# 奥林匹克 数学

# 思维训练教材

主审：陈永高（中国数学奥林匹克队领队）

小学五年级

奥林匹克思维训练系列

知識出版社

# 奥林匹克数学思维训练教材

## 小学五年级

主审：陈永高（中国数学奥林匹克队领队）

知识出版社

策划设计：可一工作室
责任编辑：施苹善　王　秋

图书在版编目(CIP)数据
奥林匹克数学思维训练教材．小学五年级/崔恒兵，夏建国主编．北京：知识出版社，2002.6
ISBN 7-5015-3476-4

Ⅰ.奥…　Ⅱ.①崔…②夏…　Ⅲ.数学课-小学-教学参考资料　Ⅳ.G624.503
中国版本图书馆 CIP 数据核字　(2002)第 042727 号

编　　者：奥林匹克数学思维训练教材编写组
出版发行：知识出版社
(北京阜成门北大街 17 号　电话：88372203)
http://www.ecph.com.cn
印　　刷：安徽芜湖金桥印刷有限责任公司
经　　销：全国新华书店

版　　次：2002 年 6 月第 1 版
印　　次：2002 年 6 月第 1 次印刷
印　　张：5.25
开　　本：850×1168　1/32
字　　数：106 千字
ISBN 7-5015-3476-4/G·1854
定　　价：7.30 元

# 《奥林匹克思维训练教材》编委会

**主　审：**

**陈永高**　1962年3月出生，现为南京师范大学数学与计算机科学学院教授、博士生导师。主要从事数论方面的研究，在国内外核心期刊上发表论文40多篇。曾主持霍英东教育基金项目一项和国家自然科学基金项目一项；正承担国家自然科学基金一项。曾到匈牙利、印度等国家和中国香港地区进行合作研究和访问。2000年和2001年先后担任中国数学奥林匹克队副领队和领队，带队参加在韩国举办的第41届和在美国举办的第42届国际数学奥林匹克比赛，均获团体总分第一，参赛队员均获金牌。

**主　编：**

**霍恒兵**　1969年11月生，现为南京师范大学数学与计算机科学学院讲师，南京数学会副秘书长。从事数学奥林匹克竞赛与研究多年。曾编写"中小学数学奥林匹克教材"、《"华杯赛"集训题典》。

**副主编：**

**夏建国**　1963年9月生，博士后，现为南京师范大学数学与计算机科学学院副教授、硕士生导师。主要从事Tits几何方面的研究，正承担国家自然科学基金一项。从事数学奥林匹克竞赛与研究多年。

**本册主编：**金树泽

# 前　言

陈永高

数学被人们喻为思维训练的体操，对培养学生的个性、发展学生的智能有着极其重要的作用。很多学生从小就非常喜欢数学，希望在数学方面能得到良好的教育和引导，并力求有较好的发展。为满足广大数学爱好者的求知欲望，推广和普及数学奥林匹克教育和教学工作，各种数学兴趣培训班应运而生。这类培训以培养兴趣、拓宽思路、提高能力、开发智力为宗旨，受到老师、家长的普遍欢迎，取得较好的社会效果。

"南师大少年科技培训中心"（原南师大奥林匹克学校）就是由南京师范大学于1990年创办、以数学兴趣培训为主的一所培训机构，由著名数学家、博士生导师、前任国家奥林匹克总教练单墫教授和我一起担任培训中心顾问，由我们南师大数学系中青年骨干教师担任主讲。经过十多年的教学研究，培养了一批又一批优秀学生，其中大多被重点中学"理科实验班"或"数学实验班"免试录取，并在"华杯赛"、"小数赛"等各类比赛中取得优异成绩。为了帮助各类培训班提供一套难易适中，集知识性、趣味性、科学性、选拔性于一体的培训教材，本套《奥林匹克数学思维训练教材》由那些在"南师大少年科技培训中心"任教十多年的教师编写，内容多数是由授课时的讲稿整理而成，非常实用。这套系列教材从小学一年级至初中三年级，立足于学生的基础知识，着眼培养学生的灵活运用知识的能力，以思维训练为核心，以浅近的内

容、活泼多样的形式，渗透了现代数学的基本思想，力求覆盖面广、趣味性强。考虑学生的认知规律，每个年级分二十讲左右，每讲包含知识要点、例题选讲、小结、课后练习。例题力求典范、新颖、独特，解法力求简练、灵活、别致，着眼于提高学生的解题能力和数学思维能力，练习有详细解答，便于学生自学自练，也便于教师及家长辅导学生。为了不加重学生负担，本套教材前后虽有一定的连贯性，但每册又自成体系，每讲篇幅少、内容精，按每周学习两课时，一学年学完。

本套教材与目前奥林匹克图书市场上名牌教材《华罗庚数学奥林匹克教材》(由知识出版社出版、前任国家奥林匹克总教练单墫主编)，堪称姊妹篇，有不少作者同时是这两套书的编者或编委。比较而言，《华罗庚数学奥林匹克教材》相对难些，对学生的要求相对高些，比较适合竞赛和强化班使用；本套《数学奥林匹克思维训练教材》则在内容和难易程度上更贴近一般学生，贴近小学数学课的常规教学，力求基础知识和竞赛能力双“丰收”，因此特别适合学校或社会上各种奥林匹克培训班作为教材使用。两套教材互为补充，相得益彰，全方位地展示了奥林匹克数学的特殊魅力，让学生从中感受到美感和动力，从而喜欢数学、迷恋数学。条件许可的情况下，两套书可配合使用，则会收到事半功倍的效果。

本套教材在编写过程得到许多从事一线教学的特高级教师和专门从事数学奥林匹克竞赛的领队和教练的帮助和支持，在此，一并致以衷心的感谢。最后，愿广大师生及家长喜欢这套教材，希望本套教材在培养学生数学能力和提高学习兴趣方面有所作为，这是我们为提高全民族素质所尽的一点微薄之力。

(陈永高主审系全国著名年轻数学家、南师大数学系博士生导师、中国数学奥林匹克队领队)

# 目　录

# 第一讲　多边形的内角和

多边形内角和等于 $180° \times$ (边数 $-2$)。

我们知道，三角形的 3 个内角的和等于 180°，我们自然要问，四边形、五边形、更多边数的多边形，它们的内角和又是多少呢?

假如能把四边形划分成三角形的话，那么求四边形内角和的问题就转化为求三角形内角和的问题。怎样划分呢?

如图 1-1，我们将四边形相对的顶点 $A$ 和 $C$ 连接起来，则 $AC$ 把四边形 $ABCD$ 划分为三角形 $ACD$ 和三角形 $ABC$。显然，四边形 $ABCD$ 的四个内角和就等于这两个三角形内角和的和，也就是 $180° \times 2 = 360°$

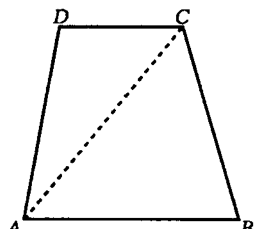


图 1-1

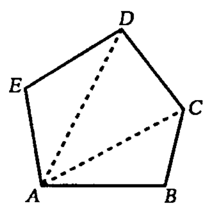


图 1-2

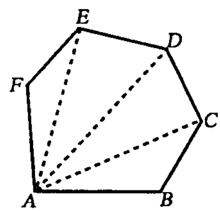


图 1-3

五边形的内角和等于多少呢?如图 1-2，与求四边形内角和的做法相同，连接 $AC$、$AD$，这两条对角线就把五边形分为 3 个三角形。因此，五边形的内角和等于 3 个三角形内角和的和，即 $180° \times 3 = 540°$。

同样道理，对于图 1-3 中的六边形 $AC$、$AD$、$AE$ 这三条对角线将它分成 4 个三角形，因而，六边形的内角和等于 4 个三角形的内角和，即 $180° \times 4 = 720°$。由此，我们发现：多边形的内角和 $= 180° \times$ (边数 $-2$)

【例1】 计算：

1. 152 边形内角和是多少？

2. 2002 边形内角和是多少？

【解】 根据多边形内角和公式，我们不必将多边形画出即可求出其内角和的度数。

1. 152 边形的内角和是

$$180° \times (152-2) = 27000°$$

2. 2002 边形的内角和为

$$180° \times (2002-2) = 360000°$$

【例2】 已知一个四边形的一个内角是 40°，第二个内角是第一个内角的一半，第三个内角是第二个内角的 3 倍，求第四个内角。

【分析与解】 易求得四边形的内角和为 360°，若能求出前三个内角的度数，则容易求出第四个内角。而第一个内角为 40°，所以第二个内角为 $40° \div 2 = 20°$，第三个内角为 $20° \times 3 = 60°$，从而第四个内角为

$$360° - (40° + 40° \div 2 + 40° \div 2 \times 3) = 240°$$

【例3】 如图 1－4，已知五边形 $ABCDE$，$F$ 是 $AE$ 的延长线与 $CD$ 延长线的交点，$\angle A = \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{3}\angle C$，$\angle FED = 55°$，$\angle FDE = 65°$，求 $\angle A$ 的度数。

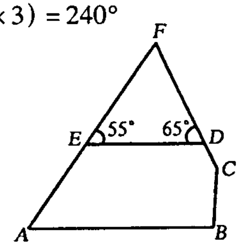

图 1－4

【分析与解】 五边形 $ABCDE$ 的内角和是 540°，要求 $\angle A$ 的度数，我们只要能求出 $\angle AED$ 及 $\angle EDC$ 的度数之和即可。显然 $\angle AED = 180° - \angle FED = 180° - 55° = 125°$，而 $\angle EDC = 180° - \angle EDF = 180° - 65° = 115°$，因而，$\angle A + \angle B + \angle C = 180° \times (5-2) - (125° + 115°) = 540° - 240° = 300°$

由$\angle A=\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{3}\angle C$知，$\angle B=2\angle A$，$\angle C=3\angle A$可得

$\angle A+\angle B+\angle C=6\angle A=300°$，所以$\angle A=50°$

答：$\angle A$的度数为50°。

【例4】 如图1－5所示，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，求$\angle 5$。

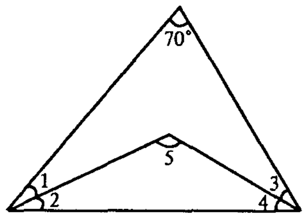


图1－5

【解】 因为$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180°-70°$，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，

所以$2\angle 2+2\angle 4=110°$，$\angle 2+\angle 4=110°\div 2=55°$

从而$\angle 5=180°-(\angle 2+\angle 4)=180°-55°=125°$

答：$\angle 5$的度数为125°。

【例5】 在$\triangle ABC$中，$D$、$E$是$BC$边上的点，$BD=AB$，$CE=AC$，又$\angle DAE=\frac{1}{3}\angle BAC$，求$\angle BAC$的度数。

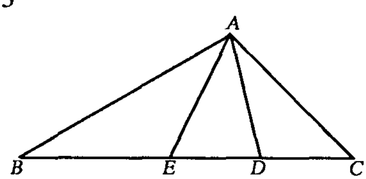


图1－6

【分析与解】 设$\angle BAE$、$\angle EAD$、$\angle DAC$分别为$\alpha$，$\beta$，$\gamma$，则$\beta=\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)$，即$2\beta=\alpha+\gamma$

由$AB=BD$得$\alpha+\beta=\angle BDA$

由 $CE=CA$ 得 $\beta+\gamma=\angle CEA$

而在 $\triangle AED$ 中，$\angle EAD+\angle CEA+\angle BDA=180°$，即

$\beta+(\beta+\gamma)+(\alpha+\beta)=180°$，由 $2\beta=\alpha+\gamma$

得 $5\beta=180°$，所以 $3\beta=\frac{180°}{5}\times 3=108°$

即 $\angle BAC$ 为 $108°$。

**【小结】** 注意多边形的内角和等于180°乘以多边形的边数和2的差，所以只要知道多边形的边数即可求出该多边形的内角和，而不必画出该多边形的图形，当所求的一个角或几个角为某一多边形的内角时，可考虑用多边形的内角和来解题。

# 练 习 一

1. 试求 8 边形、19 边形的内角和。

2. 试求 199 边形、2001 边形的内角和。

3. 如图 1－7 四边形 $ABCD$，$\angle A+\angle C=210°$，$\angle D=2\angle B$，试求$\angle B$。

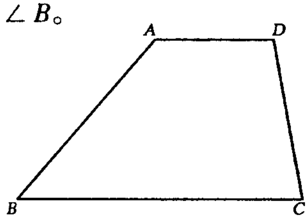


图 1－7

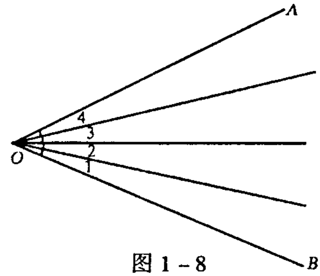


图 1－8

4. 如图 1－8，$\angle 2+\angle 3=\angle 1+\angle 4$，当$\angle AOB$是多少度时，图中所有角的和等于 180°?

5. 如图 1－9，$EF$ 是正方形 $ABCD$ 的对折线，将$\angle A$和$\angle B$的顶点重合于 $EF$ 上，此时$\angle DHG$是多少度?

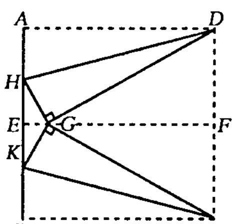


图 1－9

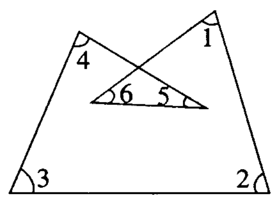


图 1－10

6. 如图 1－10，求$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6$的度数。

# 第二讲　多边形的外角和

1. 三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角之和。

2. 多边形的外角和等于 $360°$。

大家知道，三角形有一个共同特征，就是 3 个内角的和都等于 $180°$，四边形具有一个共同特征，就是 4 个内角的和都等于 $180°\times2$；五边形的内角和都等于 $180°\times3$，即边数相同的多边形不论形状大小如何，都是有共同的特征，它们的内角和是 $180°\times$(边数 $-2$)。

细想一下，我们不禁要问：

边数不相同的多边形是不是也有一个共同的特征？这个共同特征是什么呢？

结论是肯定的，这个特征与边数无关。

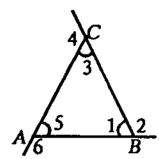


图 2－1

考察$\triangle ABC$，延长$\triangle ABC$的三条边得到$\angle2$，$\angle4$，$\angle6$，如图 2－1，我们称$\angle2$，$\angle4$，$\angle6$ 分别是$\angle1$，$\angle3$，$\angle5$ 的外角。

由于　$\angle1+\angle2=180°$　　$\angle1+\angle3+\angle5=180°$

所以　$\angle2=180°-\angle1=\angle3+\angle5$

同理　$\angle4=\angle5+\angle1$　　$\angle6=\angle1+\angle3$

由此我们得到三角形的一个重要性质：

三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和。

又因为　$\angle1+\angle2=180°$　$\angle3+\angle4=180°$　$\angle5+\angle6=180°$

所以　$\angle1+\angle2+\angle3+\angle4+\angle5+\angle6=180°\times3$

$$\angle2+\angle4+\angle6=180°\times3-(\angle1+\angle3+\angle5)$$

$$=3\times180°-180°=360°$$

也就是三角形3个外角的和等于360°。

四边形也有同样的结论吗？就是说它的4个外角的和也等于360°吗？

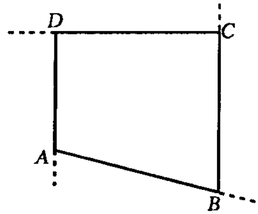

图2-2

四边形有4对内角和外角，每对内角和外角的和等于180°，所以，4对内角与外角的和是180°×4，而四边形4个内角的和等于180°×(4-2)=180°×2，所以，4个外角的和等于

$$180^\circ \times 4 - 180^\circ \times (4-2) = 360^\circ$$

这就是说，四边形的外角和等于360°。

一般地，多边形的内角与外角的总和是180°×边数，内角和等于180°×(边数-2)，所以，多边形的外角和为

$$180^\circ \times \text{边数} - 180^\circ \times (\text{边数}-2) = 180^\circ \times 2 = 360^\circ$$

由此可见，多边形的外角和与边数无关，也就是说不论边数较少的多边形还是边数较多的多边形，它们的外角和都等于360°。

因此，我们就得到了多边形的一个共同特征：多边形的外角和等于360°。

**【例1】** 在图2-3中，∠1，∠2，∠3和∠4的和是多少？

**【解法一】** 分别求∠1，∠2，∠3和∠4。

由图2-3中的条件，利用“三角形的外角等于与它不相邻的两个内角和”，就有

$$\angle 4 = 45^\circ + 75^\circ = 120^\circ$$

$$\angle 2 = 43^\circ + 40^\circ = 83^\circ$$

又∠3与43°角、75°角共同构成平角，∠1与40°角、45°角共同构成平角，所以

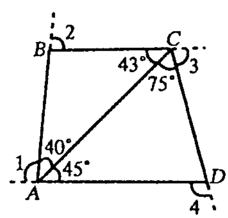

图2-3

$$\angle 1 = 180^\circ - (40^\circ + 45^\circ) = 95^\circ$$

$\angle 3 = 180° - (43° + 75°) = 62°$

因此 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 95° + 83° + 62° + 120° = 360°$

【解法二】 由于多边形的外角和等于 360°,所以∠1,∠2,∠3,∠4 的和等于 360°。

如果采用第二种解法,图 2-3 中的条件实际上是多余的。

【例 2】 如图 2-4,求∠1 的度数。

【分析与解】 从图中容易观察到∠1 为△*EDC* 的一个外角，所以$\angle 1 = \angle D + \angle 2$,而∠2 又是△*CBA* 的一个外角,从而$\angle 2 = \angle A + \angle B$,

所以$\angle 1 = \angle D + \angle 2$

$= \angle D + \angle A + \angle B$

$= 30° + 25° + 65° = 120°$

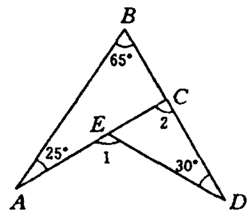

图 2-4

【例 3】 如图 2-5,求$\angle A + \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$。

【分析与解】 经观察容易发现,∠1,∠2+∠3,∠4,∠5 是五边形 *KHMNA* 的 4 个外角，而∠*A* 是一个内角,从而$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 360° - (180° - \angle A)$

即 $\angle A + \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$

$= 360° - 180° + 2 \times \angle A$

$= 180° + 2 \times 70° = 320°$

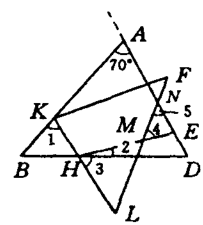

图 2-5

【注】 本题也可通过四边形 *AKHE* 的外角和来做。

【例 4】 如图 2-6，求$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E$。

【分析】 ∠*A*、∠*B*、∠*C*、∠*D*、∠*E*

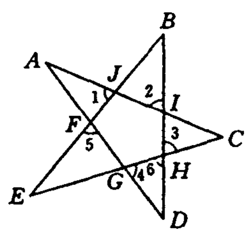

图 2-6

这 5 个角不在一个三角形或多边形内，因此求它们的和较为困难，所以我们要想办法通过转换将它们和多边形发生联系。

**【解法一】** 由三角形的内角和，容易知道

$\angle A=180^\circ-(\angle 1+\angle 5)$

$\angle B=180^\circ-(\angle 1+\angle 2)$

$\angle C=180^\circ-(\angle 2+\angle 3)$

$\angle D=180^\circ-(\angle 3+\angle 4)$

$\angle E=180^\circ-(\angle 4+\angle 5)$

所以 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E$

$=180^\circ\times 5-2(\angle 1+\angle 2+\cdots+\angle 5)$

$=180^\circ\times 5-2\times 360^\circ=180^\circ$

**【解法二】** 由三角形的一个外角等于跟它不相邻的两个内角的和知

在 $\triangle AGC$ 中　　$\angle A+\angle C=\angle 4$

在 $\triangle BEH$ 中　　$\angle B+\angle E=\angle 6$

所以 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=\angle 4+\angle 6+\angle D=180^\circ$

【例 5】 计算图 2－7 中 $A$、$B$、$C$、$D$、$E$、$F$、$G$ 和 $H$ 这 8 个角的和。

**【分析与解】** 这 8 个角不在一个多边形中，求它们的和比较困难，怎么办呢？

想办法把这 8 个角搬到一个或几个三角形、四边形里去讨论。这是一个好想法。

但如何搬呢？

仔细观察，容易发现

$\angle 1=\angle E+\angle H$　$\angle 2=\angle B+\angle G$

$\angle 3=\angle A+\angle D$　$\angle 4=\angle C+\angle F$

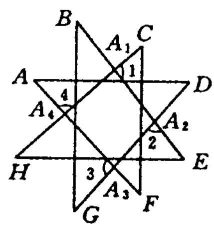

图 2－7

这样，就把求 8 个角的和转化为求 4 个角 $\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$ 和 $\angle 4$ 的和。

仔细观察图形，我们发现 $\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$ 和 $\angle 4$ 恰好是四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的 4 个外角，所以这 4 个角的和等于 $360^\circ$。