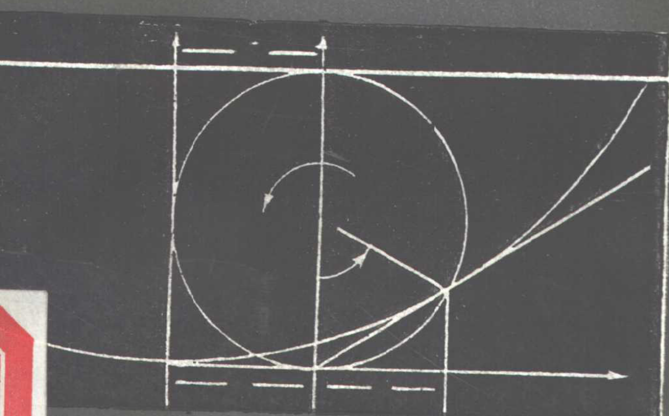
# 理论力学范例分析



吕茂烈 主编

陕西科学技术出版社

# 理论力学范例分析

吕茂烈　主编

陕西科学技术出版社

**理论力学范例分析**
吕茂烈　主编
陕西科学技术出版社出
（西安北大街131号）
陕西省新华书店发行　　乾县印刷厂印刷
开本850×1168　1/32　印张13.5　　字数 323，000
1986年6月第1版　　1986年6月第1次印刷
印数1—4，000
统一书号：7202·87　　定价：2.60元

# 编者的话

为了配合大学工科理论力学课程的教学需要，我们编写了这本书。它取材于多年来的教学实践，讲法新颖。通过对一些典型例题的分析和讨论，详尽地阐述了解题的一般思路、基本方法和技巧，并注重理论的综合运用，弥补了一般教材的不足。供读者学习时参考。

本书由西北工业大学理论力学教研室白振林、肖尚彬、董秋泉、林撷仙、张德昌、蔡泰信、孙海润、户英超、弋崇义、孙国锟、赵俊三、吕茂烈编写。全书由吕茂烈统一修改定稿，陈松淇审阅。全书由王建华描图。

由于编者水平所限，书中一定有不少缺点和错误，希望广大读者批评指正。

编　者

一九八三年二月

封面设计 杨文涛

统一书号：7202·87
定 价：2.60元

# 目　录

# 一、平面力系

本单元讨论平面静力学问题，包括力系的简化和力系的平衡两类问题。

作用于刚体的平面任意力系一般可简化为一个作用于任选简化中心的力和一个力偶，其特征分别用主矢$\mathbf{R}'$和主矩$M_0$（或$L_0$）来表示

$$\mathbf{R}'=\Sigma\mathbf{F},\qquad M_0=\Sigma m_0(\mathbf{F}).\qquad(1-1)$$

如$\mathbf{R}'=0$，$M_0\neq0$，则原力系简化为一个矩为$M_0$的力偶。这个力偶矩（主矩）不因简化中心位置不同而改变。

如$\mathbf{R}'\neq0$，$M_0=0$，则作用在点O的力$\mathbf{R}=\mathbf{R}'$，就是原力系的合力。

如$\mathbf{R}'\neq0$，$M_0\neq0$，则可将原力系进一步简化为作用于别处的合力$\mathbf{R}$。合力$\mathbf{R}$的大小和方向仍由主矢$\mathbf{R}'$决定；合力$\mathbf{R}$的作用线位置可由合力矩定理来确定。

平面任意力系平衡的充分和必要条件是

$$\mathbf{R}=0,\quad M_0=0.$$

它可以表示为下列各种形式的平衡方程

$$\Sigma F_x=0,\quad\Sigma F_y=0,\quad\Sigma m_0(\mathbf{F})=0,\qquad(1-2)$$

式中矩心O可取力系作用面内任何一点；或者

$$\Sigma F_x=0,\quad\Sigma m_A(\mathbf{F})=0,\quad\Sigma m_B(\mathbf{F})=0,\qquad(1-3)$$

这时矩心A和B的连线不应垂直于投影轴x；或者

$$\Sigma m_A(\mathbf{F})=0,\quad\Sigma m_B(\mathbf{F})=0,\quad\Sigma m_C(\mathbf{F})=0,\qquad(1-4)$$

这时矩心A、B和C三点不应在一条直线上。

对于平面特殊力系，独立平衡方程的数目减少为二或一。

当一个刚体受平面任意力系作用而平衡时，可以用平衡方程求解三个未知量。

在开始解题时要重视受力分析的训练，遵循一般的解题步骤，并对习题的类型进行概括。在熟练以后要重视方法的多样化和灵活运用。

## A 力系的简化

**例1—1 共点力系的合力** 在结构物的一个节点O上作用着六个力，各力的大小是：$F_1=40N$，$F_2=50N$，$F_3=60N$，$F_4=70N$，$F_5=80N$，$F_6=90N$，方向如图1—1a所示。求这六个力的合力。

**解算**

（一）作图法

选取适宜的力比例尺1cm＝40N（过大和过小都影响作图精度）。由任一点A按$F_1$，$F_2$，$F_3$，$F_4$，$F_5$，$F_6$的次序绘出力多边形ABCDEFI，包括其封闭边$\overrightarrow{AI}$（图1—1b），并注意各矢量的指向。$\overrightarrow{AI}=R$就是所求的合力。量出$\overrightarrow{AI}$的长度是1.25cm，乘以所选的力比例尺，得合力的大小$R=1.25\times40=50N$。合力R的方向可由方位角θ表出，即由轴x正向起按逆钟向转到R的作用线量得$\theta=313°$。

（二）解析法

选取坐标系OXY如图1—1a所示。求得合力R的两个投影

$$R_x=\Sigma F_x=F_1\cos30°+F_2\cos45°-F_3\cos60°-F_4+F_6\cos45°=33.62N,$$

$$R_y=\Sigma F_y=F_1\sin30°+F_2\sin45°+F_3\sin60°-F_5-F_6\sin45°=-36.32N.$$

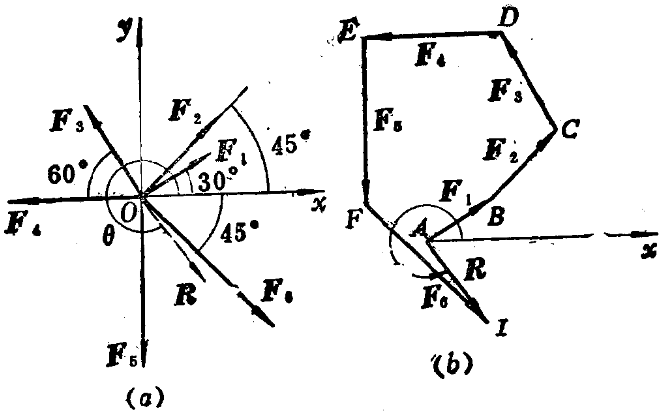



图1—1

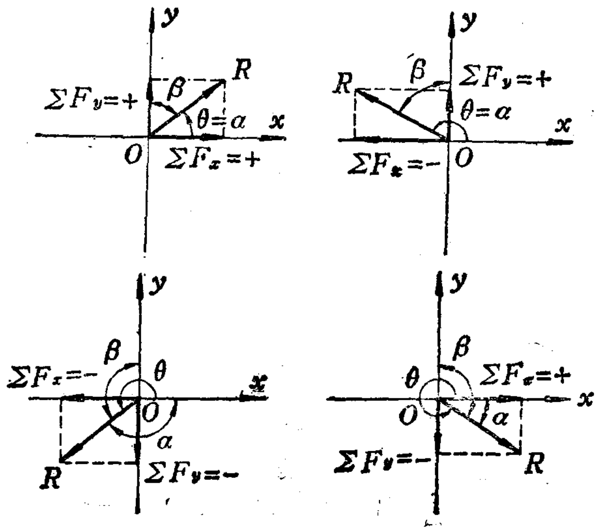
于是，合力R的大小和方向分别是

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}=49.5\text{N},$$

$$\theta=\arctan\frac{R_y}{R_x}=\arctan(-1.080)=312°48'.$$

**讨论** 反正切是多值的，为了唯一地确定θ值，还需要参考投影$R_x$，$R_y$的正负号，弄清楚合力是在哪个象限内。由图1－1c可见下列关系。注意：方位角的大小可取0到2π间的任何值，一般规定由基线（如本例的轴x）按逆钟向计量。当然也可以按相反的方向计量，并以负值表示所得结果。对于本例，可取θ＝－47°12′。

| $\Sigma F_x$的符号 | $\Sigma F_y$的符号 | θ的象限 | α | β |
|---|---|---|---|---|
| + | + | Ⅰ | $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ | $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ |
| － | + | Ⅱ | $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ | $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ |
| － | － | Ⅲ | $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ | $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ |
| + | － | Ⅳ | $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ |




(c)

图1—1

合力R作用线的方向也常用R与轴x，y正向间夹角α，β（取值小于π）来确定。有

$$\cos\alpha=\frac{R_x}{R},\qquad \cos\beta=\frac{R_y}{R}.$$

**例1—2 平面图形重心的确定** 求图1—2a所示匀质薄板的重心位置。已知OA段的轮廓是抛物线：$y^2=\frac{2b^2}{a}x$，且$a=70$cm，$b=56$cm。

**分析** 重心是平行力系中心的特例。本例的薄板可分划为三块简单形状的图形。把每块的重力加在它自己的重心上，组成三个力的平行力系，其合力就是整个薄板的重量，作用线始终通过其重心，并可用合力矩定理来确定其位置。

**解算** 把整个薄板分划为矩形DEHI，ABIJ以及一边为抛物线的三角形OAJ，如图1—2b所示。

为求OAJ的重量大小，可采用积分法。为此取面积元素

$$dS_1 = y\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{2b^2x}{a}}\,dx.$$

如薄板每单位面积的重量$\gamma$=常数，则$dS_1$的重量$dG_1$

$$= \gamma dS_1$$

$$= \gamma\sqrt{\frac{2b^2x}{a}}\,dx.$$

故OAJ的重量

$$G_1 = \int_{S_1} dG_1 =$$

$$\gamma b\sqrt{\frac{2}{a}}\int_0^{2a} x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{8}{3}\gamma ab.$$

这个重力$\mathbf{G}_1$作用在OAJ的重心$C_1$

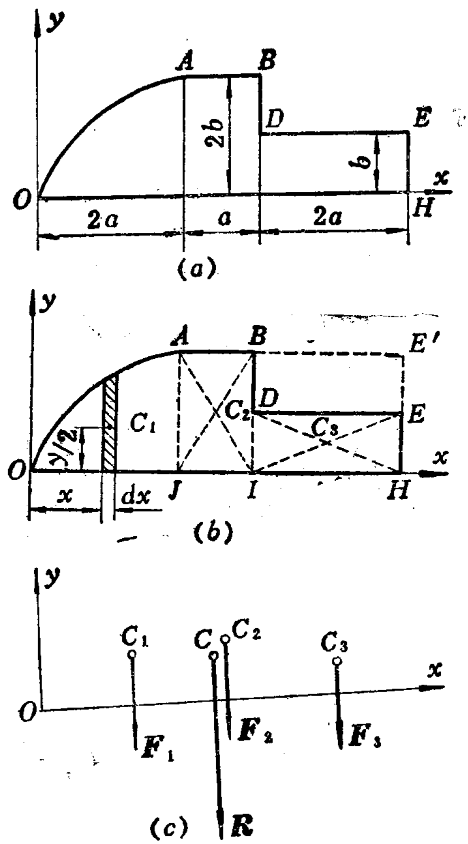



图1—2

$(x_{c1},\ y_{c1})$上，如图1—2c所示。

由合力矩定理，有

$$m_0(\mathbf{G}_1) = -x_{c1}G_1 = \Sigma\, m_0(\Delta\mathbf{G}_1).$$

但 $$\Sigma\, m_0(\Delta\mathbf{G}_1) = -\int_0^{2a} x\,dG_1 =$$

$$= -\int_0^{2a}\sqrt{\frac{2b^2}{a}}\,x^{\frac{3}{2}}\,dx = -\frac{16}{5}ba^2\gamma.$$

代入上式，求得$c_1$的横坐标

$$x_{C_1}=\frac{-\sum m_{o}(\Delta G_1)}{G_1}=\frac{6}{5}a.$$

为求重心$c_1$的纵坐标$y_{c1}$，只须把薄板转过90°而放置，这相当于把重力按反方向转90°，再次应用合力矩定理，求得

$$y_{c1}=\frac{3}{4}b.$$

现在可以来求整个薄板的重心位置。矩形ABIJ和DEHI的重量$G_2$和$G_3$，重心$c_2(x_{c2},\ y_{c2})$和$c_3(x_{c3},\ y_{c3})$的位置都容易知道，和前面的结果合并起来，可列表如下

| | $G_i$ | $x_{ci}$ | $G_ix_{ci}$ | $y_{ci}$ | $G_iy_{ci}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| OAJ | $\frac{8}{3}ab\gamma$ | $\frac{6}{5}a$ | $\frac{16}{5}a^2b\gamma$ | $\frac{3}{4}b$ | $2ab^2\gamma$ |
| ABIJ | $2ab\gamma$ | $\frac{5}{2}a$ | $5a^2b\gamma$ | $b$ | $2ab^2\gamma$ |
| DEHJ | $2ab\gamma$ | $4a$ | $8a^2b\gamma$ | $\frac{1}{2}b$ | $ab^2\gamma$ |
| | $\sum G_i=\frac{20}{3}ab\gamma$ | | $\sum G_ix_{ci}=\frac{81}{5}a^2b\gamma$ | | $\sum G_iy_{ci}=5ab^2\gamma$ |

于是，由合力矩定理求得整个薄板的重心C（即平行力系$G_1$，$G_2$，$G_3$的中心）位置，有

$$x_c=\frac{\sum G_ix_{ci}}{\sum G_i}=2.43a,$$

$$y_c=\frac{\sum G_iy_{ci}}{\sum G}=0.75b.$$

以a，b的值代入，得

$$x_c=170.1\text{cm},\qquad y_c=42\text{cm}.$$

**讨论**

（一）在计算的过程和结果中可以看出，常量乘子γ（匀

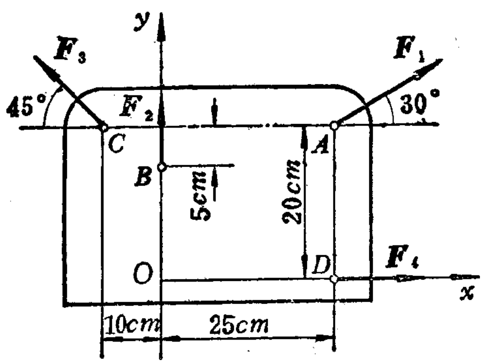
质薄板每单位面积上的重量）对重心的位置是不起作用的。因此，用表面积代替重量并不影响点C在薄板中的位置。这样的点C就是面积的形心。

（二）所谓重心的位置都以本身为参考。选取不同坐标系，可以改变重心C的坐标，但不能改变点C在物体上的确定位置。

（三）把薄板分划为几个部分是任意的。例如也可以用矩形AE′HJ和BE′ED来代替原来的两个矩形。但现在BE′ED代表被切去的面积，因而它的重量应看为负值。

**例1—3　平面任意力系的合力**　在平板上作用四个力：$F_1=35N$，$F_2=20N$，$F_3=30N$，$F_4=25N$。各力的方向和作用点位置如图1—3a所示。求力系的合力。

**解算**　选取点O作为简化中心，并取如图1—3a所示



(a)

图1—3

的坐标系Oxy。把力系向点O简化，得主矢**R**′和主矩$L_o$，且

$$R_x' = \Sigma F_x = F_1\cos30° - F_3\cos45° + F_4$$

$$= 34.1N,$$

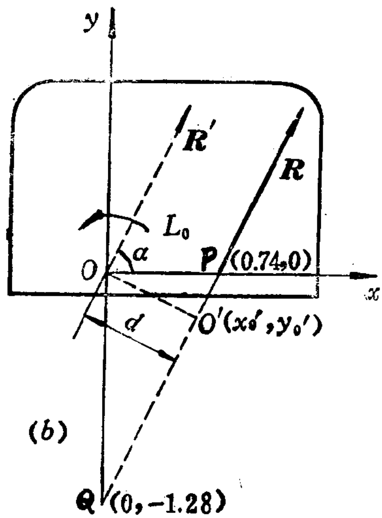



图1—3

$$R''_y = \Sigma F_y = F_1 \sin 30^\circ + F_2 + F_2 \sin 45^\circ$$
$$= 58.7\text{N}.$$
$$R' = \sqrt{R'^2_x + R'^2_y} = 67.9\text{N}.$$

主矢R′在第一象限内，它与轴x正向间夹角α求得为

$$\alpha = \arccos\frac{R'_x}{R} = \arccos 0.502 = 59^\circ 51'$$

又 $$L_0 = \Sigma m_0(\mathbf{F}) = 25 \times F_1 \sin 30^\circ - 20 \times F_1 \cos 30^\circ$$
$$+ 20 \times F_3 \cos 45^\circ - 10 \times F_3 \sin 45^\circ$$
$$= 43.43\text{N}\cdot\text{cm}.$$

可见，这个力系有合力R，其大小和方向由主矢R′确定。设合力作用线通过O′，且$\overline{OO'} \perp \mathbf{R}$，则由合力矩定理，有

$$m_0(\mathbf{R}) = \sum m_0(\mathbf{F}).$$

但 $$m_0(\mathbf{R}) = \overline{OO'}\cdot R,$$ 故得

$$\overline{OO'}=\frac{\sum m_0(\mathbf{F})}{R}=\frac{43.43}{67.9}=0.64\text{cm}.$$

注意，合力作用线位于简化中心O的哪一侧，要由主矩$L_0$的转向来决定。本例主矩转向为正值，即逆钟向，因而合力**R**的作用线必在简化中心O点的右侧（当顺着**R**′方向看）。

**讨论** 有时需要写出合力作用线的方程。设作用线通过之点的坐标是x、y，则有

$$m_0(\mathbf{R})=xR_y-yR_x, \tag{a}$$

从而由合力矩定理就得到合力的作用线方程

$$xR_y-yR_x=L_0. \tag{b}$$

以本例中的$R'_x$，$R'_y$，$L_0$代入式（b），则合力的作用线方程写成

$$43.43=58.7x-34.1y.$$

为形象起见，可以求出**R**作用线和轴x，y的交点$P(x_P, 0)$，$Q(0, y_Q)$。以$y_P=0$，$x_Q=0$分别代入上式，得

$$x_P=0.74\text{cm},\qquad y_Q=-1.28\text{cm}.$$

显然，合力**R**的作用线通过P(0.74，0)和Q(0，-1.28)两点，如图1—3 b所示。

## B 平面基本力系的平衡

**例1—4 简支梁的平衡** 水平梁AB的支座如图1—4 a所示。在梁的中点D作用倾斜45°的力$P=20$kN。不计梁的自重和摩擦，试求支座A和B的反力。

**分析** 这是单个物体(梁AB)的平衡问题，约束是典型的，包括一个活动支座和一个固定支座。考察这个物体的平衡时，应把约束解除，代之以约束反力，画出平衡物体的受

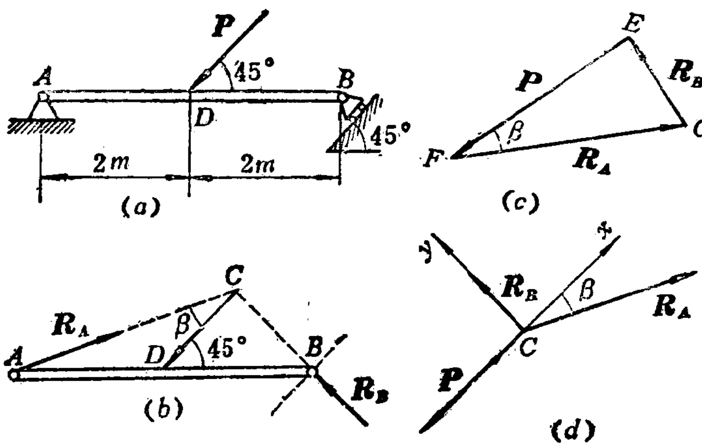



图1—4

力图（图1—4 b），它只包含三个力，其中活动 支 座B的反力$R_B$必垂直于支承面，而固定支座A的约束反 力$R_A$的 方向则可根据不平行三力平衡时的汇交定理来确定。这三个力的汇交点是C。这样，就可以利用平面汇交力系平衡条件求未知反力了。

**解算**

（一）几何法

平面汇交力系平衡的几何条件是力多边形自行封闭。现在力多边形蜕化为力三角形。这闭合力三角 形 可 按下法作出：首先画出已知力P，然后，从矢量$P=\overrightarrow{EF}$的始端E和末端F分别画出与大小未知的力$R_B$和$R_A$相平行的直线，得交点G。在闭合力三角形EFG的周边顺着EFG的方 向 标出箭头，则矢 量$\overrightarrow{FG}$和$\overrightarrow{GE}$就分别表示出所求反力$R_A$和$R_B$。如图1—4 c 所示。如果作图时采用了一定的比例尺，就可以从图中直接量出反力$R_A=\overrightarrow{FG}$和 $R_B=\overrightarrow{GE}$的大小和方向。

但是，对于本例也可以利用三角法中的正弦定理求出未知反力。由图1—4 c 可见，ΔEFG是直角三 角 形，所以

有

$$R_B = P\tan\beta, \qquad R_A = \frac{P}{\cos\beta},$$

其中角β可由图1—4 b所示的几何条件求得，有

$$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \tan\beta = \frac{1}{2}.$$

代入上式，得

$$R_A = 22.4\text{kN}, \quad R_B = 10\text{kN}.$$

（二）解析法

在力系的汇交点C选取Cxy坐标系如图1—4 d，根据平面汇交力系的平衡条件，有

$$\Sigma F_x = 0; \qquad R_A\cos\beta - P = 0 \tag{1}$$

$$\Sigma F_y = 0; \qquad R_B - R_A\sin\beta = 0 \tag{2}$$

从而解得

$$R_A = \frac{P}{\cos\beta} = 22.4\text{kN},$$

$$R_B = P\tan\beta = 10\text{kN}.$$

**讨论** 如果梁上作用的主动力是平面任意力系，则可按例1—3的方法先求出它的合力，此后的解法就和本例相同。有时主动力系合成为力偶，此时，问题的解法可参看例1—7。但是，在一般情况下，是利用平面任意力系的三个平衡方程求解。

**例1—5 两个倾斜面间圆柱的平衡** 在光滑的斜面OA和OB间，放置两个彼此相接触的光滑匀质圆柱，如图1—5 a所示。圆柱$C_1$重$P_1 = 50\text{N}$，圆柱$C_2$重$P_2 = 150\text{N}$，圆柱的重心位于图纸平面内。求圆柱能在图示位置平衡时，中心线$C_1C_2$与水平轴OX所成的夹角φ。并求圆柱对斜面的压力，以及在圆柱间的压力大小。

**分析** 这是物体系的平衡问题。对于这类问题要根据题中所给出的已知条件和待求量来恰当地选取研究对象。本例