经济应用数学

《经济应用数学》编写组

山东人民出版社

鲁新登字01号

经济应用数学

《经济应用数学》编写组

*

山东人民出版社出版发行

(济南经九路胜利大街)

山东新华印刷厂临沂厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 17.25印张 330千字

1993年6月第1版　1993年6月第1次印刷

印数1—10,000

ISBN7—209—01363—6
F·421　定价:9.80元

编审说明

本教材是根据山东省财税中专学校教学大纲审查领导小组1990年5月审定的《经济应用数学教学大纲》编写的，经审查，同意作为山东省财政(经)各类中等专业学校使用。

书中不足之处，请读者批评指正。

山东省财政(经)中专学校

教材编审委员会

1992年12月

前　言

本教材是参照1987年国家教委制定的中等专业学校数学教学大纲(财经类专业通用)和山东省财税中等专业学校经济应用数学教学大纲(二年制)编写的。供招收高中毕业生的二年制财经类中等专业学校各专业使用,也可作为招收初中毕业生的四年制财经类中专学校各专业后两个学期的教材。

由于考虑到越来越多的数学方法被现代经济科学所采用,财经类各专业的不同需要以及高中毕业生具有较高的数学接受能力等因素,在教材编写中,除紧密联系经济实际,尽力突出经济应用数学特色外,还在数学基础知识和经济数学方法的选材上具有一定的弹性,以便教师根据专业需要和教学实际作不同选择。

本教材由山东省财政厅教育处组织的《经济应用数学》教材编写组编写,第一、五、六章由青岛市财政学校张友梅编写,第二、三、四章由山东省财政学校王汝亮编写,第七、八章由山东省税务学校吴圣扬编写,第九、十、十一章由山东省烟台财政学校隋孟勋编写。吴圣扬任主编。

在编写过程中,曾得到有关单位和同志的大力支持和协

助，谨在此表示衷心感谢。由于编者的水平和经验有限，错误及不当之处在所难免，恳切希望广大读者批评指正。

编写组

一九九二年十二月

目　录

第一章 函 数

函数是高等数学中一个重要的基本概念，也是微积分研究的主要对象．本章在复习中学数学函数知识的基础上，进一步讨论函数的概念和性质以及初等函数的结构．最后介绍经济学中常见的几种函数，为学习以后各章打下基础．

§1—1 函 数

一、函数的概念

在中学教学中，我们已经知道，如果在某一变化过程中有两个变量 x 和 y，当变量 x 在某一变化范围内每取一个确定的值，按照某种对应关系，变量 y 都有唯一确定的值和它对应，那么变量 y 就是变量 x 的函数．

下面我们用集合的观点给出函数定义：

定义 如果 D 是一个非空实数集合，设有一个对应法则 f，使每一个 $x\in D$，都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数．记作

$$y=f(x),x\in D.$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量．

集合 D 称为函数的定义域，可记作 $D(f)$．

对于任一 $x_0\in D$ 所对应的 y 值，称为当 $x=x_0$ 时函数 $y=f(x)$ 的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

全体函数值的集合 $\{y|y=f(x),x\in D(f)\}$，称为函数 $y=f(x)$ 的值域. 记作 Z 或 $Z(f)$.

由函数的意义可知，定义域和对应法则是确定函数关系的两个决定性要素.

例 1 对应法则 $y=\log_a(-x^2)$ 是不是函数关系？

解 在对应法则 $y=\log_a(-x^2)$ 中，对任何实数 x，都不存在与之对应的 y 值，由于函数的定义域不能是空集，所以，对应法则 $y=\log_a(-x^2)$ 不是函数关系.

例 2 函数 $y=x$ 与函数 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是不是相同的函数？

解 $y=x$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数，而 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 的函数，因此，$y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是定义域不同的两个函数.

例 3 函数 $y=x$ 与函数 $y=\sqrt{x^2}$ 是不是相同的函数？

解 函数 $y=x$ 与函数 $y=\sqrt{x^2}$ 都是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 的函数，但其对应法则不同. 函数 $y=x$，当 $x\geqslant 0$ 时，$y\geqslant 0$；当 $x<0$ 时，$y<0$. 而函数 $y=\sqrt{x^2}$，不论 x 取何值，y 永远是非负实数，即 $y\geqslant 0$. 因此，它们是定义域相同，而对应法则不同的两个不相同的函数.

函数的定义域或值域可以用不等式，集合和区间三种形式表示. 通常以区间形式表示为主.

由于以后需要讨论函数在某一点附近的变化情况，下面我们介绍一种特殊区间——邻域．

设 x_0、δ 是两个实数，且 $\delta>0$，则实数集合

$$\{x \mid |x-x_0|<\delta,\delta>0\}$$

称为 x_0 的 δ 邻域，点 x_0 叫做这个邻域的中心，δ 叫做这个邻域的半径．

从几何上看，x_0 的 δ 邻域是数轴上一个以 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$．如图 1—1．

例如 $\{x \mid |x-2|<0.1\}$，即为以 2 为中心，以 0.1 为半径的邻域，也就是开区间 $(1.9,2.1)$．

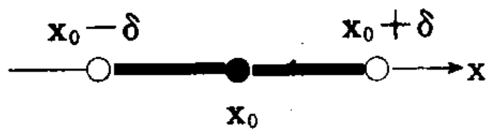

图 1—1

今后，我们还会遇到形如 $\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$ 的集合，这是一个不包含点 x_0 的邻域．即区间 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，称为以 x_0 为中心，δ 为半径的空心邻域．如图 1—2

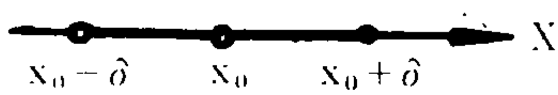

图 1—2

最后我们要指出，根据函数的定义，对于每一个 x 值 $(x\in D(f))$，按其对应法则都只有一个确定的 y 值与之对应．如果对于每一个 x 值 $(x\in D(f))$，有两个或两个以上的 y 值与之对应，按照前面函数的定义，应该说它不是一个函数关系，但为了方便起见，我们把这种对应关系称为多值函数关系．那么，前面的函数定义中的函数关系称为单值函数关系．例如，$y=x^2+1$ 是 x 的单值函数，$y=\pm\sqrt{2x}$ 是 x 的多值函数．如果

不做特别说明，本书提到的函数均指单值函数.

二、函数的表示法

表示函数的方法，最常用的有三种方法：列表法、图象法和解析法.

列表法是用表格表示函数的对应法则. 例如：价目表、利息表和许多会计报表都是用列表法表示函数的.

图象法是用平面直角坐标系中的几何图形表示函数的对应法则.

解析法也叫公式法，是用数学公式表示函数的对应法则. 例如，$y=2+3x$，$y=\ln(x^2-1)$，$y=\sin x$ 等.

在用解析法表示函数时，有些函数，例如，$y=x^2$，$y=\sqrt{a^2-x^2}$它们的因变量 y 是用自变量 x 的表达式直接表示出来的，这样的函数称为显函数. 而有些函数，它的因变量与自变量的对应法则是用一个方程 $F(x,y)=0$ 表示的，这样的函数称为隐函数. 例如，$Ax+By+C=0$（A、B 不同时为 0），$x^2+y^2=a^2$、$xe^y+ye^x=0$ 等. 对于隐函数，在根据具体情况确定了自变量和因变量后，有些可以化为显函数，例如 $x^2+y^2=a^2$；但并不是所有隐函数都能化为显函数，例如 $xe^y+ye^x=0$.

还有些函数，变量之间的对应法则不能用统一的一个公式表示出来，而是在函数定义域的不同部分用不同的数学表达式来描述.

例如，某市内公共汽车交通公司规定：1 站到 4 站，票价 0.10 元；5 站到 8 站，票价 0.20 元；9 站到 12 站，票价 0.30 元；13 站以上（包括 13 站）票价 0.40 元. 这时站数（x）和票价

(y)的函数关系可表示如下：

$$y=\begin{cases}0.10 & 1\leqslant x\leqslant 4\\ 0.20 & 5\leqslant x\leqslant 8\\ 0.30 & 9\leqslant x\leqslant 12\\ 0.40 & x\geqslant 13\end{cases}$$

又如，

$$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x & x>1\end{cases}$$

也是一个定义在$[0,+\infty)$的函数．

一般地，对于定义域内自变量的不同值，不能用统一的一个数学式子表示，而要用两个或两个以上的数学式子表示的函数，称为分段函数.

应当注意，分段函数是用几个数学式子表示一个函数，而不是表示几个函数.

例 4 用分段函数表示函数 $y=3-|x-2|$.

解 根据绝对值的定义可知

当 $x-2<0$ 时，即 $x<2$ 时，$|x-2|=-(x-2)$，

当 $x-2\geqslant 0$ 时，即 $x\geqslant 2$ 时，$|x-2|=x-2$，

因此有

$$y=\begin{cases}3+x-2 & x<2\\ 3-x(x-2) & x\geqslant 2\end{cases}$$

即

$$y=\begin{cases}x+1 & x<2\\ -x+5 & x\geqslant 2\end{cases}$$

其图形见图 1—3.

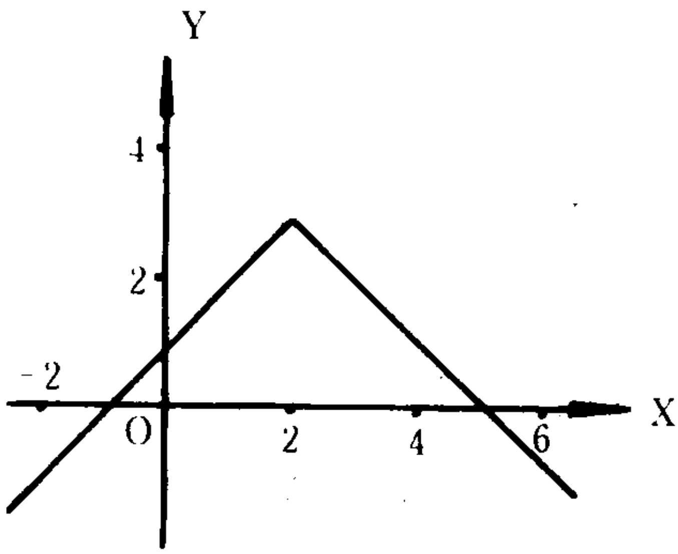

图 1—3

例 5 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+2 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x^2 & 1<x\leqslant 3\end{cases}$ 求 $f(\frac{1}{2})$；$f(2)$；$f(x-2)$.

解 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$；

$f(2)=2^2=4$；

$$f(x-1)=\begin{cases}(x-1)+2 & 0\leqslant x-1\leqslant 1\\ (x-1)^2 & 1<x-1\leqslant 3\end{cases}$$

即

$$f(x-1)=\begin{cases}x+1 & 1\leqslant x\leqslant 2\\ (x-1)^2 & 2<x\leqslant 4\end{cases}$$

例 6 我国规定个人收入调节税是根据个人收入来源分别按照超倍累进率计算征收，已知山东省个人应纳税额 T（元）与个人月综合收入额 x（元）之间的函数关系如下：

$$T=\begin{cases}0 & x\in(0,400] \\ 20\%\cdot x-80 & x\in(400,500] \\ 30\%\cdot x-130 & x\in(500,600] \\ 40\%\cdot x-190 & x\in(600,700] \\ 50\%\cdot x-260 & x\in(700,800] \\ 60\%\cdot x-340 & x\in(800,+\infty)\end{cases}$$

某单位 4 名职工的个人月综合收入额分别为 230 元，470 元，700 元和 950 元，求这 4 名职工应交纳税额．

解 当 $x=230$ 时，$T=0$

当 $x=470$ 时，$T=0.2\times470-80=14$

当 $x=700$ 时，$T=0.4\times700-190=90$

当 $x=950$ 时，$T=0.6\times950-340=230$.

所以这 4 名职工应交纳税额分别为 0 元，14 元，90 元和 230 元．

三、函数的基本性质

1 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$

(1) 如果对于所有 $x\in D(f)$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $y=f(x)$为奇函数．

(2) 如果对于所有 $x\in D(f)$，有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$为偶函数．

例如，$y=\sin x$ 和 $y=\sqrt[3]{x}$ 都是奇函数，$y=\cos x$ 和 $y=x^2$ 都是偶函数．

根据函数奇偶性的意义可以得到，奇函数的图形关于原

点对称，如图 1—4；偶函数的图形关于 y 轴对称，如图 1—5. 因此，它们的定义域是一个关于原点对称的区间.

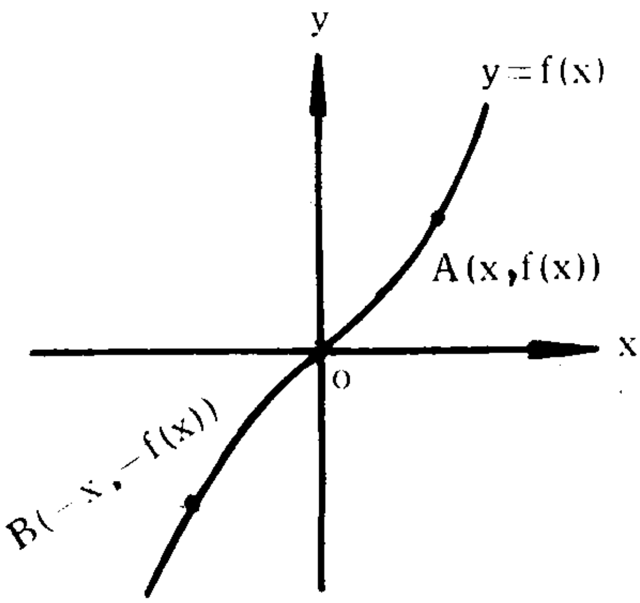

图 1—4

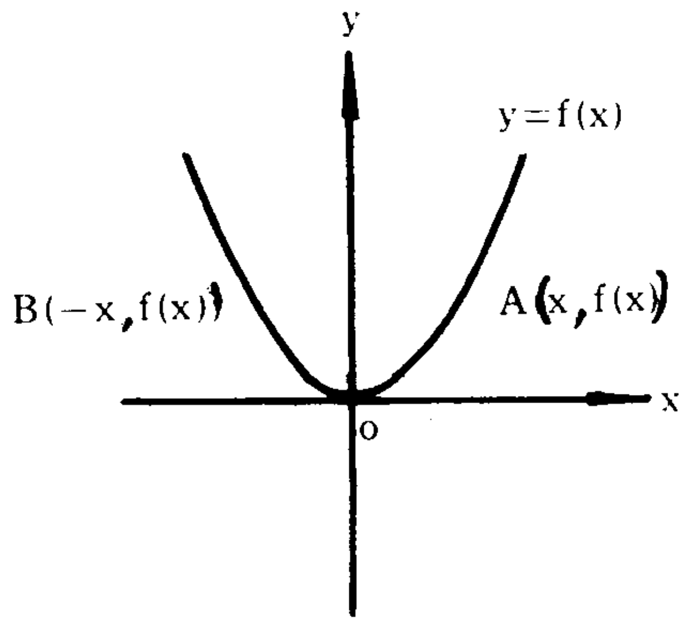

图 1—5

2　函数的单调增减性

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有定义，x_1,x_2 是 (a,b) 内任意两点，且 $x_1<x_2$.

(1)　如果 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调增加的（或单调增函数）；

(2)　如果 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调减少的（或单调减函数）.

单调增函数与单调减函数统称单调函数，区间 (a,b) 称为函数的单调区间.

单调区间可以是函数的整个定义域，也可以是定义域的一部分. 例如，一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的单调区间是它的定义域 $(-\infty,+\infty)$. 但是二次函数 $y=x^2+1$ 在 $(-\infty,0)$ 内