



高等学校教材

高压静电场数值计算

清华大学 谈克雄 薛家麒 合编

5.4



前 言

《高压静电场数值计算》是根据“高电压技术及设备专业”教材规划编审委员会的决定编写的，编写大纲由清华大学及上海交通大学高压教研室共同提出。

本书从高电压技术及工程应用角度出发，讨论静电场的离散化计算方法。全书共分五章。前三章分别讨论常用的三种方法——有限差分法、有限元法及模拟电荷法，包括它们的基本原理、计算方法，并通过一些简单实例介绍计算过程及对计算结果作出分析。后两章分别讨论蒙特卡洛法及复合法。在附录中还推荐一些计算子程序，以帮助读者解决工程实际问题。

对待求场域，本书将它们区分为二维场、轴对称旋转场及三维场三种情况分别讨论。三维场指的是直角坐标系中的空间场，场量随坐标 x 、 y 、 z 而变。二维场指的是直角坐标系中的平行平面场，场量随坐标 x 、 y 而变，与坐标 z 无关。轴对称旋转场指的是圆柱 (r, α, z) 坐标系中的空间场，因电场旋转对称，所以场量随坐标 r 、 z 而变，与 α 无关。

本书由谈克雄、薛家麒编写，全书总结了清华大学高压教研室在静电场计算方面的教学实践和部分研究工作，也吸取了清华大学基本电工教研室的一些研究成果。本书编写过程中得到了王先冲教授的帮助，对此我们表示衷心的感谢。本书由西安交通大学严璋教授仔细审稿，提出不少宝贵意见，编者也致以深切的谢意。

限于编者水平，书中错误及不妥之处在所难免，欢迎读者批评指正。

编 者

1989年3月

内 容 提 要

本书较全面的介绍静电场的数值计算方法,包括高电压技术中常用的有限差分法、有限元法和模拟电荷法、蒙特卡洛法和复合法的基本原理、计算方法,并通过简单实例介绍计算过程。书中还推荐了一些计算程序,以帮助读者解决实际问题。

本书为高等院校电机系“高电压技术及设备”专业的本科生、研究生的教材或参考书,也可供从事电磁场计算的科技人员参考。

目 录

前 言	
绪 言	1
第一章 有限差分法	2
第一节 二维场的有限差分法	2
第二节 轴对称旋转场的有限差分法	14
第三节 电场强度及电容的计算	18
第二章 有限元法	21
第一节 静电场的变分法	21
第二节 二维场中的基本单元	26
第三节 有限元方程	43
第四节 有限元方程的求解	48
第五节 具有浮动电位电极的有限元法	51
第六节 轴对称旋转场中的基本单元	52
第七节 三维场中的基本单元	59
第八节 等参数单元与高次插值	73
第三章 模拟电荷法	85
第一节 模拟电荷法的基本原理	85
第二节 二维场中的模拟电荷	87
第三节 轴对称旋转场中的模拟电荷	89
第四节 三维场中的模拟电荷	100
第五节 计算实例	116
第六节 多种介质电场的模拟电荷法	120
第七节 具有空间电荷电场的模拟电荷法	122
第八节 具有浮动电位电极的模拟电荷法	123
第九节 三相电场的模拟电荷法	125
第四章 蒙特卡洛法	130
第一节 蒙特卡洛法的基本过程	130
第二节 借助差分格式的蒙特卡洛法	131
第三节 借助格林函数的蒙特卡洛法	135
第五章 复合法	144
第一节 静电场各种数值计算方法的比较	144
第二节 复合法的基本原理	146
第三节 计算实例	153
附 录	156

附录一 有限差分法计算程序	156
附录二 有限元法部分子程序	157
附录三 模拟电荷法部分子程序	160
参考文献	166

绪 言

高压静电场分析是高电压绝缘技术的一个重要方面。电气设备的绝缘在高电压作用下可能会发生击穿破坏,但确切地说,造成绝缘介质击穿的原因是高电压作用下在绝缘中形成的强电场。研究和改善高电压设备中的电场分布情况是高电压技术的重要任务之一。

目前,高压电气设备主要在工频50Hz交流电压下工作,电极间电压随时间的变化是比较缓慢的,极间的绝缘距离远比相应电磁波的波长小得多(50Hz交流电压的波长为3000km)。即使在电压变化较快的1.2/50 μ s雷电冲击电压作用下,在电压由零升到幅值的时间内,冲击波虽只行进了几百米距离(波速一般为150~300m/ μ s),但仍比电气设备的尺寸大得多(除高压输电线和有长导线的线圈类设备外)。所以一般电气设备在任一瞬间的电场都可以近似地认为是稳定的,可以按静电场来分析。

研究静电场分布的规律,常常希望能够定量计算绝缘各部位的电位和电场强度。但是由于电极形状、介质分布(场域的边界条件)比较复杂,计算常会遇到很多困难,除了极少数简单几何形状的电极和介质分布外,一般很难用解析计算方法求解,甚至不可能求解。工程上常常用近似方法,简化电极形状,来估算场域中某部分的解(主要是最大场强值)。近年来由于计算技术的发展,电子计算机的普遍使用,静电场数值计算方法才得到广泛应用,一些边界比较复杂的静电场问题也都能获得比较满意的数值解。

静电场数值计算中常用的方法是有限差分法、有限元法和模拟电荷法。有限差分法在1892年就开始应用于力学问题,只是在计算机技术发展后,才使它在工程上得到广泛应用。有限元法在50年代初开始应用于力学问题,60年代中被应用于电磁场问题。这两种方法都是将待求场域离散化为有限个离散节点,写出差分方程或有限元方程,借助于电子计算机求出离散点的场量,从而得到电场的近似描述。模拟电荷法于1969年由H.Steinbigger提出,目前是静电场数值计算的主要方法之一。此法是将连续分布的电荷用一组离散化的模拟电荷来等值代替,将模拟电荷在空间所产生的场量叠加,这样就得到了空间的电场分布。

静电场的数值计算方法近年来发展很快,除了对上述三种方法在解题技巧、计算准确度和应用范围方面有很多改进和扩展外,还发展了一些其它方法。例如以统计试验作手段的蒙特卡洛法在60年代后期开始应用于求解电场问题。又如70年代后期出现了综合几种方法、取长补短的复合法。随着计算技术、电磁场理论、高电压技术的发展,在静电场数值计算这一技术领域中,也将会不断取得新的进展。

第一章 有限差分法

有限差分法是出现较早的一种电场数值计算方法。它是把连续场域内的问题变换为离散系统的问题,通过离散点的数值解来逼近连续场域内的真实解。更具体地说,有限差分法是以差分原理为基础的一种电场数值计算方法,通过用各离散节点上电位函数的差商来近似代替泊松方程中的偏导数,从而得到一组差分方程。这样,求解泊松方程就转化为求代数方程组的解,求解连续的电位函数转变为求有限数量节点上的电位值,从而近似地得到电场的空间分布。

第一节 二维场的有限差分法

均匀介质中,场域内各处电位满足泊松方程 $\nabla^2\varphi=-\rho/\varepsilon$ 。二维场中泊松方程的形式为

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

式中 φ ——电位;

ρ ——空间电荷密度;

ε ——介电常数。

为了将上述偏微分方程转化为一组差分方程,必须将连续场域变换为离散系统。连续场域的离散化是通过将场域划分为网格来实现的。为简单起见,先讨论二维场中的正方形网格。

一、差分方程

将需要计算的二维场域划分成若干正方形网格,如图1-1所示。网格线的交点,如点P、E、N、W、S,称为节点。网格的线间距离(即网格的边长)称为步距 h 。通常 h 应远小于所求电场空间的尺寸。对于正方形网格,显然所有的步距都相等,所以正方形网格也称为等步距网格。

设场域中任一节点P(x_p, y_p)的电位为 φ_p ,则在通过节点P且平行于 x 轴的直线上,P点附近某点(x, y)的电位 φ 可按泰勒公式表达为

$$\begin{aligned}\varphi = \varphi_p &+ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_p(x-x_p) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_p(x-x_p)^2 \\ &+ \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}\right)_p(x-x_p)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}\right)_p(x-x_p)^4 \\ &+ \dots\end{aligned}$$

式中下标P表示各函数在P点的取值。

由上式,节点E及W的电位 φ_E 、 φ_W 分别为

$$\begin{aligned}\varphi_E &= \varphi_P + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_P h + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_P h^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}\right)_P h^3 \\ &\quad + \frac{1}{24} \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}\right)_P h^4 + \dots \\ \varphi_W &= \varphi_P - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_P h + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_P h^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}\right)_P h^3 \\ &\quad + \frac{1}{24} \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}\right)_P h^4 - \dots\end{aligned}$$

将上两式相加，得

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_P = \frac{\varphi_E + \varphi_W - 2\varphi_P}{h^2} - \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}\right)_P - \dots$$

考虑到 h 的值较小，如果忽略上式中 $-\frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}\right)_P$

及以后各项，就得到了 $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_P$ 的差商表达式

$$\frac{(\varphi_E - \varphi_P)/h - (\varphi_P - \varphi_W)/h}{h} = \frac{\varphi_E + \varphi_W - 2\varphi_P}{h^2}$$

根据同样道理，可得

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_P = \frac{\varphi_N + \varphi_S - 2\varphi_P}{h^2} - \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}\right)_P - \dots$$

而 $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_P$ 的差商表达式为

$$\frac{(\varphi_N - \varphi_P)/h - (\varphi_P - \varphi_S)/h}{h} = \frac{\varphi_N + \varphi_S - 2\varphi_P}{h^2}$$

将 $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_P$ 及 $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_P$ 的值代入泊松方程，即

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_P + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_P = -\frac{\rho_P}{\varepsilon}$$

可求得

$$\begin{aligned}\varphi_P &= \frac{\varphi_E + \varphi_N + \varphi_W + \varphi_S + \rho_P h^2 / \varepsilon}{4} \\ &\quad - \frac{h^4}{48} \left[\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}\right)_P + \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}\right)_P \right] - \dots\end{aligned}$$

如果将 $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_P$ 及 $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_P$ 的差商表达式代入泊松方程，则 φ_P 的差分表达式为

$$\varphi_P = \frac{\varphi_E + \varphi_N + \varphi_W + \varphi_S + \rho_P h^2 / \varepsilon}{4} \quad (1-1-1)$$

式中 ρ_P ——节点 P 附近空间电荷密度的平均值。

对比以上两个 φ_P 的计算公式可知，用函数的差商代替偏导数求得的电位值，其误差项为 $-\frac{h^4}{48} \left[\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}\right)_P + \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}\right)_P \right] - \dots$ 。为了减小计算误差，步距 h 应选得足够小。

式 (1-1-1) 也可改写为更一般的形式

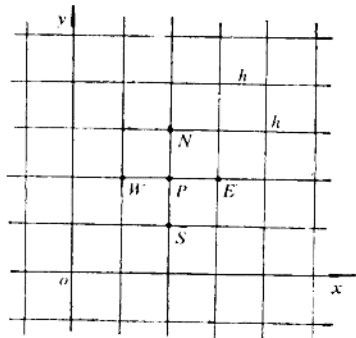


图 1-1 二维场中的正方形网格

$$\varphi_P = \frac{k_E \varphi_E + k_N \varphi_N + k_W \varphi_W + k_S \varphi_S + \rho_P h^2 / \varepsilon}{k_P} \quad (1-1-2)$$

式中 k_E, k_N, k_W, k_S, k_P ——系数，而且 $k_E = k_N = k_W = k_S = 1$ ； $k_P = k_E + k_N + k_W + k_S = 4$ 。

由式(1-1-2)可知，对任一节点 P ，可写出包含节点 P 及正方形网格中近邻各节点电位的线性代数方程。

若 $\rho_P = 0$ ，则相应于拉普拉斯方程 $\nabla^2 \varphi = 0$ 的差分表达式为

$$\varphi_P = \frac{k_E \varphi_E + k_N \varphi_N + k_W \varphi_W + k_S \varphi_S}{k_P} \quad (1-1-3)$$

式中 k_E, k_N, k_W, k_S 及 k_P ——系数，意义同式(1-1-2)。

由式(1-1-3)可知，当空间电荷密度为零时，二维场内任一节点的电位是正方形网格中近邻4个节点电位的平均值。

为了求解给定的电场边值问题，除了在场域内对上述偏微分方程进行差分离散化外，还必须对边界条件进行离散化处理。对最常见的第一类边值 $\varphi|_C = f(S)$ [C 为边界， $f(S)$ 是边界点 S 的点函数]，且若划分网格时有关节点恰好与边界线 C 重合，则可将边界上各点的电位函数 $f(S)$ 的值直接赋予相应的边界节点，即边界节点的电位为已知数。

下面以平行平板电极间电场(见图1-2)为例，来说明上述联系各节点电位的线性代数方程组的建立。先将计算场域划分为一些正方形网格，根据边界条件，左边电极上4个节点的电位为100V，右边电极上4个节点的电位为0V；将上、下两端的节点(A 及 B)电位先按均匀电场考虑，暂定为50V；而其它节点(1、2、3、4)的电位是待求未知量。

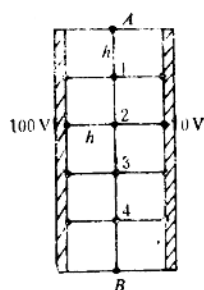


图 1-2 平板电极间电场的网格划分

由式(1-1-3)可写出节点1、2、3、4的电位为

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{4} \varphi_2 + \frac{150}{4} \\ \varphi_2 &= \frac{1}{4} \varphi_1 + \frac{1}{4} \varphi_3 + \frac{100}{4} \\ \varphi_3 &= \frac{1}{4} \varphi_2 + \frac{1}{4} \varphi_4 + \frac{100}{4} \\ \varphi_4 &= \frac{1}{4} \varphi_3 + \frac{150}{4} \end{aligned} \right\} \quad (1-1-4)$$

整理后，得

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.25 & 0 & 0 \\ -0.25 & 1 & -0.25 & 0 \\ 0 & -0.25 & 1 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37.5 \\ 25 \\ 25 \\ 37.5 \end{bmatrix} \quad (1-1-5)$$

这样，对于具有4个未知电位节点的场域，写出了包含 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ 的4个线性代数方程。

一般地说，对于具有 n 个未知电位节点的场域，可写出 n 个包含这些未知电位的线性代数方程，这些方程称为差分方程。用矩阵形式表达，即

$$[D][\Phi] = [B] \quad (1-1-6)$$

式中 $[\Phi]$ ——待求节点电位列向量;

$[D]$ ——系数矩阵;

$[B]$ ——自由项列向量。

二、差分方程的求解

1. 高斯消去法

如式(1-1-5)所示的差分方程是线性代数方程,可应用高斯消去法求解,得

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 50\text{V}$$

场域边界节点的电位值是计算的原始数据,关系到计算结果的准确度,必须认真确定。上例中,若将边界节点A及B的电位定为40V,可解得

$$\varphi_1 = \varphi_4 = 47.27\text{V}$$

$$\varphi_2 = \varphi_3 = 49.09\text{V}$$

与准确值50V有一定偏差;离不符合实际的边界越近,误差越大。

为使计算结果准确可靠,步距 h 不能取得太大。这样,节点数就会增多,差分方程的方程数目也随之增加。考虑到差分方程的特点,这时用迭代法来求解比用高斯消去法更为有利。

2. 简单迭代法

式(1-1-6)中系数矩阵 $[D]$ 是一稀疏阵,在它的每一行中最多只有5个非零元素,对这样的方程组用高斯消去法并不合算。差分方程组中的每一个方程式[见式(1-1-2)],因 k_g/k_p 、 k_N/k_p 、 k_w/k_p 及 k_s/k_p 均小于1,满足收敛条件,所以可采用迭代法来计算各节点电位。仍以上述平行平板电极间电场为例来说明迭代法。

前面已经导得了节点1、2、3、4电位的表达式[式(1-1-4)]。用迭代法求解方程组时,先假定一组 φ_1 、 φ_2 、 φ_3 、 φ_4 值作为初值代入式(1-1-4)中各方程等号的右侧,从而算出各节点的电位值。由于所假定的初值并不符合实际情况,因此算得的各节点电位是一些近似值,我们称之为第一次近似值。显然,第一次近似值可能会与实际情况相差较多,所以还应继续进行计算。每计算一次,所得结果与准确解就接近一些,而且相继两次所得结果最大差值的绝对值也会小一些。迭代将一直进行下去,直至相继两次所得结果最大差值的绝对值小于预先规定的某一数值时,迭代结束,这样也就得到了节点电位比较可靠的近似值。表1-1列出了各次迭代计算的结果(迭代初值选为零)。

用迭代法计算上述简单实例,计算过程似乎比用高斯消去法更麻烦。但当节点数很多,用电子计算机进行计算时,由于迭代法占用的机器存储容量较高斯法少,它的优点就很明显了。

上述迭代方法称为简单迭代法,它的收敛速度较慢。为了提高收敛速度和进一步减少所需计算机存储容量,可采用另一种迭代方法——赛德尔迭代法。

3. 赛德尔迭代法

在简单迭代法中,节点P电位的第 $(i+1)$ 次计算值 $\varphi_P^{(i+1)}$ 是正方形网格中P点近邻4个节点电位第 i 次值 $\varphi_E^{(i)}$ 、 $\varphi_N^{(i)}$ 、 $\varphi_W^{(i)}$ 、 $\varphi_S^{(i)}$ 的函数。实际上,各节点的电位是按自上而下、

自左至右的顺序，依次进行计算的。在计算 $\varphi_P^{(i+1)}$ 时，已有第 $(i+1)$ 次的 $\varphi_V^{(i+1)}$ 、 $\varphi_W^{(i+1)}$ 的计算值。显然，对这些近邻节点电位，如改用其第 $(i+1)$ 次的计算值来参与计算 $\varphi_P^{(i+1)}$ ，将会提高收敛速度。对于这样的迭代方法，我们称之为赛德尔迭代法。表1-2是对图1-2所示平板电极电场采用赛德尔迭代法的计算结果。比较表1-1及表1-2可知，用简单迭代法需经15次迭代方得所需结果，而采用赛德尔迭代法只需9次迭代即可。

表 1-1 简单迭代法的计算结果 (单位: V)

迭代次数	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	37.5	25	25	37.5
2	43.75	40.625	40.625	43.75
3	47.6562	46.0937	46.0937	47.6562
4	49.0234	48.4375	48.4375	49.0234
5	49.6094	49.3652	49.3652	49.6094
6	49.8413	49.7437	49.7437	49.8413
7	49.9359	49.8962	49.8962	49.9359
8	49.9741	49.9580	49.9580	49.9741
9	49.9895	49.9830	49.9830	49.9895
10	49.9958	49.9931	49.9931	49.9958
11	49.9983	49.9972	49.9972	49.9983
12	49.9993	49.9989	49.9989	49.9993
13	49.9997	49.9995	49.9995	49.9997
14	49.9999	49.9998	49.9998	49.9999
15	50.0	50.0	50.0	50.0
16	50.0	50.0	50.0	50.0

表 1-2 赛德尔迭代法的计算结果 (单位: V)

迭代次数	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	37.5	34.375	33.5937	45.8984
2	46.0937	44.9219	47.7051	49.4263
3	48.7305	49.1089	49.6338	49.9084
4	49.7772	49.8528	49.9403	49.9851
5	49.9632	49.9759	49.9902	49.9976
6	49.9940	49.9961	49.9984	49.9996
7	49.9990	49.9994	49.9997	49.9999
8	49.9998	49.9999	50.0	50.0
9	50.0	50.0	50.0	50.0

除了收敛较快之外，赛德尔迭代法的另一优点是：它所需计算机的存贮容量较简单迭代法要少。对具有 n 个未知电位节点的网格，简单迭代法需要 $2n$ 个位置来存贮 n 个节点的第 i 次及第 $(i+1)$ 次的电位值，而赛德尔迭代法只需 n 个位置来存贮 n 个节点的第 i 次或第 $(i+1)$ 次的电位值即可。

4. 超松弛迭代法

为了进一步提高收敛速度, 可以采用超松弛迭代法。

对节点 P, 可以采用赛德尔迭代法来计算它的第 $(i+1)$ 次电位计算值 $\varphi_P^{(i+1)}$ 。如果用 $R_P^{(i)}$ 表示 $\varphi_P^{(i+1)}$ 与 $\varphi_P^{(i)}$ 相比的增量, 则可得如下表达式

$$\varphi_P^{(i+1)} = \varphi_P^{(i)} + R_P^{(i)}$$

为了加速收敛, 根据矫正过正的想法, 引入一个大于 1 的系数 α 来修正上式, 得到修正后的第 $(i+1)$ 次 φ_P 值为

$$\varphi_P^{(i+1)} = \varphi_P^{(i)} + \alpha R_P^{(i)} \quad (1-1-7)$$

这样的迭代方法称为超松弛迭代法。式 (1-1-7) 中, $R_P^{(i)} = \varphi_P^{(i+1)} - \varphi_P^{(i)}$, 其中 $\varphi_P^{(i+1)}$ 是未修正的第 $(i+1)$ 次 φ_P 的计算值。

式 (1-1-7) 中的 α 称为松弛因子, 它影响迭代解的收敛速度。在超松弛迭代法中, 实际上它是一个加速收敛因子。当 $\alpha = 1$ 时, 迭代即按赛德尔迭代法进行, 它一般是收敛的; 当 $\alpha = 2$ 时, 迭代过程将不收敛而发散。所以, 在超松弛迭代法中 α 的取值范围是 $1 < \alpha < 2$ 。

图 1-3 所示是中心有一条扁导线的正菱形管道中的电位分布图。导线电位为 5V, 管壁电位为 0V。由于图形对称, 只需计算四分之一场域的电位分布即可。场域内节点电位的初始值可取为导线电位的一半, 即 2.5V。迭代直至每个节点电位相邻两次迭代值差值的绝对值全都小于 5×10^{-4} V 时才停止。附录中列出了超松弛迭代法的计算程序。

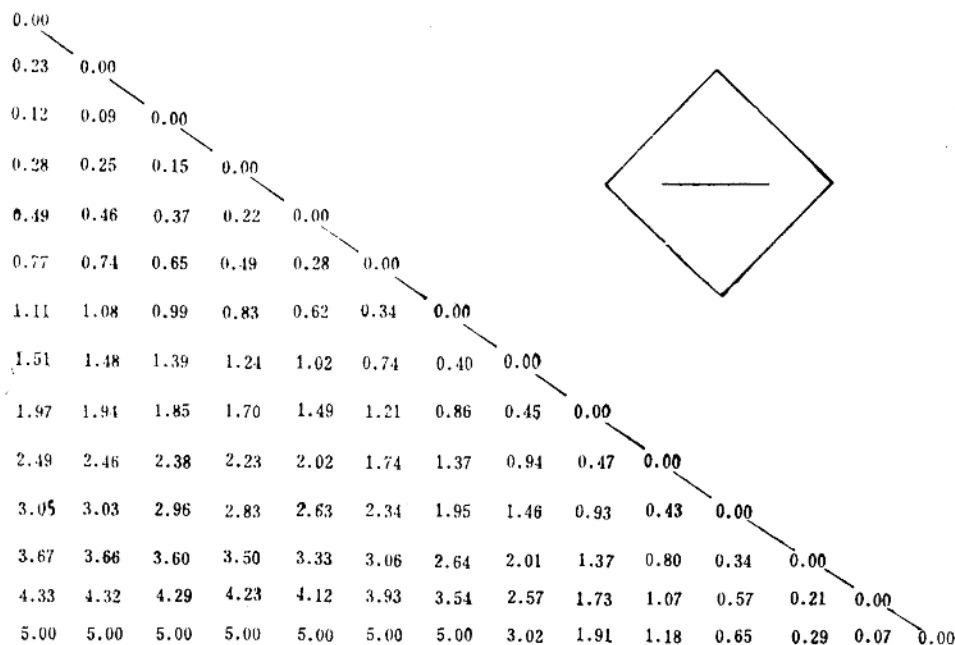


图 1-3 正菱形管道中的电位分布

表1-3给出了正菱形管道中电位分布计算的迭代次数与松弛因子的关系。可以看到, 松弛因子值对迭代收敛性的影响是十分明显的。在网格节点数很多时, 采用最佳松弛因子值, 可大大节约计算机计算时间。前面已经讲过, α 的取值范围是 $1 < \alpha < 2$, 而最佳的松弛因子值则随不同的边值问题而异。对第一类边值问题, 具有 $u \times v$ 个节点的正方形网格, 最佳松弛因子

$$\alpha_0 = 2 - \sqrt{2} \pi \sqrt{\frac{1}{(u-1)^2} + \frac{1}{(v-1)^2}} \quad (1-1-8)$$

根据经验, 式(1-1-8)中的 u 和 v 一般应大于15。更一般的情况下, 最佳松弛因子 α_0 只能依靠经验取值。

表 1-3 迭代次数与松弛因子的关系

松弛因子	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	简单迭代法
迭代次数	68	57	47	38	30	23	20	34	47	89	发散	155

三、介质分界面的差分方程

实际问题中, 常常会遇到两种介质分界面的情况。如图1-4所示是介质分界面附近的正方形网格, 节点 W 位于介质 a 中, 节点 E 位于介质 b 中, 而节点 P 、 N 、 S 则位于这两种介质的分界面上。现在需要知道 φ_P 与相邻4个节点电位之间的关系。

设节点 P 附近介质 a 和 b 中分别有空间平均电荷密度 ρ_{aP} 和 ρ_{bP} , 且以 φ_a 和 φ_b 分别表示介质 a 和 b 中的电位函数。

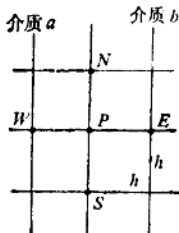
若将场域中介质 b 的那一部分换成介质 a , 对于 P 点, 参照式(1-1-1), 可得

$$\varphi_{aE} + \varphi_{aN} + \varphi_{aW} + \varphi_{aS} - 4\varphi_{aP} + \rho_{aP}h^2/\epsilon_a = 0$$

同理, 若将场域中介质 a 的那一部分换成介质 b , 则对于 P 点, 可得

$$\varphi_{bE} + \varphi_{bN} + \varphi_{bW} + \varphi_{bS} - 4\varphi_{bP} + \rho_{bP}h^2/\epsilon_b = 0$$

在两种介质的分界面上, 电位以及电通量密度的法向分量连续, 因此有下列关系



$$\varphi_{aP} = \varphi_{bP} = \varphi_P$$

$$\varphi_{aN} = \varphi_{bN} = \varphi_N$$

$$\varphi_{aS} = \varphi_{bS} = \varphi_S$$

及

$$\epsilon_a E_{an} = \epsilon_b E_{bn}$$

对于后式, 可以用差分形式表达为

$$\epsilon_a \frac{\varphi_{aE} - \varphi_{aW}}{2h} = \epsilon_b \frac{\varphi_{bE} - \varphi_{bW}}{2h}$$

实际上, φ_{aE} 及 φ_{bW} 并不存在。由以上各式, 消去 φ_{aE} 和 φ_{bW} , 可得

$$\varphi_P = \frac{k_E \varphi_E + k_N \varphi_N + k_W \varphi_W + k_S \varphi_S + \frac{\rho_{aP} + \rho_{bP}}{2} h^2}{k_P} \quad (1-1-9)$$

式中 k_E, k_N, k_W, k_S, k_P ——系数, $k_E = \varepsilon_a$, $k_N = (\varepsilon_a + \varepsilon_b) / 2$, $k_W = \varepsilon_a$, $k_S = (\varepsilon_a + \varepsilon_b) / 2$,
 $k_P = k_E + k_N + k_W + k_S = 2(\varepsilon_a + \varepsilon_b)$.

如果两种介质中都不存在空间电荷, 则 $\rho_{sp} = \rho_{sb} = 0$, 得到相应于拉普拉斯方程的差分表达式为

$$\varphi_P = \frac{k_E \varphi_E + k_N \varphi_N + k_W \varphi_W + k_S \varphi_S}{k_P} \quad (1-1-10)$$

式中 k_E, k_N, k_W, k_S 及 k_P ——系数, 意义同 (1-1-9) 式。

由式 (1-1-9) 及式 (1-1-10) 可知, 介质分界面处的差分方程也是包含有关节点电位的线性代数方程。

四、不等步距网格的差分方程

以上介绍了等步距网格的差分方程。实际上, 场域边界不一定与等步距网格的有关节点重合。为使节点落在边界上, 此处步距有可能与其它地方的步距不等, 这就出现了不等步距网格。另一方面, 为了提高计算的准确度, 场域中电场强度较大或我们最感兴趣的地方网格应密些, 其它地方的网格则可以稀些。这样, 也将出现不等步距网格。

图1-5所示是不等步距网格的节点图。对于这样的网格, 根据泰勒公式并略去高次项后, 可以写出

$$\varphi_E = \varphi_P + h_E \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_P + \frac{h_E^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_P$$

$$\varphi_W = \varphi_P - h_W \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_P + \frac{h_W^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_P$$

由此两式, 消去 $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_P$, 得

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_P = \frac{2\varphi_E}{h_E(h_E + h_W)} + \frac{2\varphi_W}{h_W(h_E + h_W)} - \frac{2\varphi_P}{h_E h_W}$$

同理, 可得

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_P = \frac{2\varphi_N}{h_N(h_N + h_S)} + \frac{2\varphi_S}{h_S(h_N + h_S)} - \frac{2\varphi_P}{h_N h_S}$$

代入泊松方程, 并整理后得

$$\varphi_P = \frac{k_E \varphi_E + k_N \varphi_N + k_W \varphi_W + k_S \varphi_S + \frac{\rho_P}{\varepsilon} \cdot \frac{h_E + h_W}{2} \cdot \frac{h_N + h_S}{2}}{k_P} \quad (1-1-11)$$

式中 k_E, k_N, k_W, k_S, k_P ——系数, $k_E = \frac{h_N + h_S}{2h_E}$, $k_N = \frac{h_E + h_W}{2h_N}$, $k_W = \frac{h_N + h_S}{2h_W}$, $k_S = \frac{h_E + h_W}{2h_S}$,
 $k_P = k_E + k_N + k_W + k_S = \frac{1}{2} (h_E + h_W)(h_N + h_S)$
 $\times \left(\frac{1}{h_E h_W} + \frac{1}{h_N h_S} \right)$.

若 $\rho_P = 0$, 则相应于拉普拉斯方程的差分表达式为

$$\varphi_P = \frac{k_E \varphi_E + k_N \varphi_N + k_W \varphi_W + k_S \varphi_S}{k_P} \quad (1-1-12)$$

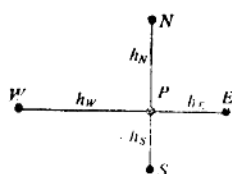


图 1-5 不等步距网格的节点

式中 k_E, k_N, k_W, k_S 及 k_P ——系数, 意义同式 (1-1-11)。

由式 (1-1-11) 及式 (1-1-12) 可知, 不等步距网格的差分方程也是包含有关节点电位的线性代数方程。

五、第二类边值问题的差分方程

上面已经分析了第一类边值问题边界条件的离散化处理, 现在讨论第二类边值问题

$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_C = f(S)$ [C 为边界, $f(S)$ 为边界点 S 的点函数] 边界条件的离散化处理。为简化计算,

假设空间电荷密度为零, 并分两种情况进行分析。

1. 边界 C 上节点 P 处的法线平行于坐标轴

图 1-6 中边界节点 P 处的法线平行于 x 轴, 法线上 P 点附近的两个节点为 P_1, P_2 。

若 $\overline{PP_1} = \overline{P_1P_2} = h$, 则对 P_1 点可写出

$$\varphi_{P_1} = \varphi_P + h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_P + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_P$$

及

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_P = \frac{\varphi_P + \varphi_{P_1} - 2\varphi_{P_2}}{h^2}$$

当步距 h 较小时, 认为 $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_P \approx \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{P_1}$, 则由图 1-6 及以上各式可得

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_P &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_P \\ &= \frac{-\frac{3}{2}\varphi_P + 2\varphi_{P_1} - \frac{1}{2}\varphi_{P_2}}{h} \end{aligned} \quad (1-1-13)$$

若图 1-6 中 $\overline{PP_1} \neq \overline{P_1P_2}$, 设 $\overline{PP_1} = qh$, $\overline{P_1P_2} = h$, 则对 P_1 可以写出

$$\varphi_{P_1} = \varphi_P + qh \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_P + \frac{1}{2}qh^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_P$$

整理后得

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_P = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_P = \frac{\varphi_{P_1} - \varphi_P}{qh} - \frac{1}{2}qh \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_P$$

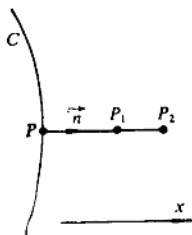


图 1-6 边界节点法线平行于坐标轴

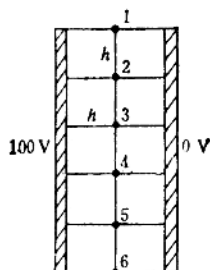


图 1-7 平行平板电极

由于

$$\begin{aligned}\varphi_{P_2} &= \varphi_{P_1} + h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{P_1} + \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{P_1} \\ \varphi_P &= \varphi_{P_1} - qh \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{P_1} + \frac{1}{2} q^2 h^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{P_1}\end{aligned}$$

所以

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{P_1} = \frac{\varphi_P - (1+q)\varphi_{P_1} + q\varphi_{P_2}}{\frac{1}{2}q(1+q)h^2}$$

以 $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{P_1}$ 近似代替 $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_P$ 代入 $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_P$ 的表达式, 得

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_P = \frac{-\frac{1+2q}{1+q} \varphi_P + (1+q)\varphi_{P_1} - \frac{q^2}{1+q} \varphi_{P_2}}{qh} \quad (1-1-14)$$

根据式 (1-1-13) 或式 (1-1-14), 由已知的第二类边界上的 $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_P$ 值, 即可求得节点 P 电位 φ_P 与邻近各节点电位间的关系。 φ_P 与其它节点电位间仍然具有线性关系。

图 1-7 所示是一平行平板电极间电场, 它的一个电极电位为 100V, 另一个电极的电位为 0V。场域被划分为正方形网格, 节点 2、3、4、5 为场域内节点, 这 4 个节点电位与周围邻点电位的关系可根据式 (1-1-3) 写出; 节点 1、6 是第二类边界节点, 且 $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_0 = 0$, 这两个节点和周围节点电位的关系可根据式 (1-1-13) 写出。经整理后, 差分方程组为

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{4}{3} \varphi_2 - \frac{1}{3} \varphi_3 \\ \varphi_2 = \frac{1}{4} \varphi_1 + \frac{1}{4} \varphi_3 + 25 \\ \varphi_3 = \frac{1}{4} \varphi_1 + \frac{1}{4} \varphi_4 + 25 \\ \varphi_4 = \frac{1}{4} \varphi_3 + \frac{1}{4} \varphi_5 + 25 \\ \varphi_5 = \frac{1}{4} \varphi_4 + \frac{1}{4} \varphi_6 + 25 \\ \varphi_6 = \frac{4}{3} \varphi_5 - \frac{1}{3} \varphi_4 \end{cases}$$

用赛德尔迭代法求解上述差分方程, 所得结果列于表 1-4。

2. 边界 C 上节点 P 的法线与坐标轴的夹角为 θ

图 1-8 (a) 及 (c) 所示是边界节点 P 处法线与 y 轴夹角为 θ 的两种情况。

设边界节点 P 处电场强度为 $\vec{E}$, 它可分解为 $\vec{E}_n$ 及 $\vec{E}_t$, 也可分解为 $\vec{E}_x$ 及 $\vec{E}_y$ [图 1-8(b)]。

由图 1-8 (b) 可知

$$E_n = E_x \sin \theta + E_y \cos \theta$$

表 1-4

第二类边值问题的迭代结果

(单位: V)

迭代次数	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	0.0	25.0	31.25	32.8125	33.2031	33.3333
2	22.9167	38.5417	42.8385	44.0104	44.3359	44.4444
3	37.1094	44.9870	47.2493	47.8963	48.0852	48.1481
4	44.2329	47.8706	48.9417	49.2567	49.3512	49.3827
5	47.5135	49.1138	49.5926	49.7360	49.7797	49.7942
6	48.9542	49.6367	49.8432	49.9057	49.9250	49.9314
7	49.5679	49.8528	49.9396	49.9662	49.9744	49.9771
8	49.8238	49.9409	49.9768	49.9878	49.9912	49.9924
9	49.9289	49.9764	49.9910	49.9956	49.9970	49.9975
10	49.9715	49.9906	49.9966	49.9984	49.9990	49.9992
11	49.9887	49.9963	49.9987	49.9994	49.9996	49.9997
12	49.9955	49.9985	49.9995	49.9998	49.9999	49.9999
13	49.9982	49.9994	49.9998	49.9999	50.0	50.0
14	49.9993	49.9998	49.9999	50.0	50.0	50.0
15	49.9997	49.9999	50.0	50.0	50.0	50.0
16	49.9999	50.0	50.0	50.0	50.0	50.0
17	50.0	50.0	50.0	50.0	50.0	50.0

因此

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_p = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_p \sin \theta + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_p \cos \theta \quad (1-1-15)$$

对图1-8(a)所示情况, 考虑到式(1-1-13)及式(1-1-15), 可得

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_p = \frac{-\frac{3}{2}\varphi_F + 2\varphi_P, -\frac{1}{2}\varphi_{P_2}}{h} \sin \theta + \frac{-\frac{3}{2}\varphi_F + 2\varphi_P, -\frac{1}{2}\varphi_{P_4}}{h} \cos \theta \quad (1-1-16)$$

对图1-8(c)所示情况, 也应先求出 $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_p$ 及 $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_p$, 再由式(1-1-15)求得

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_p.$$

对于 $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_p$, 它可近似表达为

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_p \approx \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_P - ph \left[\frac{\Delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\Delta y} \right]_{P, P_1}$$

在此式中, $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_P$ 可参照式(1-1-13)写出

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_P = \frac{-\frac{3}{2}\varphi_F + 2\varphi_P, -\frac{1}{2}\varphi_{P_1}}{h}$$