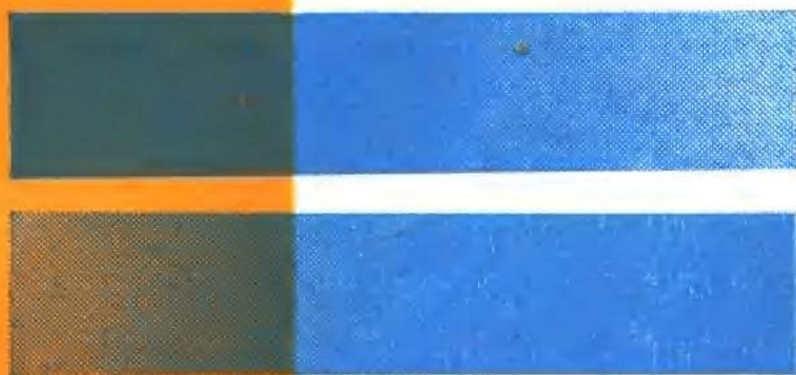




样书

静力学与材料力学

刘相臣 陈国铨 陈天富 编著

01

重庆大学出版社

内 容 简 介

本书分七章编写，第一章是静力学，旨在为材料力学和后续课程打好起码的基础，而不是通常教材中的静力学的全部内容；第二章是力和变形，在体系上作了较大的变动；第三章是弯曲，包括弯曲内力，强度和变形及弯、拉（压）组合强度；第四章是扭转，包括扭、弯组合强度；第五章是能量法和静不定；第六章是压杆的稳定性；第七章是材料的几个重要机械性能。基本实验编入了相应各章。

本教材适用于高等工业学校少学时各专业及中等学时的部份专业，也可作为成人教育的教材和工程技术人员自学用书。

静力学与材料力学

刘相臣 陈国铨 陈天富 编著

责任编辑 周 任

*

重庆大学出版社出版发行

新华书店经销

重庆印制一厂印刷

*

开本：787×1092 1/16 印张：12.5 字数：312 千

1990年2月第1版

1990年2月第1次印刷

印数：1—5,000

标准书号：ISBN 7-5624-0236-1

O·34

定 价：2.52元

编 者 的 话

作为工科院校的力学课程,无论是门数、名称、学时数……,目前均尚不一致也难统一。为解决少学时专业的理论力学、材料力学教学用书,特将静力学与材料力学合并为一门课,编写成一本书。编者的愿望是让读者具有工程结构的构件(零件)的平衡、受力分析及强度等方面的基本知识和计算能力。

本书曾于1983年8月完稿并铅印成册,在本校试用过三遍,且有部份高等院校作为教材用过两遍,编者在此基础上进行了修改,认为将此书命名为《静力学与材料力学》仍然是恰当的。

在编写和修改过程中,力求做到基本概念明确,内容简明扼要,由浅入深,并在体系上作了较大的变动。

本书内容有静力学、力和变形、弯曲、扭转、能量法和静不定、压杆稳定、材料的主要机械性能等。编者在编写过程中注意到了以下几方面:①对于静力学部分不是追求完整的内容,也不拘泥于现有各类教材的体系,而是舍去与物理学重复的力学部份,取其必要的精华,并紧扣后续内容并为后续内容打基础。②力和变形部份,在体系上与现行教材有很大的差别,根据编者的实践,新体系有利于读者对工程实际问题的分析和处理,也可节约不少学时。③突出能量法,把它作为求解实际问题的重要手段。④扩大了材料的机械性能的内容并在相应部份编入了实验。

讲授本书的时间约50~60学时,不仅可供少学时各专业使用,也可作为各类成人教育学院和部份中等专业学校学生的教材。

本书由刘相臣编写第一章、第三章、第五章,陈国铨编写第二章、第四章及附录,陈天富编写第六章、第七章及各部份的实验和第五章的习题。此外殷兴荣曾参加过原铅印试用教材的一些章节的编写。

这本书的问世,将会获得读者的不吝赐教,在此预先表示感谢。

在出版过程中,朱庆祥副教授、周任同志对本书给予了热情的支持和帮助,编者特致以真诚的感谢。

编者 1988.1

目 录

第一章 静力学	(1)
§ 1-1 静力学的任务.....	(1)
§ 1-2 约束与约束反力.....	(2)
§ 1-3 物体的受力分析及受力图.....	(3)
§ 1-4 平面汇交力系的平衡方程式.....	(4)
§ 1-5 平面一般力系.....	(6)
§ 1-6 空间力系.....	(9)
习题.....	(12)
答案.....	(16)
第二章 力和变形	(17)
§ 2-1 变形固体及其基本假设.....	(17)
§ 2-2 材料力学的任务.....	(18)
§ 2-3 外力及其分类.....	(18)
§ 2-4 内力、截面法.....	(19)
§ 2-5 应力.....	(20)
§ 2-6 应变.....	(24)
§ 2-7 应力应变图.....	(25)
§ 2-8 许用应力的确定.....	(29)
§ 2-9 斜截面上的应力.....	(30)
§ 2-10 二向应力状态的莫尔圆.....	(33)
§ 2-11 弹性变形和虎克定律.....	(37)
§ 2-12 横向变形和广义虎克定律.....	(39)
§ 2-13 应力集中.....	(43)
§ 2-14 拉伸试验.....	(44)
§ 2-15 压缩试验.....	(49)
习题.....	(51)
答案.....	(57)
第三章 弯曲	(59)
§ 3-1 强度条件和刚度条件.....	(59)
§ 3-2 剪力和弯矩.....	(59)
§ 3-3 弯曲应力.....	(65)
§ 3-4 弯曲变形.....	(72)
§ 3-5 弯曲和拉伸载荷下的组合应力.....	(79)
§ 3-6 电测梁的正应力.....	(81)
习题.....	(85)

答案.....	(89)
第四章 扭转.....	(91)
§ 4-1 扭转的概念.....	(91)
§ 4-2 等直圆轴扭转时的应力.....	(91)
§ 4-3 外力偶矩和扭矩的计算.....	(95)
§ 4-4 圆轴扭转时的变形.....	(8)
§ 4-5 圆轴扭转时的强度和刚度计算.....	(98)
§ 4-6 扭转时的破坏分析.....	(101)
§ 4-7 圆柱形密圈螺旋弹簧.....	(102)
§ 4-8 弯曲与扭转的组合变形.....	(106)
§ 4-9 扭转试验.....	(110)
习题.....	(113)
答案.....	(116)
第五章 能量法和静不定系统.....	(117)
§ 5-1 外力功与弹性变形能.....	(117)
§ 5-2 变形能的计算.....	(117)
§ 5-3 单位载荷法.....	(119)
§ 5-4 图形互乘法.....	(121)
§ 5-5 静不定问题的实例及特点.....	(127)
§ 5-6 按变形能法解静不定问题.....	(128)
习题.....	(134)
答案.....	(138)
第六章 压杆的稳定性.....	(141)
§ 6-1 压杆稳定的概念.....	(141)
§ 6-2 细长压杆的临界力、欧拉公式.....	(143)
§ 6-3 杆端支承方式对临界压力的影响.....	(145)
§ 6-4 大柔度杆的临界应力及其适用范围.....	(147)
§ 6-5 中、小柔度杆的临界应力 临界应力总图.....	(149)
§ 6-6 用能量法求临界力.....	(153)
§ 6-7 压杆的稳定性计算.....	(156)
§ 6-8 提高压杆稳定性的措施.....	(162)
习题.....	(162)
答案.....	(165)
第七章 材料的重要机械性能.....	(166)
§ 7-1 冲击韧性.....	(166)
§ 7-2 硬度.....	(168)
§ 7-3 交变应力下材料的持久极限.....	(169)
附录 I 构件截面的几何性质.....	(173)
§ I-1 截面的静矩和形心.....	(173)

§ I-2 惯性矩和惯性积.....	(175)
§ I-3 平行移轴公式.....	(176)
习题.....	(178)
答案.....	(182)
附录 II 型钢表.....	(183)
附录 III 单位及单位换算表.....	(192)

第一章 静力学

§ 1-1 静力学的任务

静力学是研究受力物体的平衡规律问题。它涉及到：作用于物体的诸力间的相互关系、力系的平衡条件以及力系的简化和物体的受力分析。无论是吊车、轧钢机、桥梁，甚至是匀速直线飞行的飞机等，相对于地面保持静止或匀速直线运动的状态，称为平衡状态。

若作用在物体上的诸力使该物体处于平衡状态，该物体必须满足一定的条件，通常把这个条件称为力系的平衡条件，并叫此力系为平衡力系。很显然，对于物体平衡的研究，事实上则是研究作用于物体上的力系的平衡条件，并把它用于处理工程实际问题。

要研究力系的平衡条件，需要将力系进行简化和等效力替换，如图1-1(a)所示的轧钢机的轧辊，受到沿轧辊长度 ($CD=l$) 而均匀分布的力，轧辊上受到的这个力则可用一个大小等于 ql 并作用在轧辊中点的集中力来替换，轧辊将在轴承反力 R_A 、 R_B 和主动力 ql 的作用下处于平衡状态。见图1-1(b)、(c)。

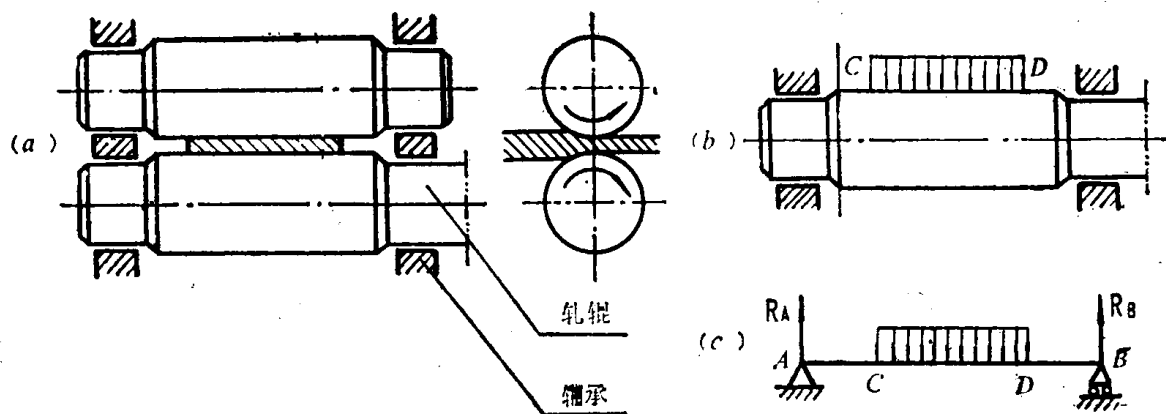


图 1-1

这里所讨论的物体只限于刚体，刚体是不变形的物体，由于研究物体的平衡，把本来会发生变形的物体“刚化”起来，这对于物体的平衡不仅无害反使我们容易建立计算模型，这是完全必要的。但是在分析物体是否发生破坏时，其变形便不可忽略。图1-2是两个大小相等方向相反的力作用在同一物体上：

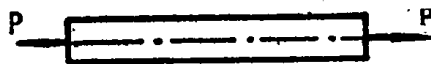


图 1-2

1. 在两个力作用下处于平衡，视为刚体而不研究变形，即任意两点之间的距离保持不变。

2. 探求此物体是否会破坏？ P 力可以是无穷大吗？此问题将在本书第二章予以讨论。

生活经验告诉我们，静止似乎是平衡的同义语，但是，工程实际中最常见的传动轴是作旋转运动的物体，它的平衡问题很值得注意。如图1-3所示的汽车主传动轴 AB 作匀速转

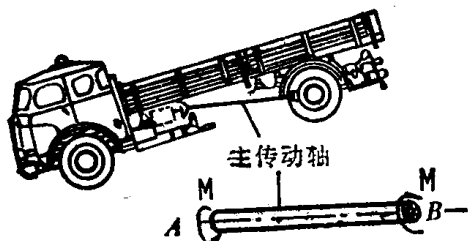


图 1-3

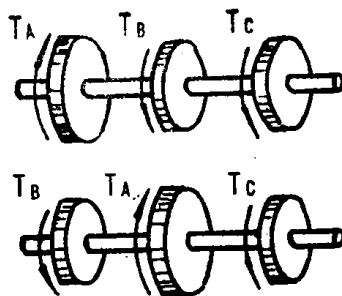


图 1-4

动, 受到相等而相反外力偶矩的作用, 因而轴 AB 是处于平衡状态的。同理, 如果图 1-4 所示的外力偶矩 T_A 、 T_B 、 T_C 满足力系的平衡条件, 那么, 该轴也是处于平衡状态的。在这里, 不能误解为传动轴只会受到使之旋转的力偶矩作用, 当伴随其它外力产生时, 仍然有个平衡问题。

§ 1-2 约束与约束反力

不受限制而可作任意运动的物体是自由的物体, 简称自由体, 限制物体的运动并使它成为非自由体的条件, 称为约束。如果对受约束的物体施以外力, 那么, 该物体将施力于约束, 这约束将以大小相等而方向相反的力作用于物体, 这种由约束产生的力叫约束反力。常见的约束及其反力如下:

1. 理想光滑平面上的反力 (不计摩擦) N_A 、 N_B 指向这个面的法线方向如图 1-5。

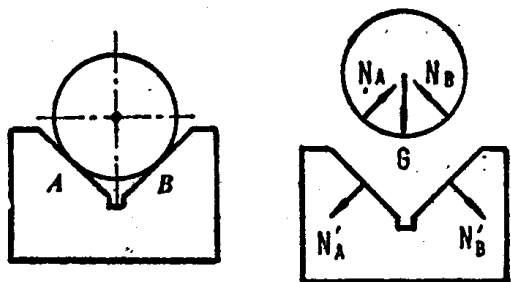


图 1-5

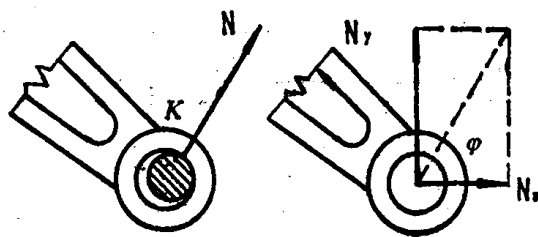


图 1-6

2. 圆柱铰链。图 1-6。这是用圆柱形销钉穿过圆孔而连接起来的两物体的组合体。且可绕销钉轴线而旋转, 若不计摩擦, 实为两个光滑面相接触, 这种被称为铰链的反作用力 N 通过铰链中心, 但方向是任意的, 然而可用两个正交分量 N_x 和 N_y 表示, 即

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2}; \quad \tan \varphi = \frac{N_y}{N_x}$$

3. 梁及其支座如图 1-7。两支座中, 一为可动的 (如 B), 一为固定的 (如 A)。 B 端有可能沿所在平面自由地移动, 它的反力 Y_B 垂直于滚轴运动的平面, 而固定支座 A 的反力 Y_A 的方向可能是任意的, 当然也可以分解为两个互相垂直的分力, 在目前的特定条件下, Y_A 只能是铅直向上的。

如图 1-8 所示的固定端 (或插入端) 约束, 可联想到在车床上用三爪夹盘夹持被车工件的情况。在 A 处, 显然既要约束工件的左右移动, 上下移动, 还要约束其转动, 因此反力为

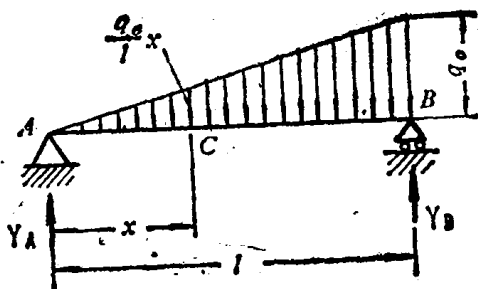


图 1-7

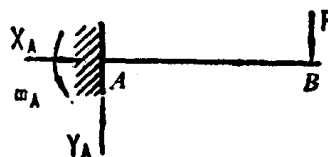


图 1-8

图示的水平反力 X_A ，垂直反力 Y_A 和反力偶 m_A 。

4. 柔索的反力沿其轴线而背离物体，如钢丝绳、皮带、链条对物体的约束。

§ 1-3 物体的受力分析及受力图

力是物体间相互的机械作用，这种作用于物体上的力可分为两类：一类是主动力（如引力、气压等）；一类是约束对于物体的约束反力。在对物体进行受力分析时要正确的处理以下几个问题：

(1) 确定研究对象，并把研究对象从整体结构中分离出来使之成为“自由体”，且单独画出其轮廓图。

(2) 画出“自由体”所承受的全部主动力。

(3) 根据约束的性质画出“自由体”上的约束反力。把“自由体”及其受力情况的图叫做受力图。

例如如图 1-9 所示的两端用铰链支承的梁上，安放着一起重机，欲对梁的受力情况进行分析并作受力图，应首先取梁为自由体，把它从图 1-9 中分离出来，其次将作用在梁上的主动力 N_C 和 N_D 画出，再将支承 A 、 B 对梁的约束反力 R_A 、 R_B 画在梁上即是。

又如需画图 1-10(a) 所示的上料车的受力图。已知料车连同载荷共重为 G ，略去车轮与轨道之间的摩擦，以料车为研究对象单独画出如图 1-10(b)，受力图上的力有作用在重心 C 点处的重力 G ，钢绳的拉力 T 及轨道约束反力 N_A 、 N_B 。

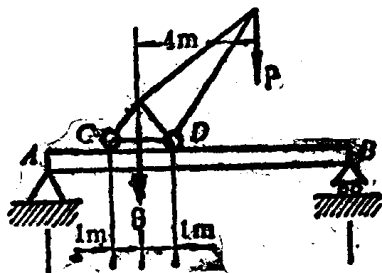


图 1-9

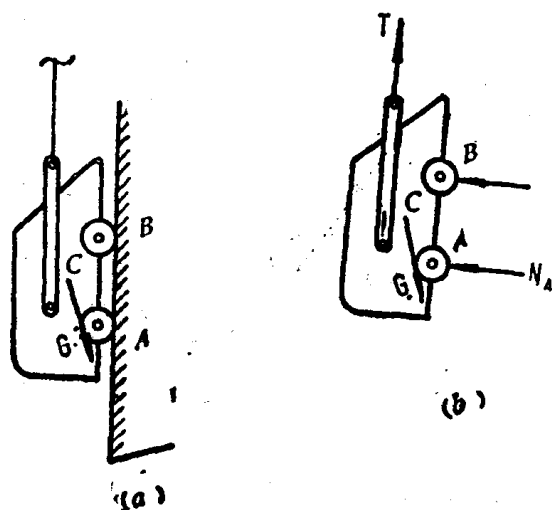


图 1-10

图 1-11(a) 的液压夹具，是通过油压力 P 达到压紧工件 C 的目的， AD 杆和 AB 杆的受力如图 1-11(b)、1-11(c) 所示。

上述各类情况中，图 1-9 所示的各力是相互平行的力；图 1-10(b) 表明各力既有平行又有

相交；图1-11(b)(c) 则是两个力作用在同一根杆上并使该杆平衡，通常称为二力杆，其中P与N₁，N₂与N₃系两对大小相等方向相反作用共线的力，它们不同于作用力与反作用力间的关系，前者是作用在同一物体上的两个力，而后者则是作用在两个物体上的。

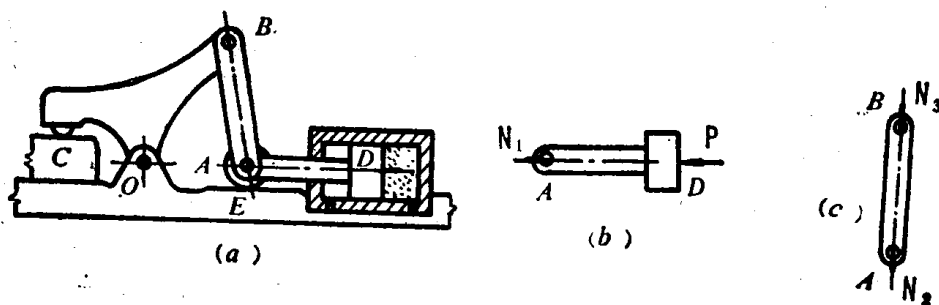


图 1-11

§ 1-4 平面汇交力系的平衡方程式

如果作用在物体上的各个力的作用线，不仅同在一平面内，且相交于一点，这样的力系叫做平面汇交力系。设在刚体上如图1-12(a) 作用着平面汇交力系 F_1, F_2, F_3, F_4 ，其作用线汇交于A点，若用几何方法将这些力合成为图1-12(b)所示，R为其合力，其矢量和为

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

若为 n 个力，则

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i = \Sigma F$$

若物体处于平衡状态，合力R应等于零，所以汇交力系平衡的必要与充分条件是合力等

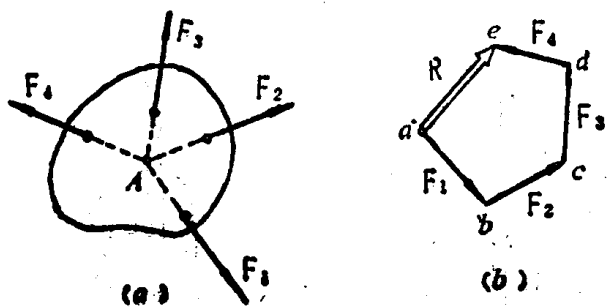


图 1-12

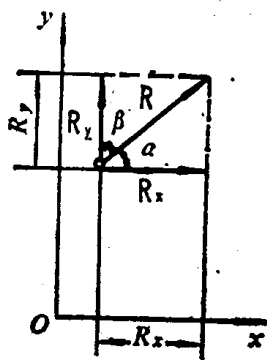


图 1-13

于零。将合力R在两个互相垂直的坐标轴上投影如图1-13，则力R的大小可由下式决定

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

而R则可视作 $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ 的合力，这些力在 x, y 轴上的投影为

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \Sigma F_x = \Sigma X$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \Sigma F_y = \Sigma Y$$

$\therefore$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2}$$

由于平衡条件要求 $R=0$ 即

$$R = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2} = 0$$

由此可得平面汇交力系的两个平衡方程

$$\left. \begin{array}{l} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \end{array} \right\} \quad (1-1)$$

即平面汇交力系平衡的条件是各力在 x 轴和 y 轴上投影的代数和分别等于零。公式 (1-1) 称为平面汇交力系的平衡方程式。这两个平衡方程在力学上的意义是：如果物体没受有与 x 轴和 y 轴平行的力作用，也就不会有与任何方向平行的运动，即处于平衡状态。利用这两个平衡方程，可以求解两个未知力，如果未知力的数目超过平衡方程的数目，仅仅根据静力学平衡方程便得不到解答，这类问题称为“静不定”（或“超静定”）问题。

例 1 图1-14(a)所示吊环，由斜杆 AB 、 AC 与横梁 BC 组成， $\alpha = 20^\circ$ ，吊重 $P = 500 \text{ kN}$ ，求斜杆受到的力 S 。

解：吊环的计算简图和节点 A 的受力情况如图1-14(b) 所示。

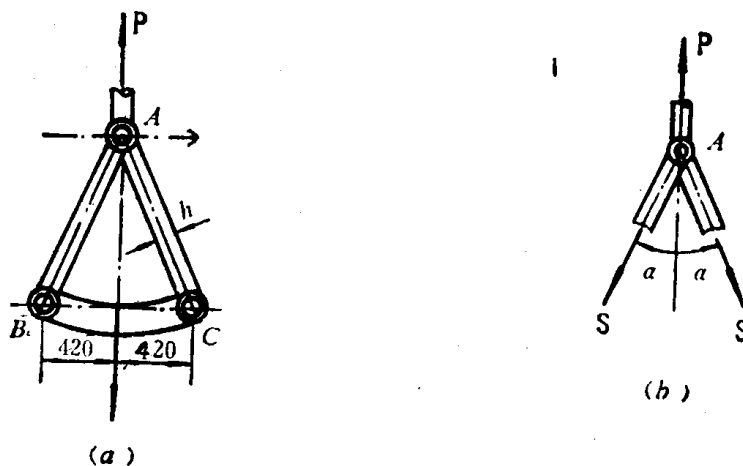


图 1-14

由节点的平衡方程

$$\sum X = 0 \quad S \sin \alpha = S \sin \alpha \quad \text{得} \quad S_{AB} = S_{AC}$$

$$\sum Y = 0 \quad P - 2S \cos \alpha = 0$$

$$S = \frac{P}{2 \cos \alpha} = \frac{500}{2 \cos 20^\circ} = 266 \text{ kN}$$

例 2 图1-15(a)所示结构，在节点 B 处受垂直载荷 P 作用，计算1, 2杆受的力。

解：节点 B 的受力情况表示在图1-15(b)上，根据 B 点的平衡方程

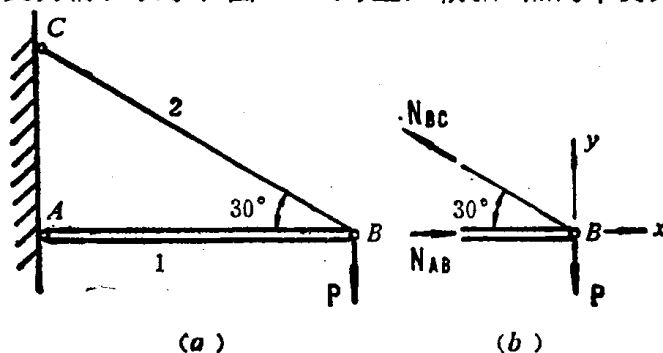


图 1-15

和

$$\sum X=0 \quad N_{AB}-N_{BC}\cos 30^{\circ}=0$$

$$\sum Y=0 \quad N_{BC}\sin 30^{\circ}-P=0$$

求得1、2杆受到的力分别为

$$N_{AB}=\sqrt{3}P$$

$$N_{BC}=2P$$

若在图1-15(b)中将任一杆的力改变方向,会出现什么现象呢?读者将会发现,在静力学平衡方程中的各量虽不变,但符号将会随力的方向改变而不同,这就要求我们注意对所设各力的指向,要力求与实际相符。

§ 1-5 平面一般力系

作用在物体上各力的作用线处于同一平面内,且为任意分布的力系,称为平面一般力系。例如图1-15(a)所示的结构中,若AB系具有自重G的横梁,那么,在横梁上有吊重P、自重G和BC杆的拉力 N_{BC} 以及A处的约束反力 H_A 、 R_A ,这些力组成的力系就是平面一般力系。如图1-11(a)中的杠杆BOC,受到AB杆给它的力 N'_1 ,工件给它的反力 N_5 ,以及固定铰支座O的反力 N_{Ox} 、 N_{Oy} 如图1-16(a)。以及图1-16(b)所示的受力情况,亦为平面一般力系。

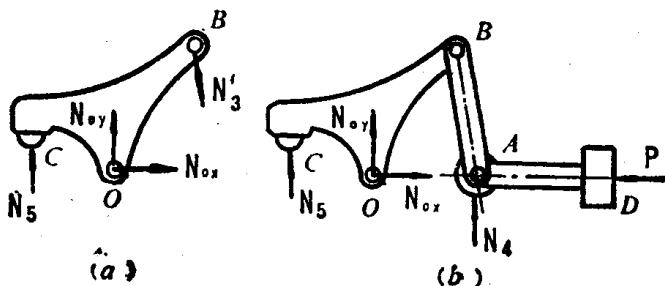


图 1-16

当作用在物体上的各力,虽然并不处在同一平面内,但由于所承受的各力及其结构具有同一个对称面,也可以当作平面一般力系,这种情况在实际工程中甚为常见。

1. 力的平移

在将物体视为刚体时,作用在物体上的力P可平移到任一点,而不改变其对物体的作用效果,但同时必须附加一力偶,此附加力偶的矩等于原力P对新作用点的矩。

在图1-17(a)所示力P作用于B点,若将力P平行移到O点,可设想在O点加上一对与力P平行的反向,等值,共线的力 P' 和 P'' ,由于 $P'=P''$,所以并不影响力P对物体的作用效果,

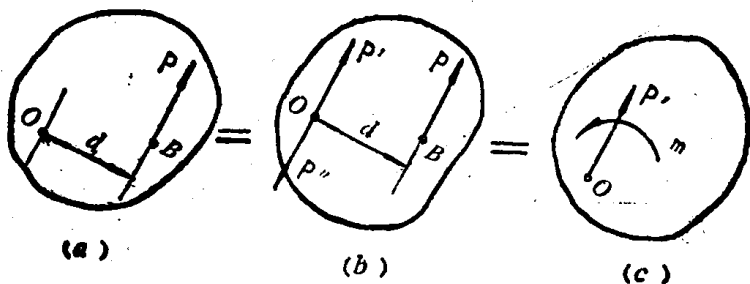


图 1-17

见图1-17(b)。(P, P')为一力偶,故原作用于B点的力P与作用于点O的P'和力偶(P, P')等效。力偶(P, P')称为附加力偶如图1-17(c),其力偶矩为

$$m = Pd = m_0(P)$$

可见附加力偶的力偶矩等于原力P对于新作用点之矩。

欲求皮带的张力对电机轴如图1-18的外伸部份的作用效果,按照力的平移便可知在皮带张力2T的作用下,该轴受到的力是2T和顺时针力偶矩2TR;而在T的作用下,该轴受到的力则是T和反时针力偶矩TR,此时,电机轴受到的是力偶矩

$$m = 2TR - TR = TR$$

力

$$P = 2T + T = 3T$$

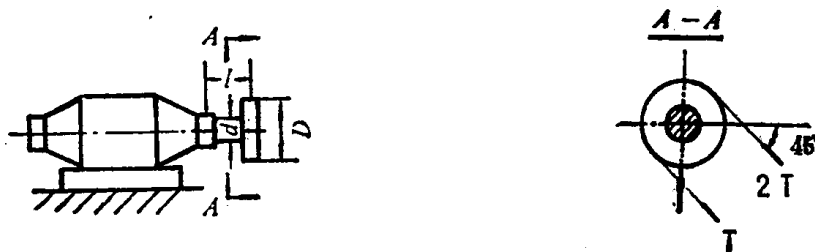


图 1-18

2. 力系的简化及其平衡条件

假设有 $F_1, F_2, \dots, F_n$ 等力作用于物体上,图1-19(a),且为平面一般力系。若选O点为简化中心,将各力都平移到O点,所得力偶矩分别为 $m_1 = F_1 d_1, m_2 = F_2 d_2, m_n = F_n d_n$,图1-19(b),由此可知,原力系虽为平面一般力系,却可用平面汇交力系和平面力偶系来代替。而汇交力系又可合成为合力R,而力偶系又可加起来成为合力偶 M_0 ,图1-19(c)。

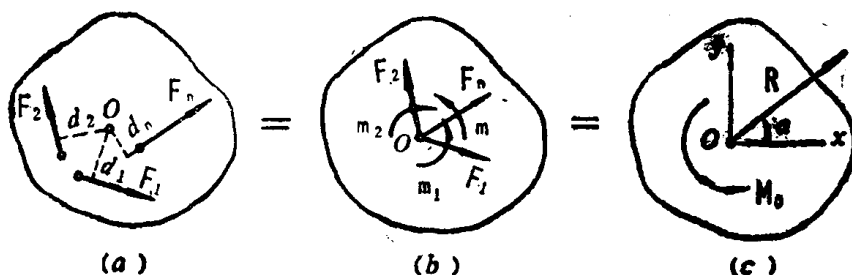


图 1-19

若物体上受到 n 个力的作用,向已知中心简化后,可得到一个力,称为主向量(或主矢)

$$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i$$

在 oxy 坐标系中

$$\left. \begin{aligned} R_x &= X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum X \\ R_y &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = \sum Y \end{aligned} \right\}$$

即主向量R等于平面一般力系中各力的矢量和,用解析式可表示为

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2}$$

简化后得到的力偶矩M,称为原平面一般力系的主矩,即

$$M_0 = m_1 + m_2 + \dots + m_n = m_0(F_1) + m_0(F_2) + \dots + m_0(F_n)$$

$$= \sum_{i=1}^n m_0(F_i)$$

即主矩 M_0 等于原平面一般力系各力对简化中心 O 点力矩的代数和。

若主向量 R 和主矩 M_0 都不为零或其中任一个不为零，力系处于不平衡状态；要使平面一般力系作用下的物体平衡，其必要和充分条件是 R 和 M_0 都等于零，即

$$R = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2} = 0$$

$$M_0 = \sum_{i=1}^n m_0(F_i) = 0$$

故

$$\left. \begin{aligned} \sum X &= 0 \\ \sum Y &= 0 \\ \sum m_0(F) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

即平面一般力系平衡的条件是：所有各力在两任选垂直坐标轴 X 、 Y 上投影的代数和分别等于零，且这些力对于平面内任一点的力矩的代数和也等于零。公式 (1-2) 称为平面一般力系的平衡方程。它还有其它的表达形式，如二矩式：

$$\left. \begin{aligned} \sum X &= 0 \text{ (或 } \sum Y = 0) \\ \sum m_A(F) &= 0 \\ \sum m_B(F) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

此时 A 、 B 两点的连线不能垂直于 X 轴（或 Y 轴）。三矩式：

$$\left. \begin{aligned} \sum m_A(F) &= 0 \\ \sum m_B(F) &= 0 \\ \sum m_C(F) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

此时 A 、 B 、 C 三点不能在同一直线上。

例 3 求放在支座 A 和 B 上的水平梁的支座反力见图 1-20。

(1kg=10N)

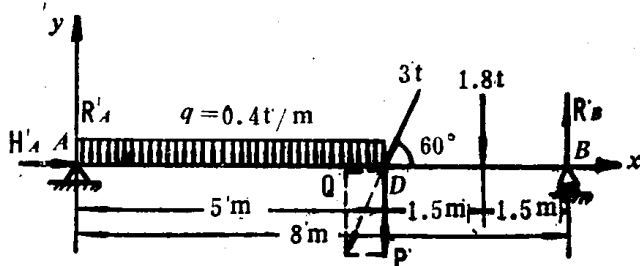


图 1-20

解 (1)选取坐标轴；(2)以支反力代替支座的作用，假定反力 H_A 、 R_A 、 R_B 的方向如图所示；(3)将30kN的力分解为 $Q = 30\cos 60^\circ = 15\text{kN}$ 和 $P = 30\sin 60^\circ = 26\text{kN}$ ，均布载荷用等效力 $4 \times 5 = 20\text{kN}$ 代替。(4)列平衡方程

$$\sum m_A(F) = 0 + 20 \times 2.5 + 26 \times 5 + 18 \times 6.5 - R_B \times 8 = 0$$

得

$$R_B \approx 37\text{kN}$$

$$\sum m_B(\mathbf{F}) = 0 \quad R_A \times 8 - 20 \times 5.5 - 26 \times 3 - 18 \times 1.5 = 0$$

得

$$R_A \approx 27 \text{ kN}$$

校验: 由

$$\sum Y = 0$$

$$27 - 20 - 26 - 18 + 37 = 0$$

无误。

再由

$$\sum X = 0 \quad H_A - 15 = 0$$

得

$$H_A = 15 \text{ kN}$$

故支座A的总反力

$$R = \sqrt{H_A^2 + R_A^2} = \sqrt{15^2 + 27^2} = 31 \text{ kN}$$

§ 1-6 空间力系

如果作用于物体上的力系的作用线不在同一平面内, 这种力系叫做空间力系。如图1-21所示的传动轴受到皮带拉力 S_1 、 S_2 、斜齿轮D而产生的圆周力 P_t 、径向力 P_r 以及止推轴承A处的反力 X_A 、 Y_A 、 Z_A , 径向轴承B处的反力 X_B 、 Z_B 等不在同一平面内的空间力系的作用, 见图1-21(b)。

空间力系也包括汇交力系、平行力系和一般力系, 现着重讨论空间一般力系。

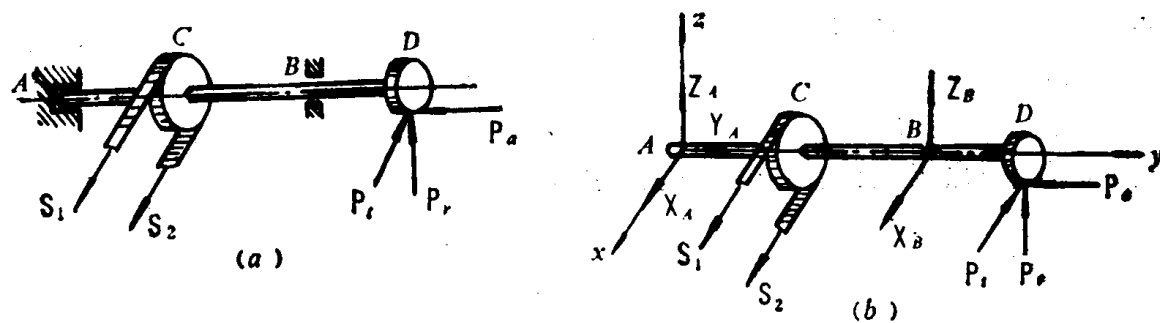


图 1-21

1. 力在空间直角坐标轴上的投影

作用在物体上的 P 力与坐标轴 X 、 Y 、 Z 之间的夹角分别为 α 、 β 、 γ 如图1-22, 则 P 力在 X 、 Y 、 Z 坐标轴上的分量为

$$P_x = P \cos \alpha = X$$

$$P_y = P \cos \beta = Y$$

$$P_z = P \cos \gamma = Z$$

显然

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

还可采用二次投影方法以求得 P 力在坐标轴上的投影, 即先将力投影到 xoy 坐标面上, 以 P' 表示, 再将 P' 投影到 x 轴和 y 轴上得

$$P_x = P \sin \gamma \sin \varphi$$

$$P_y = P \sin \gamma \cos \varphi$$

2. 力对轴之矩

若 P 力和 C 点都位于 S 平面内如图1-23, 显然 P 力对 C 点之矩 $m_C(P)$ 也就等于 P 力对于与 S

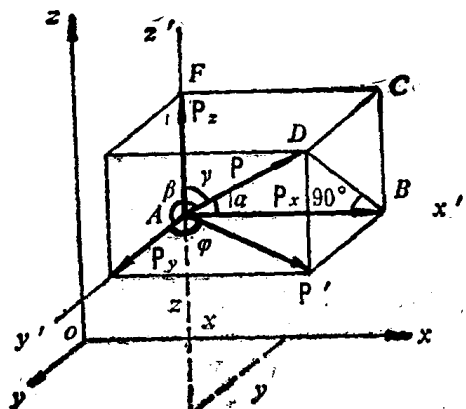


图 1-22

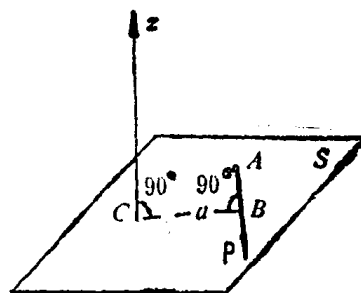


图 1-23

平面垂直而穿过C点的Z轴之矩 $m_z(P)$ ，可以认为对于C点的转动同时也就是对于这个轴Z的转动。在图1-21中，圆周力P使齿轮绕轴心转动，同样可认为是P力使齿轮绕过轴心的Y轴转动，因此

$$m_o(P) = m_z(P) = \pm Pa$$

正负号表示力对轴之矩的转向，如果顺着Z轴的正向一端往下看，观察者看到P力使得平面S顺时针转动，规定这个力矩的符号为负，反之为正见图1-24。可见，力P对轴Z之矩 $m_z(P)$ 的大小等于力P在垂直于轴的平面内的分力和它与轴间的垂直距离的乘积，符号如上述。若S与Z轴在同一平面内时（力与轴相交或与轴平行）力对轴的矩为零。当推门时手给门的作用力平行于转轴或与转轴相交时，门将不被推动，就是这个原因如图1-25。

无论是力对轴之矩还是力对点之矩，它们的单位都是牛米（或Nm）。

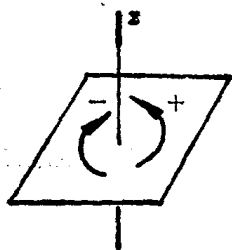


图 1-24

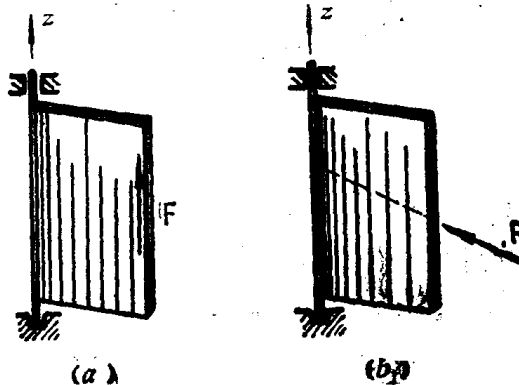


图 1-25

3. 空间力系的平衡条件

与平面一般力系类似，空间一般力系也可向任意点简化，得一个主向量 R' 和主矩 M_o ，大小分别为

$$R' = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2 + (\sum Z)^2}$$

$$M_o = \sqrt{[\sum m_x(F)]^2 + [\sum m_y(F)]^2 + [\sum m_z(F)]^2}$$

空间一般力系若要满足平衡，应该是 $R'=0$ ， $M_o=0$ ，即

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X &= 0 \\ \Sigma Y &= 0 \\ \Sigma Z &= 0 \\ \Sigma m_x(F) &= 0 \\ \Sigma m_y(F) &= 0 \\ \Sigma m_z(F) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

所以空间一般力系的平衡条件是所有各力在三个坐标轴上投影的代数和分别等于零，对三个坐标轴之矩的代数和也分别等于零。

若为空间汇交力系，如选择汇交点 O 为原点的空间直角坐标系 $OXYZ$ ，则各力对三坐标轴之矩均为零，因而此时的平衡方程仅有

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X &= 0 \\ \Sigma Y &= 0 \\ \Sigma Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

若为图1-26所示的空间平行力系， Z 轴与力系平行，则各力对于 Z 轴的矩等于零，又由于 X 轴和 Y 轴都与这些力垂直，所以各力在这两轴上的投影也等于零，因此空间平行力系的平衡方程仅有

$$\left. \begin{aligned} \Sigma Z &= 0 \\ \Sigma m_x(F) &= 0 \\ \Sigma m_y(F) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

例4 利用悬在绳索 CEF 的荷重 Q 来关闭的门 $ABCD$ ，该绳索跨过定滑轮 E 和 F ，门开成 α 角，由作用于门高二分之一处 K 点的 P 力维持门的平衡，这个力与门的平面垂直，若铰链 A 的反力为 X_a 、 Y_a 、 Z_a ，铰链 B 的反力为 X_b 、 Y_b 、 $Z_b=0$ ，求 P 力及铰链的反力，见图1-27。

27。

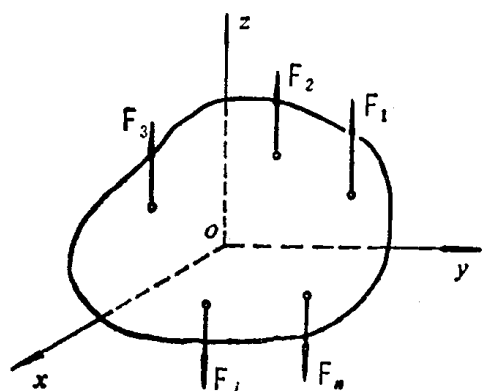


图 1-26

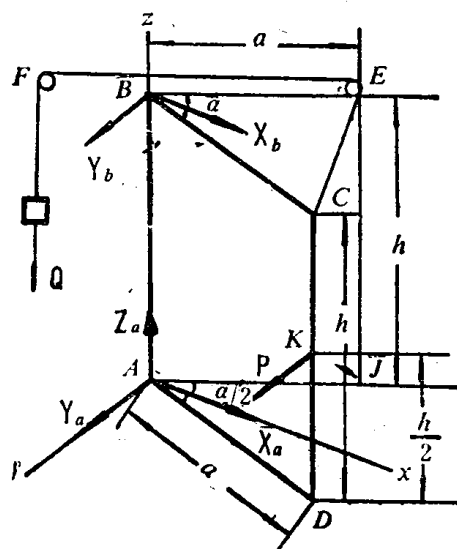


图 1-27

解：

(1) 取门为自由体。

(2) 选定图示坐标轴。

(3) 画出作用于门上的力，即 P 、 Q 、 X_a 、 Y_a 、 Z_a 、 X_b 、 Y_b 。其中 Q 的大小、方向为