纯粹数学与应用数学专著 第15号

整函数和亚纯函数理论

—亏值、渐近值和奇异方向

张广厚 著

科学出版社

纯粹数学与应用数学专著 第15号

整函数和亚纯函数理论

——亏值、渐近值和奇异方向

张广厚 著

科学出版社

1986

内 容 简 介

本书是关于整函数和亚纯函数理论的专著，重点论述三个非常重要的概念：亏值、渐近值和奇异方向之间的关系，并且介绍了值分布理论和渐近值理论的某些重要成果.本书读者对象为函数论专业的高年级学生、研究生、大学教师和科研人员.

纯粹数学与应用数学专著 第15号

整函数和亚纯函数理论

——亏值、渐近值和奇异方向

张 广 厚 著

责任编辑 张启男

科 学 出 版 社 出版

北京朝阳门内大街137号

北京昌平达江印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1986年8月第 版 开本：850×1168 1/32

1986年8月第一次印刷 印张：18

印数：平 0001—2,000 插页：精 2

精 0001 500 字数：478,000

统一书号：13031·3373

本社书号：4008·13—1

定价： 布面精装 6.15元

平 装 5.05元

《纯粹数学与应用数学专著》丛书

序　言

本书是关于整函数和亚纯函数理论的一本专著，主要总结五十年代以来这一理论的某些重要发展，重点讨论三个主要概念即亏值、渐近值和奇异方向间的关系.

1929年R. Nevanlinna通过对一些例子的考察，意识到例外值(亏值是在某种意义下的例外值)的问题和渐近值的理论有着内在的联系，并且预料研究两者之间的关系，有希望弄清楚整函数和亚纯函数理论中的一些最深刻的问题[32a].具体地说，他猜测亏值同时是一个渐近值[32a].但是，这个猜测后来被否定[37a,3a].1978年作者重新探讨了这个问题，发现下级为有穷的函数的亏值个数，渐近值个数和奇异方向个数之间存在着密切的关系，并且得到了一般性结果[43c].近些年来，这项工作又有了新的进展[43g,h,i]，对其它一些重要函数类，同样得到了相应的关系式.本书正是以介绍这些工作为主，兼顾系统性和某些近代研究成果而写成的.

全书共分六章：第一章介绍Nevanlinna初等理论，主要包括著名的第一和第二基本定理，以及亏量关系式.这些是全书的基础.

第二章介绍奇异方向理论，主要包括Julia方向和Borel方向的存在性证明，以及一些重要性质.另外，本章还在某种意义下，讨论和证明了Nevanlinna方向的存在性，这是吕以辇和作者的一项近期工作.

第三章介绍亏值理论.亏值是近代值分布理论研究的中心问题，这方面所得到的结果特别丰富多采.但是，限于篇幅，本章仅对有关亏值个数方面的工作进行比较全面和系统的论述.特别地，这里包括了Edrei-Fuchs和Weitsman等著名结果.对其证明多是重新给出的.

我们在上述三章的每章之后都写了一个注记，用以补充介绍正文部分未能述及的其它重要结果和相应的文献1).

1)读者要想比较全面地了解整函数和亚纯函数理论近代研究的问题和进展情况，可参阅文献[21d,f]，[2a]和[8a].

第四章介绍渐近值的基本理论和某些新的研究成果，主要包括经典的 Iversen 定理和 Ahlfors 证明 Denjoy 猜测的著名结果，以及作者的关于函数沿着渐近路径的增长性估计和渐近路径的长度估计.

上述四章同时是第五章和第六章的准备.最后两章是全书的重点.第五章对下级为有穷的整函数，讨论其亏值个数、渐近值个数和 Julia 方向个数之间的关系，以及对具有有穷条 Julia 方向或零点聚集在有穷条半直线邻域内的整函数，讨论其亏值个数、渐近值个数和下级之间的关系.第六章考虑亚纯函数的情况，对下级为有穷或具有极值亏量和的亚纯函数，讨论了相应的问题.但是，在这里需要用反函数的直接超越奇点个数取代渐近值的个数.

阅读本书只需要具有大学数学系复变函数论和实变函数论的知识.尽管如此，本书却最适合于研究生在导师指导之下学习整函数和亚纯函数理论时使用.

最后，我借此机会向庄圻泰教授表示衷心的感谢.正是在他的鼓励之下，作者才决定撰写此书，并且本书的写作纲要也是在和他的多次讨论中形成的.我还要向何育赞副教授表示感谢，他仔细地审阅和校对了作者的手稿，提出了许多宝贵的修正意见.另外，我向伍鹏程同志表示感谢，他多次誊写、校对和验算作者的手稿，没有他的帮助，也许本书要拖很长时间才能完成.本书稿在付印之前，还得到了吕以辇副教授的帮助，他在百忙中对全稿又作了一次认真的检查和审阅，在此也一并表示衷心的感谢.

张广厚

一九八三年五月

目　录

第一章　Nevanlinna 理论[1)]

本章是以后各章的必要准备，简要地介绍 Nevanlinna 理论的有关部分，其中包括了著名的第一和第二基本定理．这两个定理构成了 Nevanlinna 理论的基础．1925 年，R. Nevanlinna 首次发现了这两个定理，从而开创了亚纯函数值分布理论的近代研究．

§1.1. Poisson-Jensen 公式

1.1.1. Poisson-Jensen 公式

定理1.1　设 $f(z)$ 在圆 $|z|\leqslant\rho\ (0<\rho<+\infty)$ 上亚纯，$a_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 和 $b_j\ (j=1,2,\cdots,m)$ 分别是 $f(z)$ 在圆 $|z|<\rho$ 内的零点和极点，其中每个零点或极点出现的次数与其极相同，则对于任意值 $z=re^{i\theta}\ (0\leqslant r<\rho,\ 0\leqslant\theta<2\pi)$ 有

$$\log|f(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2-2\rho r\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\varphi$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\log\left|\frac{\rho(z-a_i)}{\rho^2-\bar{a}_iz}\right|-\sum_{j=1}^{m}\log\left|\frac{\rho(z-b_j)}{\rho^2-\bar{b}_jz}\right|. \qquad (1.1)$$

R. Nevanlinna 称(1.1)式为 Poisson-Jensen 公式[32a].

证．(1)我们首先假设 $f(z)$ 在圆 $|z|\leqslant\rho$ 上无零点和极点．于是，对于任意取定的一个点 $z_0=r_0e^{i\theta_0}\ (0\leqslant r_0<\rho,\ 0\leqslant\theta_0<2\pi)$，函数

$$\log f(z)\cdot\frac{\rho^2-|z_0|^2}{\rho^2-\bar{z}_0z}$$

1)本章基本文献，请参考[32a]和[21c]．

在圆 $|z|\leqslant\rho$ 上全纯. 根据 Cauchy 公式, 我们有

$$\log f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho}\log f(\zeta)\cdot\frac{(\rho^2-|z_0|^2)}{(\rho^2-\bar{z}_0\zeta)(\zeta-z_0)}d\zeta. \quad (1.2)$$

在圆周 $|\zeta|=\rho$ 上, 若记 $\zeta=\rho e^{i\varphi}$, 则有 $d\zeta=i\rho e^{i\varphi}d\varphi$ 和

$$(\rho^2-\bar{z}_0\zeta)(\zeta-z_0)=\rho e^{i\varphi}\{\rho^2-2\rho r_0\cos(\theta_0-\varphi)+r_0^2\}.$$

于是 (1.2) 式给出

$$\log f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f(\rho e^{i\varphi})\cdot\frac{(\rho^2-r_0^2)d\varphi}{\rho^2-2\rho r_0\cos(\theta_0-\varphi)+r_0^2}.$$

进一步取等式两边的实部, 则得到

$$\log|f(z_0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\frac{(\rho^2-r_0^2)d\varphi}{\rho^2-2\rho r_0\cos(\theta_0-\varphi)+r_0^2}.$$

由于 z_0 点的任意性, 我们证明了 (1.1) 式成立.

(2) 如果仅仅假设 $f(z)$ 在圆 $|z|<\rho$ 内无零点和极点, 而在圆周 $|z|=\rho$ 上可能具有有限个零点和极点, 则仍然可以证明 (1.1) 式成立. 事实上, 此时 (1.2) 式中的被积函数仅仅具有对数奇性, 因而积分仍然有意义. 在每个零点和极点处, 只需对积分线圆周 $|\zeta|=\rho$ 稍许作些改动, 然后通过极限过程, 即可证明 (1.2) 式成立, 从而 (1.1) 式也成立.

(3) 现在我们考虑一般情况. 置

$$\psi(z)=f(z)\cdot\prod_{j=1}^{m}\left\{\frac{\rho(z-b_j)}{\rho^2-\bar{b}_jz}\right\}\Big/\prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{\rho(z-a_i)}{\rho^2-\bar{a}_iz}\right\}, \quad (1.3)$$

则函数 $\psi(z)$ 在圆 $|z|<\rho$ 内全纯, 且无零点. 我们对 $\psi(z)$ 应用 (1.1) 式, 并且注意到当 $\zeta=\rho e^{i\varphi}$, $|a|<1$ 时,

$$\left|\frac{\rho(\zeta-a)}{\rho^2-\bar{a}\zeta}\right|=\left|\frac{\rho e^{i\varphi}-a}{\rho-\bar{a}e^{i\varphi}}\right|=\left|\frac{\rho-ae^{-i\varphi}}{\rho-\bar{a}e^{i\varphi}}\right|=1,$$

则得到

$$\log|\psi(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\frac{(\rho^2-r^2)d\varphi}{\rho^2-2\rho r\cos(\theta-\varphi)+r^2}.$$

再利用(1.3)式,即得(1.1)式.于是定理1.1完全得证.

当$f(0)\neq 0,\infty$时,如果在(1.1)式中命$z=0$,则得到

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|d\varphi$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\log\frac{\rho}{|a_i|}+\sum_{j=1}^{m}\log\frac{\rho}{|b_j|}. \tag{1.4}$$

(1.4)式称为Jensen公式.

1.1.2. Jensen-Nevanlinna公式

我们用

$$n(r,a)=n(r,f=a)=\begin{cases} n(r,f), & a=\infty,\\ n\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right), & a\neq\infty\end{cases}$$

表示方程$f(z)=a$在圆$|z|<r(0<r\leqslant\rho)$内根的个数(按重级计算),用

$$n(0,a)=n(0,f=a)=\begin{cases} n(0,f), & a=\infty,\\ n\left(0,\dfrac{1}{f-a}\right), & a\neq\infty\end{cases}$$

表示方程$f(z)=a$在原点$z=0$处的根的个数(重根按重级计算),并且置

$$N(r,a)=N(r,f=a)$$

$$
= \begin{cases} N(r,f) = \displaystyle\int_0^r \frac{n(t,a)-n(0,a)}{t}\,dt + n(0,a)\log r, & a = \infty, \\ N\left(r, \dfrac{1}{f-a}\right) = \displaystyle\int_0^r \frac{n(t,a)-n(0,a)}{t}\,dt + n(0,a)\log r, & \\ \qquad a \neq \infty. & \end{cases}
$$

于是,我们有

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \log \frac{\rho}{|a_i|} &= \int_0^{\rho} \left(\log \frac{\rho}{t} \right) dn(t,0) \\
&= \left(\log \frac{\rho}{t} \right) n(t,0) \Big|_0^{\rho} + \int_0^{\rho} \frac{n(t,0)}{t}\,dt \\
&= \int_0^{\rho} \frac{n(t,0)}{t}\,dt = N(\rho,0), \qquad (1.5)
\end{aligned}
$$

以及

$$
\sum_{j=1}^{m} \log \frac{\rho}{|b_j|} = \int_0^{\rho} \frac{n(t,\infty)}{t}\,dt = N(\rho,\infty). \qquad (1.6)
$$

另一方面,我们定义

$$
\log^+ x = \begin{cases} \log x, & x \geqslant 1, \\ 0, & 0 \leqslant x < 1. \end{cases}
$$

于是当 $x \geqslant 0$ 时,有

$$
\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}.
$$

置

$$
m(r,a) = m(r, f=a)
$$

$$
= \begin{cases} m(r, f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta, & a = \infty, \\[2ex] m\left(r, \dfrac{1}{f-a}\right) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \log^+ \dfrac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta, & a \neq \infty, \end{cases}
$$

则有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\rho e^{i\varphi})| d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(\rho e^{i\varphi})| d\varphi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(\rho e^{i\varphi})|} d\varphi \\
&= m(\rho, \infty) - m(\rho, 0).
\end{aligned} \tag{1.7}
$$

于是(1.4), (1.5), (1.6) 和 (1.7) 式给出

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(\rho e^{i\varphi})| d\varphi + \int_0^{\rho} \frac{n(t, \infty)}{t} dt
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(\rho e^{i\varphi})|} d\varphi \\
&\quad + \int_0^{\rho} \frac{n(t, 0)}{t} dt + \log |f(0)|,
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

$$
m(\rho, \infty) + N(\rho, \infty) = m(\rho, 0) + N(\rho, 0) + \log | f(0) |. \tag{1.9}
$$

当 $f(0) = 0$ 或 ∞ 时, 我们假设 $f(z)$ 在 $z = 0$ 点的邻域内的 Laurent 展式为

$$
f(z) = c_s z^s + c_{s+1} z^{s+1} + \cdots, \qquad c_s \neq 0.
$$

置 $f_1(z) = z^{-s} f(z)$,则 $f_1(z)$ 在圆 $|z| \leqslant \rho$ 上亚纯,并且 $f_1(0) = c_s$, 以及

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f_1(\rho e^{i\varphi})|d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|d\varphi-s\log\rho,$$

$$s=n(0,0)-n(0,\infty).$$

我们对 $f_1(z)$ 应用(1.8)式,则得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(\rho e^{i\varphi})|d\varphi+\int_0^{\rho}\frac{n(t,\infty)-n(0,\infty)}{t}dt\\&\qquad+n(0,\infty)\log\rho\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(\rho e^{i\varphi})|}d\varphi+\int_0^{\rho}\frac{n(t,0)-n(0,0)}{t}dt\\&\qquad+n(0,0)\log\rho+\log|c_s|,\end{aligned}$$

$$m(\rho,\infty)+N(\rho,\infty)=m(\rho,0)+N(\rho,0)+\log|c_s|. \tag{1.10}$$

(1.10)式称为 Jensen-Nevanlinna 公式.

§1.2. 特征函数

1.2.1. 特征函数的定义

设 $f(z)$ 是圆 $|z|<R(0<R\leqslant+\infty)$ 内一个不恒为零的亚纯函数.我们在(1.9)式中易 ρ 为 $r(0<r<R)$,并且定义

$$T(r,f)=m(r,f)+N(r,f), \tag{1.11}$$

则(1.9)和(1.10)式又可分别写为

$$T(r,f)=T\left(r,\frac{1}{f}\right)+\log|f(0)|, \tag{1.12}$$

$$T(r,f)=T\left(r,\frac{1}{f}\right)+\log|c_s|. \tag{1.13}$$

R. Nevanlinna 称 $T(r,f)$ 为 $f(z)$ 的特征函数.[32a]

1.2.2. Cartan 恒等式

我们寻求 $T(r,f)$ 的一个新的表示式,并且证明 $T(r,f)$ 的两个重要性质.根据(1.4)式,对任意一个复数 a[1] 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|a-e^{i\theta}|d\theta=\begin{cases}\log|a|, & |a|\geqslant 1,\\ \log|a|-\log|a|=0, & |a|<1,\end{cases}$$

即有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|a-e^{i\theta}|d\theta=\log^+|a|. \tag{1.14}$$

我们首先假设 $f(0)\neq\infty$. 当 $f(0)\neq e^{i\theta}$ 时,对 $f(z)-e^{i\theta}(0\leqslant\theta<2\pi)$ 应用(1.7)和(1.9)式,得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})-e^{i\theta}d\varphi\\&\quad=N\left(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)-N(r,f)+\log|f(0)-e^{i\theta}|,\end{aligned}$$

其中 $0<r<R$. 固定值 r,对 θ 求积分,则有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})-e^{i\theta}|d\varphi\\&\quad=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N\left(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)d\theta-N(r,f)\\&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(0)-e^{i\theta}|d\theta.\end{aligned}$$

---

1) 在本书中,复数包括 ∞.

进一步根据(1.12)和(1.14)式得到

$$T(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N\left(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)d\theta+\log^+|f(0)|. \tag{1.15}$$

这就是所谓的Cartan恒等式.[9b]

其次我们假设 $f(0)=\infty$. 设 c_s 是 $f(z)$ 在 $z=0$ 点邻域内展式中的首项非零系数. 我们对 $f(z)-e^{i\theta}$ 应用(1.7)和(1.10)式,则得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})-e^{i\theta}|d\varphi=N\left(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)-N(r,f)$$
$$+\log|c_s|,$$

$$T(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N\left(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)d\theta+\log|c_s|. \tag{1.16}$$

当固定 θ 时, $N(r,e^{i\theta})$ 是 r 的非减函数. 于是根据(1.15)和(1.16)式,我们判定 $T(r,f)$ 是 r 的非减函数,并且有

$$\frac{dT(r,f)}{d\log r}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}n(r,e^{i\theta})d\theta.$$

从而进一步判定 $T(r,f)$ 是 $\log r$ 的凸函数.

1.2.3. 关于特征函数的几个不等式

设 $a_1,a_2,\cdots,a_p$ 是任意 p 个复数,则有

$$\log^+\left|\prod_{\nu=1}^p a_\nu\right|\leqslant\sum_{\nu=1}^p\log^+|a_\nu|; \tag{1.17}$$

$$\log^+\left|\sum_{\nu=1}^p a_\nu\right|\leqslant\sum_{\nu=1}^p\log^+|a_\nu|+\log p. \tag{1.18}$$

相应地,对于圆 $|z|<R\,(0<R\leqslant+\infty)$ 内任意 p 个亚纯函数 $f_1(z),f_2(z),\cdots,f_p(z)$ 有

$$m\left(r, \sum_{v=1}^{p} f_v\right) \leqslant \sum_{v=1}^{p} m(r, f_v) + \log p,$$

$$m\left(r, \prod_{v=1}^{p} f_v\right) \leqslant \sum_{v=1}^{p} m(r, f_v).$$

其中 $0 < r < R$. 另一方面，当 $f_v(0) \neq \infty\ (v = 1, 2, \cdots, p)$ 时又有

$$N\left(r, \sum_{v=1}^{p} f_v\right) \leqslant \sum_{v=1}^{p} N(r, f_v),$$

$$N\left(r, \prod_{v=1}^{p} f_v\right) \leqslant \sum_{v=1}^{p} N(r, f_v).$$

于是根据(1.11)式，我们得到

$$T\left(r, \sum_{v=1}^{p} f_v\right) \leqslant \sum_{v=1}^{p} T(r, f_v) + \log p, \tag{1.19}$$

$$T\left(r, \prod_{v=1}^{p} f_v\right) \leqslant \sum_{v=1}^{p} T(r, f_v). \tag{1.20}$$

当 $R > 1$ 时，如果只考虑 $1 \leqslant r < R$ 时的情况，则条件 $f_v(0) \neq \infty$ $(v = 1, 2, \cdots, p)$ 可以去掉.

1.2.4. 全纯函数的最大模和特征函数间的关系

设 $f(z)$ 是圆 $|z| < R\ (0 < R \leqslant +\infty)$ 内的一个全纯函数. 置

$$M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|,$$

则有不等式

$T(r, f) \leqslant \log^{+} M(r, f)$