于多复变数函数的 *Cauchy* 型积分的边界性质的研究及其应用和单复变数情形相比已有许多实质性的差异，因此必然遇到许多困难。目前已有一些成果，例如 $B-M$ 核的 *Cauchy* 型积分，复超球上的 *Cauchy* 型积分的边界性质及其在多维奇异积分方程上的应用。

5. B－调和函数

在 $\mathbb{C}^1$ 空间，若 $f(z)=u+iv$ 是全纯函数，u 和 v 都满足 *Laplace* 方程 $\partial^2 u/\partial z\partial\bar{z}=0$，$\partial^2 v/\partial z\partial\bar{z}=0$ 或 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$，即 u,v 为调和函数。其边值问题即所谓 *Dirichlet* 问题：在边值上给定连续的边界值后，所述方程是否存在 D 内的调和函数，它在边界上取已给的边界值？熟知这问题有解，而且这问题的解决对于实际应用及共形映照问题有重大的价值。

那么，对于$\mathbb{C}^n(n>1)$空间又是如何呢？设 u 是域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 上全纯函数 $f(z)$的实部，即 $u=\frac{1}{2}(f+\overline{f})$，于是 u 满足偏微分方程组

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_\alpha \partial \overline{z}_\beta}=0,\alpha、\beta=1,2,\cdots n; \qquad (0,2)$$

或者

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}=0,\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial y_\beta}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_\beta \partial y_\alpha}=0,\quad \alpha,\beta=1,2,\cdots,n.$$

($f(z)$的虚部 $v=\frac{1}{2i}(f-\overline{f})$自然亦适合此方程组)。我们称有二阶连续偏导数的实值函数 $u(x,y)$且满足(0,2)者为 B 调和函数。注意 $n=1$ 时，就是普通的调和函数。反之，给与一域 D 的 B 调和函数 u，是否存在另一 B 调和函数 v，使得 $u+iv$ 在域 D 全纯？回答是肯定的。实际上

$$v(x_1,y_1,\cdots,x_n,y_n)=\int_z^z\sum_{\alpha=1}^n\left(-\frac{\partial u}{\partial y_\alpha}dx_\alpha+\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}dy_\alpha\right)$$

就是所需函数(注意 v 一般是非单值函数，除非 D 是单连通的)。现在自然会考虑偏微分方程组(0,2)的边值问题应如何提法？当 $n>1$ 时，若给定一域 D 的连续边界值是否相应地存在唯一的 B 调和函数取已给的边界值呢？这问题一般无解。例如 $n=2$ 时，偏微分方程组(0,2)书为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_1 \partial \overline{z}_1}=0,\frac{\partial^2 u}{\partial z_2 \partial \overline{z}_2}=0,\frac{\partial^2 u}{\partial z_2 \partial \overline{z}_1}=0。\qquad (0,3)$$

今在单位双圆柱 $P_2=\{|z_1|<1\ ,\ |z_2|<1\}$的特征流形 $L_2=\{|\zeta_1|=1,|\zeta_2|=1\}$上给定连续实值函数 $\varphi(\zeta_1,\zeta_2)$，则易知双重 *Poisson* 积分

$$u(z_1,z_2)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z_1|^2}{|1-z_1e^{-i\theta_1}|^2}\cdot\frac{1-|z_2|^2}{|1-z_2e^{-i\theta_2}|^2}\varphi(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})d\theta_1d\theta_2$$

在 P_2 中满足(0,3)中头两个方程，取极限后就可看出 *Poisson* 积分所确定的函数 $u(z_1,z_2)$ 在 P_2 上的边界值已经完全由 $\varphi(\zeta_1,\zeta_2)$(注意$(\zeta_1,\zeta_2)\in L_2$)所确定。由极值原理知 $u(z_1,z_2)$是满足(0,3)头两个方程的函数，且是取已给边界值 $\varphi(\zeta_1,\zeta_2)$的唯一解。因此满足(0,3)头两个方程的函数不能在 P_2 的边界上任意给定连续的边界值，自然满足(0,3)的函数也不能在整个边界上任意给定连续的边界值。甚至仅给特征流形 L_2 上的连续边界值，也未必有一在 P_2 满足(0,3)的函数，使得在 P_2 的边界上连续，且在 L_2 上取已给的边界值。例如在 L_2 上给定连续函数 $\zeta_1\bar{\zeta}_2+\bar{\zeta}_1\zeta_2$，若方程组(0,3)有一解 $u(z_1,z_2)$取已给的边界值，则 u 必满足(0,3)的头两个方程，而由上述知(0,3)头两个方程的解是唯一的，于是必须 $u(z_1,z_2)=z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2$，但是 $\partial^2u/\partial z_1\partial\bar{z}_2=1\neq0$。

偏微分方程组的研究不仅对于函数论，且对于偏微分方程的理论也是十分重要的。迄今还只有很少的结果。华罗庚在 50 年代首先考虑具有特征流形的四类典型域，进而研究在特征流形上给定连续边界值后，有唯一解的偏微分方程。

6. 复流形与复空间

复流形粗糙地说它是由一批超球按照一种规律粘帖而成的。例如通常的单叶域就是复流形，它可以由一个坐标邻域盖住。又如 *Riemann* 曲面除去支点后就是一维复流形。*Riemann* 曲面的推广称为复空间，它是复流形加上若干相当于 *Riemann* 曲

面的支点的“边界”。在多复变数情形，支点往往是成片出现，例如 $f(z_1,z_2)=\sqrt{z_1z_2}$ 的非解析点集是 $z_1=0,z_2=0$；$z_1=0,z_2\neq 0$；$z_1\neq 0,z_2=0$，且在支点附近的性质也不那么简单。近十多年来复流形理论用整体微分几何的方法得到一些最新结果。有些结果是企图推广 *Riemann* 曲面的单值化定理和分类问题到高维情形而得到的。一维单连通 *Riemann* 曲面必定是欧氏平面，*Riemann* 球面或欧氏平面上的开单位圆。在高维情形，单连通复流形并没有这样简单的分类，甚至加上很强的曲率条件也不行。实际上 $\mathbb{C}^n$ 空间（$n\geqslant 2$）的开单位球的很小的摄动一般给出一个新的复结构（不全纯同构于球），其中 *Bergmann* 度量依然是完备的，且截曲率与球很接近。