

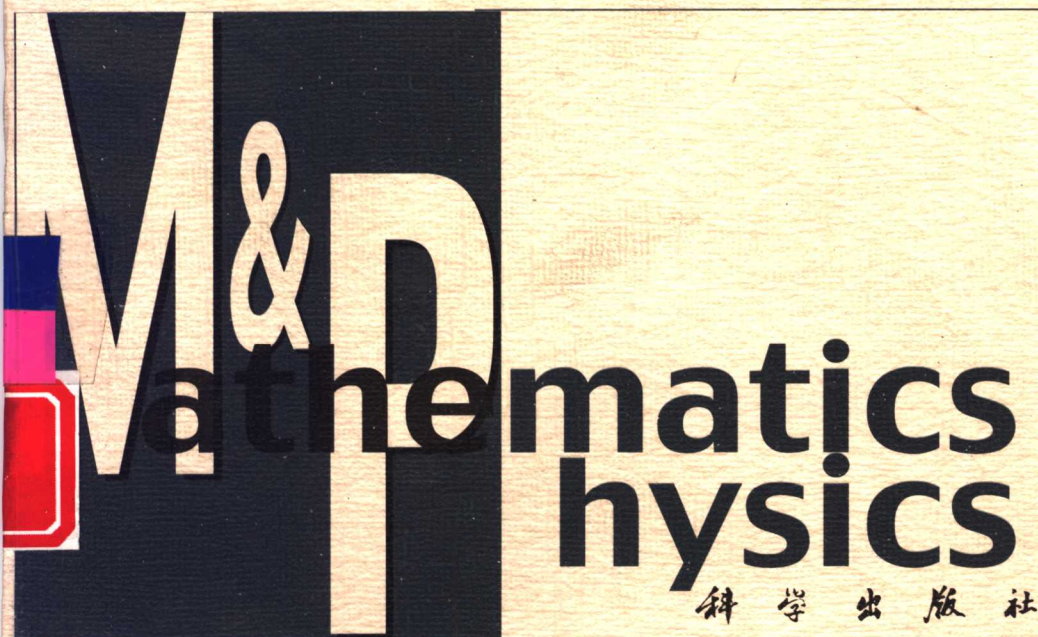


国家自然科学基金研究专著
NATIONAL NATURAL SCIENCE FOUNDATION OF CHINA



计算流体力学 基本原理

吴子牛 编著



科学出版社

52.71
018



国家自然科学基金研究专著
NATIONAL NATURAL SCIENCE FOUNDATION OF CHINA



计算流体力学 基本原理

吴子牛 编著

科学出版社

内 容 简 介

《计算流体力学基本原理》把计算流体力学作为一门独立的学科进行介绍. 它涉及计算流体力学较为规范的内容, 包括流体力学的基本原理、流体力学基本方程的计算形式与配套模型、方程的基本理论、构造计算方法的基本原则、计算方法的分析理论和一些实用化计算技术.

本书可供从事计算流体力学的科研、技术人员参考, 也可以作为流体力学专业和应用数学专业研究生和本科生的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

计算流体力学基本原理/吴子牛编著. -北京: 科学出版社, 2001

ISBN 7-03-008128-5

I. 计… II. 吴… III. 计算流体力学 IV. 035

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 61451 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

源海印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

2001 年 2 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

2001 年 2 月第一次印刷 印张: 18 1/2

印数: 1—2 800 字数: 416 000

定价: 35.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈北燕〉)

前 言

计算流体力学(简称 CFD, 来源于英文的 Computational Fluid Dynamics)作为一门独立的学科在近三十年成为流体力学与应用数学的热门研究内容. 计算流体力学的发展促使人们去重新书写流体力学基本方程和构造物理模型、重新了解基本方程的性质、重新理解传统差分的局限、重新研究一整套研究稳定性、收敛性、唯一性的理论. 计算流体力学有属于它的基本理论、基本方法、基本逻辑和它独特的应用范围, 因而属于一门独立的学科. 计算流体力学的发展不但为流体力学研究提供了一种手段, 而且带动了应用数学的发展和促进了计算机的发展.

本书介绍计算流体力学最基本的原理. 本书与一般计算流体力学书籍相比, 并不深入介绍具体的计算方法, 而是试图把计算流体力学作为一门相对独立的学科来论述, 内容包括如下几乎具有同等重要性的六个方面:

一、流体力学基本原理. 流体力学基本原理自然是计算流体力学的基础. 流体力学本身包含了丰富的知识, 但这里介绍的基本原理只涉及流体运动学基础、动力学方程和方程的特殊形式. 流体力学基本原理将在第一章中介绍, 主要强调流体力学基本方程是如何构造的, 如何推导它们的一些特殊形式和在不同坐标系中的形式. 即使对具有一定流体力学基础的读者也建议不要越过这一章, 因为本章内容的取舍考虑了计算流体力学的需要. 虽然许多知识尤其是运动学基础是一般读者非常熟悉的, 但也包含了一些读者不一定熟悉的内容, 如在非惯性系下能量方程的推导. 本章所强调的分析思维有助于读者阅读本书其他部分的内容. 另外, 本书绝大多数章目都有边界条件(包括内边界条件)的讨论, 了解不同部分给定边界条件的方式能帮助正确理解如何处理边界条件.

二、流体力学基本方程的计算形式和模型化处理. 在连续介质力学范畴下, 流体力学基本方程为纳维-斯托克斯方程(Navier - Stokes 方程, 简称 N-S 方程), 在理想流体假设下为欧拉方程(Euler 方程). 基本方程有多种形式, 但必须写成一些特殊形式(计算形式)才便于用标准的计算方法求解. 另外一般流体力学问题包含有由小到大的多种尺度, 而一般计算只考虑某种宏观尺度. 为了只计算宏观尺度并考虑其他尺度的部分影响, 必须进行模型化处理. 流体力学基本方程的计算形式和模型化处理将在第二章介绍, 主要强调 N-S 方程和欧拉方程的几种计算形式及其由来(包括所有的雅可比矩阵的计算及其对角化处理), 和具有典型多尺度效用的湍流和两相流问题的模拟原理、特征多尺度问题的统一计算方法、方程的无量纲化处理. 模型化处理是计算流体力学的一部分特殊的而且十分重要的内容, 在本书中以适当篇幅介绍, 目的是体现计算流体力学基本原理的完整性.

三、基本方程的性质. N-S 方程作为数学上的偏微分方程具有许多特殊性质, 数学研究还很不完善, 数学上甚至很难证明 N-S 方程是否有解. 解的存在性、唯一性与稳定性

是偏微分方程理论中的基本问题,即所谓的适定性问题。 $N-S$ 方程很特别,属于一种混合型方程,不同分量方程的性质不一样;对于不同流动条件,方程的性质又不一样,但在理想流假设下 $N-S$ 方程即欧拉方程的基本性质决定了计算流体力学的地位。欧拉方程的处理是计算流体力学的关键。欧拉方程在数学上属于双曲守恒方程,包含了丰富的数学内容,如适定性、特征理论、弱解理论、熵条件等。这些内容的研究构成了计算流体力学方法研究的基础,将在第三章中介绍。

四、构造计算方法的基本原理。 $N-S$ 方程属于非线性偏微分方程组,在一般情况下是无法求解解析的,因此必须用计算机求解。计算机只能进行大量的加减乘除等简单代数运算,计算机的这种运算速度是人的运算速度无法比拟的。通过用差分或其他办法把非线性偏微分方程转化为只包含简单加减乘除等运算的代数方程组,编成程序后让计算机去按规定顺序重复地不厌其烦地完成这些代数运算,便是构造计算方法的目的所在。但流体力学方程的计算包含了一系列特殊问题,如果把计算方法中介绍的简单差分直接用于将方程离散,那么所获得的数值方法或格式并不一定能计算流动问题。流体力学基本方程必须用基于方程基本性质所构造的特殊方法才能求解,而且不同问题的求解对算法又有不同要求。第四章将介绍构造计算方法的基本原理,包括有限差分方法、非线性守恒系统的计算方法、边界处理的基本原理和时间积分方法。

五、计算方法的分析理论。随意构造的计算方法不一定能直接使用。计算方法必须满足一些特性才能使用,这些特性包括稳定性、精度、收敛性、守恒性等。第五章将介绍这些特性的分析理论。掌握这些分析理论有助于读者正确使用具体的计算方法,也可以帮助构造新的计算方法。本章介绍的分析理论包含了一般计算流体力学书籍不存在的内容,如边界处理的稳定性理论、收敛性理论、解的唯一性理论、守恒性理论、分区内边界处理的分析方法等。

六、实用化基础。虽然本书强调的是计算流体力学基本原理,目的不是让读者了解一些能立即用于解决实际问题的具体方法,但作为结尾介绍一些实用化基础是必要的。第六章将介绍一些实用化基础,包括网格系统的一些基本概念、将数值方法推广到高维问题的基本方法、高维问题边界处理方法、并行计算的一些概念和实际计算的一些经验。这些经验是作者的一些个人经验,只供参考。

本书对计算流体力学的一些特殊方法(如拉格朗日方法、有限元方法、谱方法、玻尔兹曼方法、格子气方法等)并不介绍,原因是这些特殊方法太多强调数学味道,或者还没有达到实用的程度。

在计算流体力学方法研究中,主要存在两种思路。一种是应用数学家针对空气动力学问题发展的可压缩流动计算方法,另一种是物理学家针对传热问题发展的不可压缩流动计算方法。通过某种特殊处理,两种思路都试图将方法推广到另一种思路所侧重的问题。本书只介绍第一种思路及第一种思路所涉及的问题。

本书尽量避免过于深奥的内容和手册式的介绍,尤其是本书中计算方法的介绍基本只占篇幅的六分之一。熟悉湍流模拟的读者一定会觉得,第二章中有关湍流模拟的介绍过于简单。为了强调整体内容的协调性,我们不得不将许多重要内容放弃或者淡化。实际上本书中任何一章甚至一小节的内容都可能在专著中介绍。以有限的篇幅尽量协调和连贯

地介绍计算流体力学部分最核心的内容,正是作者编写本书的目的所在.

由于作者水平有限和时间仓促,书中不可避免地存在一些失误和不足的地方,希望读者批评指正.

作 者

2000 年 3 月于清华园

本书主要符号

t 时间

$\mathbf{x}$ 空间坐标

x, y, z 或 x_1, x_2, x_3 空间坐标的三个分量

$\mathbf{V}$ 速度矢量

u, v, w 或 V_1, V_2, V_3 或 V_x, V_y, V_z 速度的三个分量

$\mathbf{S}$ 应变率张量

$\mathbf{P}$ 应力张量

ρ 密度

p 压力

T 温度

e 内能

E 总能

H 总焓

S 熵

a 音速

Ω 有限体积

Σ 有限体积的边界

$\mathbf{V}_{\Sigma}$ 有限体积边界的移动速度

$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ 表面单位法向矢量

$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ 笛卡儿坐标系的三个基矢量

$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ 柱坐标系的三个基矢量

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x, \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y, \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right)$ 梯度算子

k, h, σ 时间步长, 空间步长, 时间步长与空间步长的比

$\mathbf{R}$ 实数集

$\mathbf{C}$ 复数集

$\mathbf{R}^+$ 正实数集

$\mathbf{R}^-$ 负实数集

C_0^p 具有直至 p 阶连续偏导数的紧支集

ι 虚数单位 ($\iota = \sqrt{-1}$)

目 录

第一章 流体力学基本原理	1
1.1 流体运动学基础	1
1.1.1 描述流体运动的基本方法	1
1.1.2 流场结构的几何描述	2
1.1.3 质点加速度、质点导数	3
1.1.4 流体微团运动分析	5
1.1.5 散度与旋度、速度位与流函数	8
1.1.6 旋涡运动学	11
1.2 流体动力学基本方程	13
1.2.1 应力张量的本构方程	13
1.2.2 流体动力学的积分型方程	21
1.2.3 流体动力学的微分型方程	26
1.2.4 微分方程的封闭性讨论	30
1.3 N-S方程的特殊形式	35
1.3.1 动量方程的其他形式与应用	35
1.3.2 能量方程的其他形式——内能方程、温度方程、焓方程与熵方程	42
1.3.3 非惯性坐标系中的方程	44
1.3.4 直角坐标系和柱坐标系中微分方程的分量形式	48
参考文献	50
第二章 流体力学方程的计算形式与封闭模型	52
2.1 欧拉方程与 N-S 方程的计算形式	52
2.1.1 物理坐标系下的 N-S 方程	52
2.1.2 计算坐标系下的方程	55
2.1.3 N-S 方程的展开形式	57
2.1.4 方程的基本变量形式与对角化	62
2.2 多尺度问题方程的封闭与模型化处理	67
2.2.1 多尺度问题的特征	67
2.2.2 结构多尺度问题:湍流模拟	69
2.2.3 相位多尺度问题:多相流运动模拟	77
2.2.4 特征多尺度问题:高低速问题统一处理	83
2.2.5 影响多尺度问题:无量纲化处理	87

参考文献	89
第三章 流体力学方程的基本理论	91
3.1 非线性守恒系统与欧拉方程	91
3.2 双曲性与适定性	96
3.2.1 双曲性	96
3.2.2 适定性	97
3.3 特征线与黎曼不变量	100
3.3.1 特征矢量与矩阵的对角化	100
3.3.2 特征线与古典黎曼不变量	101
3.3.3 Lax 黎曼不变量, 简单波	103
3.4 弱解与黎曼问题	104
3.4.1 伯格斯的方程的弱解	104
3.4.2 一般系统弱解的定义	107
3.4.3 黎曼问题	108
3.5 熵条件	112
3.6 边界条件	114
3.6.1 构造边界条件的基本原则	114
3.6.2 欧拉方程的边界条件	117
3.7 高维问题	118
附录 A 几个基本定义	120
附录 B 总结性习题及其解答	121
B.1 问题	121
B.2 解题要领	122
B.3 解答	123
参考文献	126
第四章 构造计算方法的基本原理	128
4.1 基本概念	128
4.2 有限差分法	130
4.2.1 有限差分的定义	130
4.2.2 差分构造的一般方法	131
4.2.3 运输方程的简单差分格式	136
4.2.4 高阶微分的差分	137
4.3 非线性守恒系统的数值方法	139
4.3.1 守恒格式及几种表现形式	139
4.3.2 中心格式	141
4.3.3 迎风格式	144
4.3.4 高分辨率格式基本思想	149
4.4 边界条件	155

4.4.1 外边界处理	155
4.4.2 分区内边界条件	158
4.5 时间积分	163
4.5.1 时空独立处理法	163
4.5.2 泰勒展开法	167
4.5.3 混合方法	168
4.5.4 源项处理	171
附录 简单数值试验问题	173
参考文献	175
第五章 计算方法的分析理论	177
5.1 计算方法的基本特性:相容性、稳定性与收敛性	177
5.1.1 基本概念	177
5.1.2 相容性	178
5.1.3 稳定性	178
5.1.4 收敛性	179
5.1.5 等价性定理	180
5.2 稳定性理论	180
5.2.1 柯西问题的稳定性理论	180
5.2.2 混合初边值问题的稳定性理论	185
5.3 误差分析	191
5.3.1 傅里叶分析	191
5.3.2 当地误差与整体误差	193
5.4 守恒理论	197
5.4.1 守恒格式	197
5.4.2 守恒处理的重要性	198
5.4.3 守恒格式的其他形式	199
5.4.4 守恒格式的特性	200
5.5 定常解	203
5.5.1 收敛到定常解的速度	203
5.5.2 定常解的唯一性	206
5.6 分区计算的理论分析	206
5.6.1 分析方法	207
5.6.2 覆盖分区两类处理的稳定性分析	208
5.6.3 趣味理论分析一:覆盖分区计算守恒问题	211
5.6.4 趣味理论分析二:覆盖分区计算稳定性、收敛性与解的唯一性	213
参考文献	216
第六章 实用化基础	218
6.1 网格系统	218

6.1.1 物理坐标系中的网格	218
6.1.2 分区结构网格	220
6.2 高维问题计算方法	222
6.2.1 有限差分定义	223
6.2.2 有限差分法	223
6.2.3 有限体积分法	227
6.2.4 高维问题时间积分	232
6.2.5 N-S 方程的几种具体格式	235
6.2.6 条件化预处理方程的离散	242
6.3 高维问题初始条件与边界处理	243
6.3.1 初始条件与边界条件	243
6.3.2 远场边界条件	244
6.3.3 固体壁面边界条件	247
6.3.4 其他边界条件	249
6.3.5 条件化预处理特征边界条件	250
6.3.6 边界条件的隐式化处理	251
6.3.7 分区计算的耦合条件	252
6.4 并行计算	256
6.4.1 并行计算机结构	256
6.4.2 并行计算机编程	257
6.4.3 并行性能参数	258
6.4.4 分区并行处理	260
6.5 实际计算的某些经验	264
6.5.1 定常问题收敛剖析	265
6.5.2 计算不稳定的表现形式、诊断与解决方法	266
6.5.3 结果可靠的必然因素与偶然因素,物理涡与数值涡	267
附录 计算流体力学的作用与地位	268
参考文献	270
索引	272
编后语	280

第一章 流体力学基本原理

流体力学基本原理是计算流体力学的基础. 这里简要介绍连续介质力学假设下流体力学最基本的原理, 包括流体运动学基础、流体动力学基础和基本方程的一些特殊形式. 内容的取舍和安排部分地考虑了计算流体力学的需要.

1.1 流体运动学基础

1.1.1 描述流体运动的基本方法

在连续介质力学假设前提下, 流体力学描述流体微团集合的运动状态. 流体微团属于充满流体介质的空间中的微观上足够大(远远大于分子运动平均自由程)而宏观上足够小(远远小于所感兴趣的流体运动空间尺度)的一团流体. 在宏观上把流体微团看成是一个质点. 有了流体微团这一定性认识后, 在实用中不必再去关心微团有多大.

描述流体运动的方法有两种: 欧拉方法(E), 拉格朗日方法(L). 有时也会看到所谓的欧拉-拉格朗日混合方法. 这些方法主要描述流体微团集合的运动状态, 即流动参数 ϕ 的变化. 流动参数包括运动特征量(如流体微团的速度 $\mathbf{V}$)和热力学状态特征量即物性参数(如流体微团的压力 p , 密度 ρ , 温度 T). 流动参数的变化是针对时间 t 甚至空间(坐标为 $\mathbf{x}$)的变化. 相应地, 流动参数称为未知数或因变量, 而时间甚至空间坐标称为自变量(空间坐标是否为自变量取决于是否采用欧拉描述法).

欧拉方法 在任意指定时刻, 描述流动参数的空间分布. 以时空坐标 $(\mathbf{x}, t)$ 为自变量, 将流动参数(主要有速度、密度、压力和温度以及它们的组合)表示为时空坐标的函数(流动参数分布; 也称参数场, 如速度场和温度场)

$$\phi = \phi(\mathbf{x}, t) = \phi_E(\mathbf{x}, t).$$

拉格朗日方法 从某时刻开始跟踪每一流体质点, 记录对应质点流动参数的变化. 以初始时刻坐标 $\mathbf{A}$ 和时间 t 为自变量, 将流动参数(主要有质点位移 $\mathbf{x}$ 、密度、压力和温度等)表示为

$$\phi = \phi(\mathbf{A}, t) = \phi_L(\mathbf{A}, t).$$

质点位移函数 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{A}, t)$ (质点轨迹)也是因变量, 它与初始坐标 $\mathbf{A}$ 成一一对应关系, 即:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(\mathbf{A}, 0) = \mathbf{A}, \\ \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{A}, t) \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t). \end{cases}$$

两种方法可以按下面方式进行转换:

$$\begin{aligned} \text{L-E 变换} \quad & \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{A}, t) \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t), \\ & \phi = \phi_L(\mathbf{A}, t) = \phi_L[\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), t] = \phi_E(\mathbf{x}, t), \\ & \mathbf{V} = \left[\frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{A}, t)}{\partial t} \right]_{\mathbf{A}} = \mathbf{V}_L(\mathbf{A}, t) = \mathbf{V}_L[\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), t] = \mathbf{V}_E(\mathbf{x}, t). \\ \text{E-L 变换} \quad & \mathbf{V} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)_{\mathbf{A}} = \mathbf{V}_E(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}(\mathbf{A}, 0) = \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{A}, t), \\ & \phi = \phi_E(\mathbf{x}, t) = \phi_E[\mathbf{x}(\mathbf{A}, t), t] = \phi_L(\mathbf{A}, t). \end{aligned}$$

欧拉描述法中的流动参数如果与时间无关,即 $\phi = \phi(\mathbf{x})$,那么相应的流动称为定常流动,否则称为非定常流动.一般很难存在严格意义上的定常流动.但如果流动参数随时间的变化与所关心的平均值相比小得可以忽略不计,而且这种变化引起的宏观效应可以忽略不计,则一般可以按定常流动处理.实际的定常流动或计算出的定常流动往往是由非定常流动经过一段时间的变化过渡来的.如果采用拉格朗日法,则区别定常与非定常流动不那么直观^①.

如果流动参数只与坐标的一个(如 x)、两个(如 x, y)、或三个分量有关,则相应的流动称为一维、二维或三维流动.以后会看到,二维流动中还有所谓的平面二维流动和轴对称二维流动.这种分类属于物理分类,还有工程或数学上的人为分类(主要是为了处理方便),读者阅读某些流体力学书籍时会遇到零维流动、准一维流动等概念.还有一种特殊方法,将时间、几何空间、参数空间(包括速度、温度、密度,等等)看成统一的自变量即统一空间来研究流体质点在统一空间某点出现的概率.统一空间(也称为状态空间)的维数可能超过十维.这种描述方法称为 PDF 方法.

1.1.2 流场结构的几何描述

流线为固定时刻空间曲线(速度场矢量线),曲线上任意点的切向矢量与当地的速度矢量重合,属于欧拉场描述法.取 $\mathbf{V} = \mathbf{V}_E$ (速度为欧拉场速度),确定参数形式的流线 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ 的方程为

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{ds} \times \mathbf{V} &= 0 \quad (\text{基本定义}), \\ \frac{dx_1}{V_1} &= \frac{dx_2}{V_2} = \frac{dx_3}{V_3} = ds \quad (\text{等价形式 1}), \\ \frac{d\mathbf{x}}{ds} &= \mathbf{V} \quad (\text{等价形式 2}). \end{aligned}$$

流线具有如下性质:

^① 可以证明,对于拉格朗日法,定常流动条件可以表示为:

$$\frac{\partial \phi_L}{\partial t} - \frac{\partial \phi_L}{\partial \mathbf{A}} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \mathbf{A}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial t} = 0$$

1)除奇点($V=0, V=\infty$)外,同一时刻流场中的不同流线不相交(因空间每点只有一个速度方向,所以除奇点(速度为0点,速度为 ∞)外,流线不会以有限角相交,但可以相切);

2)对于非定常流动,不同时刻通过同一点的流线可以不重合;

3)对于定常流动和直线流动,不同时刻通过同一点的流线重合.

流面为某时刻过给定曲线(非流线)上每点做流线组成的面,从而在流面上 $V \cdot n = 0$, 这里 n 为曲面的单位法向矢量.

流管为某时刻过给定闭曲线(非流线)上每点做流线组成的管状面,从而在流管壁上 $V \cdot n = 0$. 根据物质不生不灭原理,流管不能在流体中间中断,否则流体在中断处不见了. 流管是由流线组成的,因流管不能中断,所以流线也不能在流体中中断. 流管和流线或形成闭环、或终止于边界、或终止于奇点.

将反映主要流动特征的流线画出得流线谱(画出所有过奇点的流线,画出与过奇点流线渐近的流线,画出边界线). 流线谱用于显示流动规律,已经存在可以画流线谱的标准软件.

迹线为给定流体质点的运动轨迹,方程为

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_L(\mathbf{A}, t) \text{ (拉格朗日法),}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)_A = \mathbf{V}_E(\mathbf{x}, t) \text{ (欧拉法).}$$

流线和迹线的区别在于:

1)流线是由同一时刻、不同质点连起来的速度矢量场即为瞬间速度场状态;迹线是同一质点在不同时刻的位移曲线(即指定质点的运动过程). 因此对于非定常流场流线迹线一般不重合,除非所有质点的流动都沿一个方向.

2)对于定常流场,通过同一点的流线不随时间变化,且任意时刻通过同一空间点的迹线与流线重合. 这是因为,两条线的切线都与当地速度方向一致,对于定常问题流线不随时间变化. 因任意点只有一个速度方向,所以经过同一点的迹线与流线不可能在某点分开,否则在分开点出现两个速度方向. 也可以从定常流动时确定它们的方程的等价性看出:

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{V}(\mathbf{x}), \mathbf{x}(s=0) = \mathbf{A} \text{ 流线,}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)_A = \mathbf{V}(\mathbf{x}), \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{A} \text{ 迹线.}$$

1.1.3 质点加速度、质点导数

考虑时刻 t 处于坐标 $\mathbf{x}$ 的流体质点. 对应欧拉描述法该流体质点速度为 $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$. 在时刻 $t + \delta t$, 该流体质点运动到 $\mathbf{x} + \delta \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{V} \delta t$. 在时刻 $t + \delta t$ 处于坐标 $\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}$ 的流体质点的速度为 $\mathbf{V}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}, t + \delta t) = \mathbf{V}(\mathbf{x} + \mathbf{V} \delta t, t + \delta t)$. 所以,质点加速度为

$$\begin{aligned}
 a &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{V}(\mathbf{x} + \mathbf{V}\delta t, t + \delta t) - \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)}{\delta t} \right] \\
 &= \mathbf{V}_t + V_j \mathbf{V}_{x_j},
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

即

$$\mathbf{a} = \mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}.$$

这里 $\mathbf{V}_t$ 为当地加速度, 由流场的非定常效应产生; $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = V_s \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s}$ 为迁移加速度, 沿流场速度方向 ($s = \mathbf{V}/|\mathbf{V}|$), 由速度场的空间非均匀性产生.

对于拉格朗日方法, 质点加速度按下式计算:

$$\mathbf{a} = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} \right)_A (\mathbf{x} = \mathbf{x}_L(\mathbf{A}, t)).$$

利用上式和 $\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)_A = \mathbf{V}_E(\mathbf{x}, t)$ 将质点位移导数转换为欧拉描述法中的速度, 即

$$\mathbf{a} = \left(\frac{\partial \mathbf{V}_E(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right)_A = \left(\frac{\partial \mathbf{V}_E(\mathbf{x}(\mathbf{A}, t), t)}{\partial t} \right)_A,$$

则同样可以得到方程(1.1).

质点携带的物理量随时间的变化率称为质点导数(有时称物质导数或随体导数). 这一定义的特殊性在于, 我们按拉格朗日方法来定义变化率, 但又要使用欧拉方法中的变量. 质点导数与前面加速度的定义(1.1)完全类似. 加速度属于速度的质点导数. 按质点加速度同样的定义方式, 得某物理量 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 的质点导数的数学定义

$$\begin{aligned}
 \frac{D\phi(\mathbf{x}, t)}{Dt} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0, \delta \mathbf{x} \rightarrow 0, \frac{\delta \mathbf{x}}{\delta t} = \mathbf{V}} \left[\frac{\phi(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}, t + \delta t) - \phi(\mathbf{x}, t)}{\delta t} \right] \\
 &= \phi_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \phi
 \end{aligned}$$

因此, 质点导数 $\frac{D\phi(\mathbf{x}, t)}{Dt}$ 等于局部导数 $\phi_t = \frac{\partial \phi}{\partial t}$ 与对流导数 $\mathbf{V} \cdot \nabla \phi$ 的和. 习惯上, 我们说局部导数是由流动的非定常变化引起的效应, 对流导数是通过对流(即流动)把周围流动参数的不同值给带过来引起的效应. 或者说, 流体质点所携带的物理量随时间的变化, 如果以欧拉方法来衡量, 来源于流动参数本身的非定常性和空间分布的非均匀性. 因此流动参数不变可以有多种解释.

例如, 不可压缩流体指的是密度的质点导数处处为零即质点的密度不随时间变化. 但密度的质点导数为零并不意味着密度不随时间变化或者密度不随空间坐标变化. 例如, 考虑密度沿垂直方向(z)均匀变化的不可压缩液体, 即密度分布为 $\rho = \rho(z)$. 现在让这种液体以恒速度 w 上升. 现在考虑固定空间点 z 密度的变化, 在任意时刻 t , 固定空间点流体质点显然来自初始时刻处于 $z_0 = z - wt$ 的流体质点. 因此, 在时刻 t , 位于空间点 z 的流体质点的密度为 $\rho(z - wt)$. 虽然任意流体质点是不可压缩的即 $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = \rho'(z - wt)(-w + w) = 0$, 但在任意点密度是随时间变化的, 而且空间分布也不均匀.

1.1.4 流体微团运动分析

用泰勒展开,并保留低阶项,得距离为 $\delta \mathbf{x}$ 的相邻两流体质点的速度差所满足的关系式

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{V} &= \nabla \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^t) \cdot \delta \mathbf{x} + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} - \nabla \mathbf{V}^t) \cdot \delta \mathbf{x} \\ &= \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{x} + \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{x}.\end{aligned}$$

这里, $\nabla \mathbf{V}$ 为速度梯度张量($\nabla \mathbf{V}^t$ 为 $\nabla \mathbf{V}$ 的转置),它可以分解为如下的对称张量和反对称张量

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^t) = (s_{ij}), \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} - \nabla \mathbf{V}^t) = (a_{ij}).$$

进一步有

$$\begin{aligned}s_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right), \\ s_{ij} &= s'_{ij} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \delta_{ij}, \\ s'_{ij} &= s_{ij} - \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \delta_{ij}, \\ a_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right),\end{aligned}$$

因此

$$\delta V_i = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \delta x_j + s'_{ij} \delta x_j + a_{ij} \delta x_j. \quad (1.2)$$

可以证明, $\frac{\partial V_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \delta x_j$ 表示各向同性的体积膨胀率即线变形率; $s'_{ij} \delta x_j$ 表示体积不变的纯变形率即角变形率; $a_{ij} \delta x_j$ 表示旋转运动(准刚体运动). 因此,一点邻域内的相对运动可以分解为各向同性的体积膨胀运动(拉伸运动)、体积不变的纯变形运动和旋转运动(准刚体运动). 称 $\mathbf{S}$ 应变率张量(包含线变形与角变形), $\mathbf{A}$ 为旋转张量.

针对二维问题,用几何方法对上面的速度分解进行进一步说明.

考虑矩形流体微团,顶点按逆时针顺序分别为 A, B, C, D, 矩形的边长为 $\delta x, \delta y$, 设 A 点的速度分量为 u, v . 于是忽略高阶项后各点的速度分量为(图 1.1)

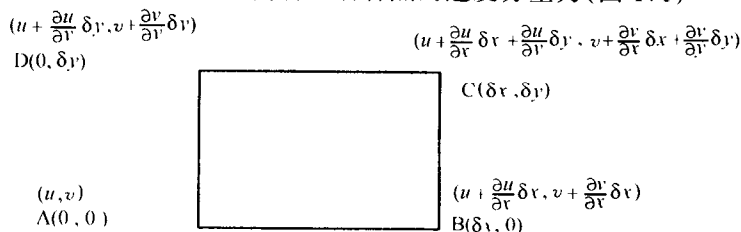


图 1.1 初始时刻的矩形及角点速度值