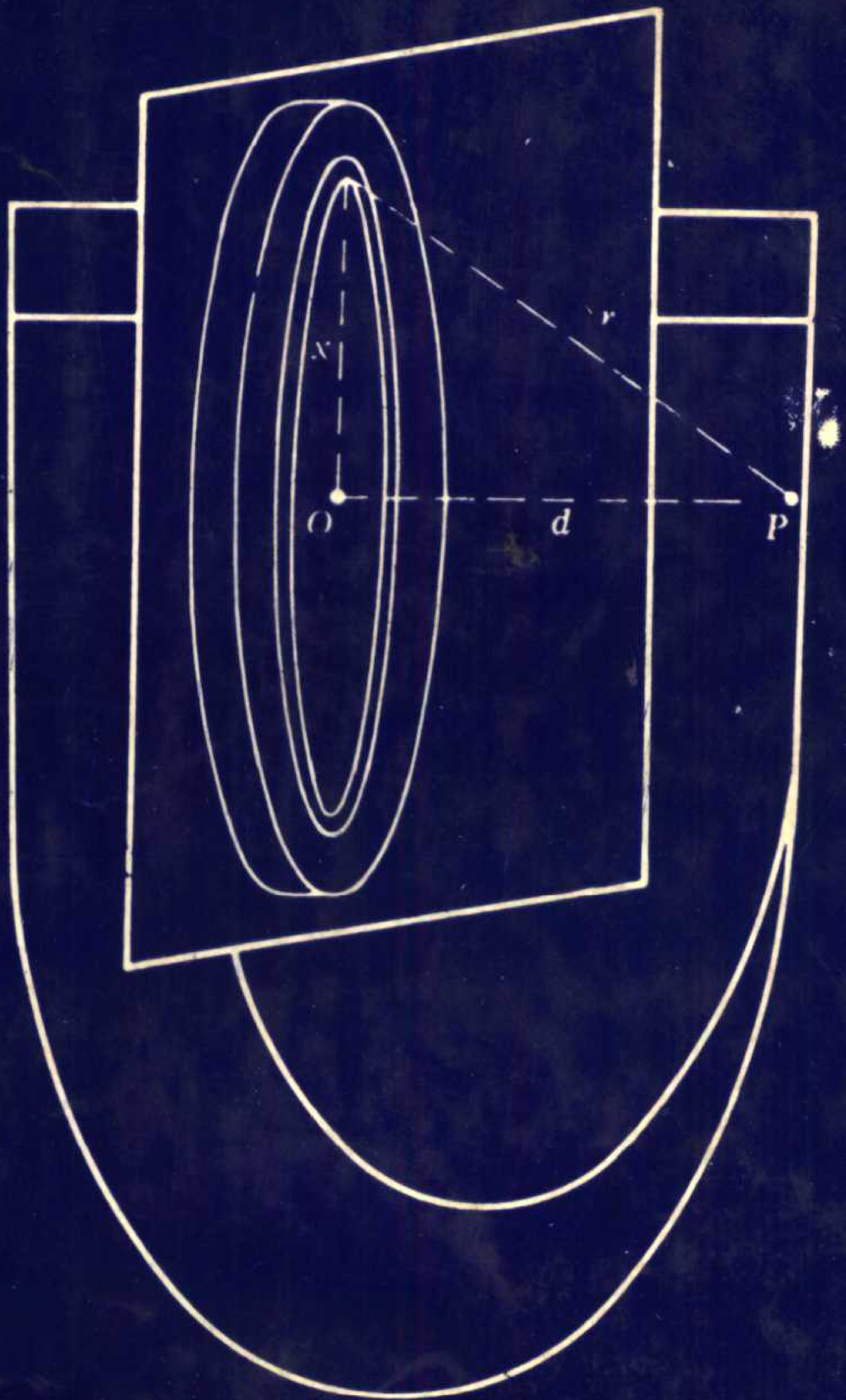
微积分在物理学中的应用



[美] Richard Dalven
徐志东 袁玉辉 编译

西南交通大学出版社

微积分在物理学中的应用

Richard Dalven〔美〕原著
编译 徐志东
袁玉辉
主审 张庆福

西南交通大学出版社

微积分在物理学中的应用
WEIJIFEN ZAI WULIXUE ZHONG DE YINGYONG
徐志东　袁玉辉　编译
*
西南交通大学出版社出版发行
（四川　成都）
西南交通大学出版社印刷厂印刷
*
开本：787×1092　1/32　印张：6.25
字数：130 千字　印数：1—3000 册
1991 年 7 月第 1 版　1991 年 7 月第 1 次印刷
ISBN 7—81022—193—0/O·029
定价：1.70 元

编译者的话

许多学生比较熟悉微积分运算技巧，然而步入普通物理学习阶段，用微积分解决实际问题时，常因理解导数、微分和积分的具体意义而苦恼。本书的目的就是想在微积分、物理两门课程间搭上一座桥梁，尝试解决脱节中的一些问题。

本书取材于〔美〕Richard Dalven 所著《Calculus for physics》一书，该书着重阐明用于物理的微积分几个基本观点的意义和用法。从物理的角度强调，导数就是变化率，微分当作小量以及积分就是微元求和。在此基础上通过物理中大量实例的引导，将这些概念反复运用，逐步加深，以达灵活掌握，举一反三的目的。书末附有适量的练习题，并给出答案及部分难题题解，便于读者进行练习和自我检查。

原书共三章，第一章变量、函数与图象，第二章导数与微分，第三章求和与积分。编译者根据我国普通物理教学实情，删去了原著第一章中的函数图象等内容，增加了矢量与矢量函数，在第二章中去了一些重复内容，增添了一些应用实例，在第三章中增加了积分变量的选择及矢量函数的积分。第四章微积分在物理学中的综合应用是编译者新加的，其目的是从导数、微分、积分不同侧面来全面分析研究同一较复杂的物理问题，以期培养读者综合分析能力。限于编译者的水平，书中错误难免，特望读者能给予批评指正。

编译者　1990 年 12 月

目　录

第一章　变量、函数

第二章　导数与微分

第三章　求和与积分

第一章 变量、函数

变量、函数是学习和使用微积分必须搞清的基本概念。本章将从物理的角度，而不是以数学观点来叙述这些概念，同时顺带介绍后续各章要用到的一些名词术语。

§1—1 变量与函数

一、变量与函数

1. 变量

在讨论某个问题时，可取不同数值的量称为变量。例如当谈及几何中的圆时，圆的半径 r 就是一个变量。

2. 常量

在讨论某个问题时，仅取一个固定值的量称为常量。例如6、21、π 等都是常量。表示常量的数称为常数。常量与变量是两个明显不同的概念。

3. 函数

联系两个变量间的某个对应规则称为函数。例如，假定在某变化过程中有两个变量 x 和 y，并且变量 y 依赖于变量 x，对于 x 的每个确定值，依照某个对应规则，y 都有相应值与之对应，那么就称 x 和 y 之间存在函数关系。所谓变量的函数，是指由这些变量和常量所组成的解析表达式，例如

$$y = x^2 \tag{1—1}$$

当 $x=2$ 时，由上式可得 $y=4$。对式（1—1）我们可以说，变量 y 是变量 x 的函数，或简单地说，y 是 x 的函数。其中 x 称为自变量，y 称为因变量。与 x 值相对应的 y 值称为函数值。

4． 单值函数与多值函数

如果对于自变量的每一个确定值，按照某个对应规则，因变量都有唯一的值与之对应，则称此种函数为单值函数。如果自变量的每个确定值都有多个（一个以上）因变量值与之对应，就称这种函数为多值函数。如式（1—1）所示函数是单值函数，

而 $$y = \pm\sqrt{x}$$

是多值函数，这是由于式中的每一个自变量 x 值对应着两个因变量 y 的值。

5． 定义域与值域

对于给定的 x 和 y 间的函数关系而言，自变量的取值范围称为该函数的定义域。因变量的取值范围称为该函数的值域。应用集合概念，通常把函数值的集合称为函数的值域，自变量取值的集合称为函数的定义域。

【例 1】 考察圆面积 A 与圆半径 r 之间的关系

$$A = \pi r^2$$

解 式中 2 与 π 是常量，A 与 r 都是变量，r 是自变量，A 是因变量，A 是 r 的函数。

在此问题中，函数的定义域与值域均为正实数。

二、物理学中函数的特点

在式（1—1）中的两个变量 x 和 y，仅仅是个数学符号，没有物理意义，而式中的变量 A 与 r 却都有物理意义，而且其大小是可以测量的。在物理学中，我们所涉及的变量总是具有物理意义，而且它们都是可以测量的。例如物理中常用时间 t，坐标 x、y、z，温度 T 等作为变量。请读者注意，使用数学公式求解物理问题时，记住所用符号的物理意义，对于解题大有裨益。

【例 2】 分析作匀速直线运动的物体走过的路程 s 与经历的时间 t 之间的函数关系

$$s = vt$$

解 单从数学上看，v 是常量，s 与 t 是变量，t 是自变量，s 是因变量。s 是 t 的单值函数。函数的定义域是一切实数；值域也是一切实数。

但这是一个物理问题，仅作上述理解是不够的，就本题而言，应增加如下内容：v 是物体运动的速度，t 是物体运动所经历的时间，s 是对应经历时间 t 所走过的路程，而且既然是路程，它一定只能取正数或零，不能取负数，因为所谓路程是物体运动过程中所经过路径的长短。函数式给出了物体所走过的路程随时间的变化而变化的规律。

在物理学中，常遇到类似函数式所给出的某个物理量是时间的函数关系式，建议读者在学习物理学时，养成上述分析习惯。

§1—2 函数符号

本节介绍表示函数与函数关系的符号

一、一般情况

两个变量 x 与 y 之间的函数关系，通常用函数符号 $f(x)$ 表示为

$$y=f(x) \tag{1—2}$$

该式只说明了 y 是 x 的函数，其中 x 为自变量，但并没有具体指明具有什么样的函数关系。若已知具体的函数关系，例如 $y=x^2$，则可将上式记作

$$y=f(x)=x^2 \tag{1—3}$$

式（1—3）表明，y 是 x 的函数 $f(x)$，而且 $f(x)$ 的具体表达式是 x^2。

二、复合函数情况

在物理学中常遇到如下函数关系，y 是 x 的函数，而 x 又是 t 的函数，即

$$y=f(x) \tag{1—4}$$

$$x=g(t) \tag{1—5}$$

当 $g(t)$ 在 f 的定义域内，此时上述两式可写为

$$y=f[g(t)] \tag{1—6}$$

这就表示，y 是 t 的函数。这时称 $f[g(t)]$ 是 $y=f(x)$ 与 $x=g(t)$ 的复合函数，其中 x 称中间变量。

【例 3】 将两函数

$$y=f(\theta)=\sin\theta \qquad ①$$

$$\theta = g(t) = \omega t$$ ②

写成（1—6）形式的复合函数。

解 将第二式代入第一式消去 θ，可得

$$y = \sin \omega t$$

三、物理学中函数符号的习惯用法

在数学课本中，函数与函数关系符号常用不同的字母表示，如 $y = f(x)$，但物理学中，函数与函数符号却往往用同一字母表示。例如

$$y = y(t) \tag{1—7}$$

$$x = x(t) \tag{1—8}$$

上两式说明，y 是 t 的某种函数，而 x 则是 t 的另一种函数，两种函数的自变量都是 t。表征物理规律的函数及其自变量都有确定的物理意义。采用同一符号简洁地表示函数，更有利于识别数学表达式中各项的物理意义。

§1—3 多元函数

前面已经介绍了因变量 y 依赖于单个自变量 x 的函数 $y = f(x)$的有关问题，现考虑多个自变量的函数。

设有两个彼此独立的自变量 x 和 y，如果对于 x 和 y 的各组确定值，依据某个对应规则，w 都有相应值与之对应，那么就称 w 是这两个独立变量 x 和 y 的函数，用符号记作

$$w = g(x, y) \tag{1—9}$$

请注意，所谓自变量 x 与 y 彼此独立，是指 x 与 y 彼

此间无任何关系。

独立变量数目为二个的函数称为二元函数，独立变量数为三个的函数称为三元函数，依此类推。下面给出三个物理学中的二元函数例子，用以指出自变量和因变量一种可能的物理意义及其函数关系所表明的物理规律。

自变量	因变量	函数关系	
x, y	r	$r = r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$	(1—10)
r, h	V	$V = V(r, h) = \pi r^2 h$	(1—11)
x, t	y	$y = y(x, t) = A\sin(kx - \omega t)$	(1—12)

式（1—10）指出，作平面运动的质点离原点的距离 r，它依赖于质点的横向位移 x 与纵向位移 y。式（1—11）指出，正圆柱体的体积 V 决定于底面半径 r 与高 h。式（1—12）给出了某平面简谐波在传播过程中，质点的位移依赖于它的平衡位置 x 与时刻 t，其中 k、A、ω 均为常数。

§1—4 某点的函数值

一、某点处的函数值

自变量的取值范围（即函数的定义域）是由具体的函数表达式及物理条件等因素决定的。人们常用“点”这个词来描述自变量的特殊值，并将以此点对应的因变量值称为该点的函数值。例如，某函数

$$y = f(x) = x^2$$

当 $x = 2$ 时，$y = 4$，于是可说，函数 $y = x^2$ 在点 $x = 2$ 处的函数值为 4。

二、某点处函数值的表示法

1． 一元函数值表示法

为了区分自变量与自变量值；区分函数与函数值，我们在自变量符号上加注一个下标，如 x_1 表示自变量 x 取某个特殊值；将函数符号 $f(x)$ 中的自变量 x 加上一个下标，如 $f(x_1)$，它表示自变量在点 x_1 处的函数值，记作 $y_1=f(x_1)$。

【例 4】 设函数 $y=f(x)=x^2$，求 $x=2$ 时的函数值。

解 当 $x=x_1=2$ 时，函数值

$$f(x_1)=f(2)=2^2=4$$

2． 多元函数值表示法

对于多元函数，上述符号规定仍然成立，如 x、y 的二元函数 w，$w=f(x, y)$，

当 $x=x_1$，$y=y_1$ 时，该函数值可写成

$$f(x_1, y_1)$$

【例 5】 计算 $x=0$，$y=2$ 时，$w=f(x, y)=x^2+y^2$ 的函数值。

解 将 $x=0$，$y=2$ 代入函数 w 的表达式，得函数值

$$f(x_1, y_1)=f(0, 2)=0^2+2^2=4$$

对于多元函数，有时需要考虑其中一些自变量取某个特殊值，而其他自变量仍在变化的情况。例如，函数 $f(x, y)$，当我们要研究 $x=2$ 的条件下，函数与自变量 y 之间的关系，则可用符号

$$f(x_1, y)=f(2, y)$$

表示。但应注意，$f(2, y)$ 仍然是个函数，因为其中包含

有自变量 y，而 $f(x_1, y_1)$ 则是个数值，不是函数，其中没有自变量。

§1—5　矢量与矢量函数

在物理学中，依据是否有方向，物理量可划分为矢量与标量。所谓矢量，按传统的说法，是指既有大小又有方向的量；而标量则是仅有大小的量。矢量又分为常矢量与变矢量两种，常矢量即其大小与方向保持不变的矢量；变矢量是其大小或方向这两个要素之一发生变化，或两者同时变化的矢量。有关矢量问题内容十分丰富，在此不作逐一介绍，仅说明本书后续各章要用到的有关问题。

一、矢量的一般表示法

1. 字母表示

通常用黑体字或带箭头的字母表示。如

电场强度	$\mathbf{E}$	或	$\vec{E}$
力	$\mathbf{F}$		$\vec{F}$
位置矢量	$\mathbf{r}$		$\vec{r}$
动量	$\mathbf{p}=m\mathbf{v}$		$\vec{p}=m\vec{v}$
加速度	$\mathbf{a}$		$\vec{a}$
磁感应强度	$\mathbf{B}$		$\vec{B}$

2. 图示法

矢量既然是有大小有方向的量，所以在几何上就可以用空间的一个有向线段表示。这个有向线段的长度以一定比例代表矢量的大小，箭头的方向表示矢量的方向。图 1—1 表

示一个从 O（叫做起点）到 P（叫做终点）的矢量 **A**，该矢量又可记作 $\overrightarrow{OP}$。矢量的大小又叫矢量的模或长度，模是数量，记为 $|\vec{A}|$、$|\mathbf{A}|$ 或 $|\overrightarrow{OP}|$。

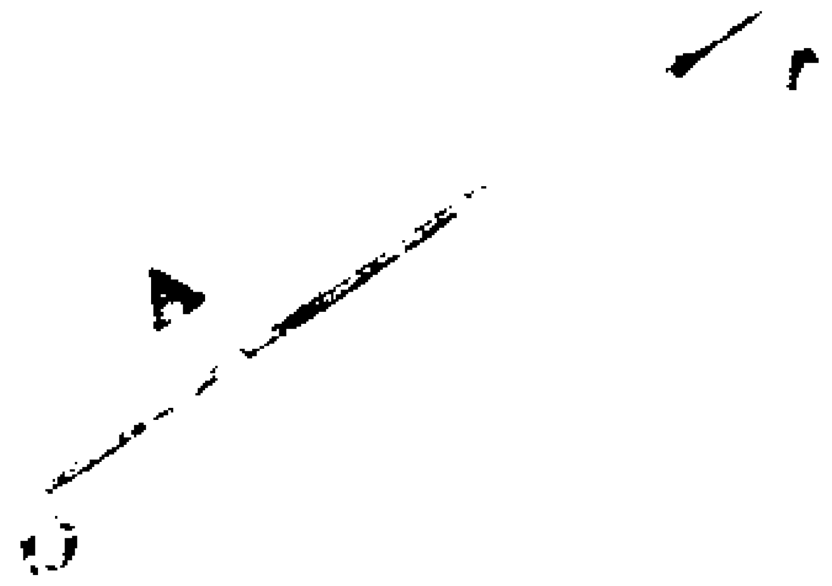


图 1—1

二、矢量的加减法

矢量和标量一样可以进行加、减、乘等运算，但由于矢量本身的属性：大小与方向同时兼备，因而运算起来远比标量计算复杂得多。两个矢量相加，叫做矢量的合成，合成后的矢量叫做合矢量或矢量和，矢量的加法遵循平行四边形法则。从力学实验我们知道，如果有两个力 $\mathbf{F}_1$、$\mathbf{F}_2$ 作用在某物体的同一点上，那么合力 **F** 的方向是以 $\mathbf{F}_1$，$\mathbf{F}_2$ 为两边的平行四边形的对角线方向，大小为对角线的长（见图 1—2），合力 **F** 记作 $\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2$。对于物体运动速度实验也有同样的结果，所以一般就用此方法来规定两个矢量的和，这个法则叫做求矢量和的平行四边形法则。如果两矢量 **A**、**B** 的起点不在同一点，可以将其中一个矢量平行移动，使之与另一矢量起点重合，再用平行四边形法则求和（图 1—3 a、b）。求两矢量和还有另一种方法，即把矢量 **B** 平行移动，使得 **B** 的起点与 **A** 的终点重合，那么这时合矢量就是从 **A** 的起点 P 到 **B** 的终点 R 的矢量 $\overrightarrow{PR}$（图 1—3c）。此法则叫做求矢量和的三角形法则。总

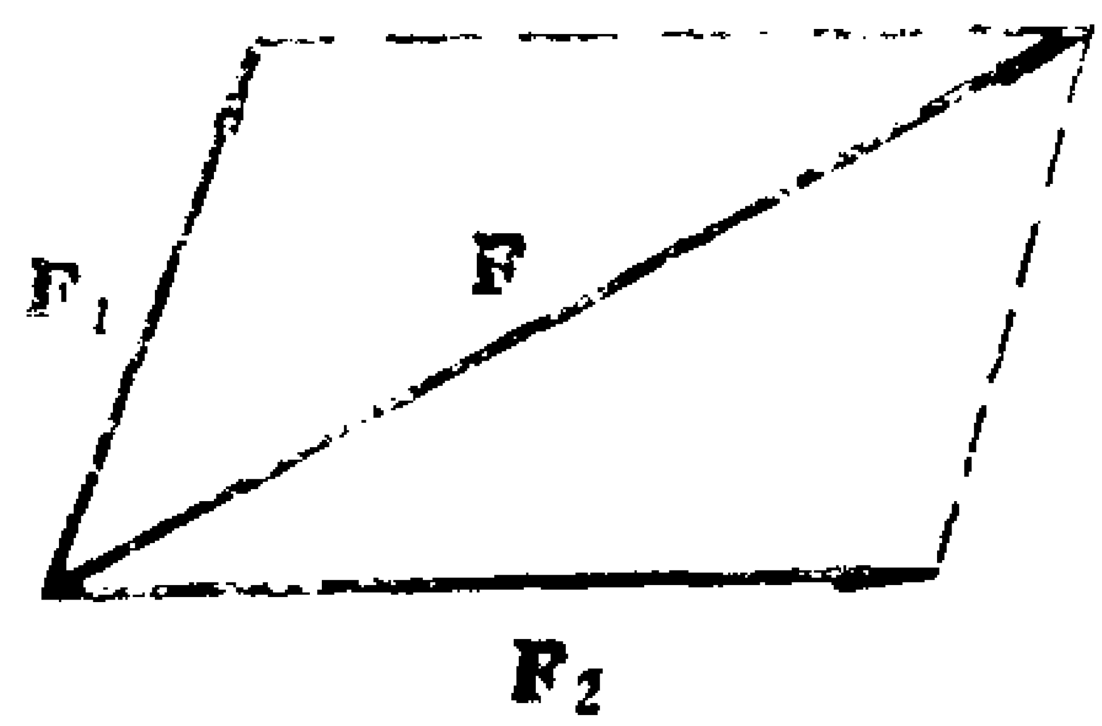


图 1—2

之我们可以把两个矢量和写成

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C} \tag{1—13}$$

矢量相加与次序无关，即 $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ 。

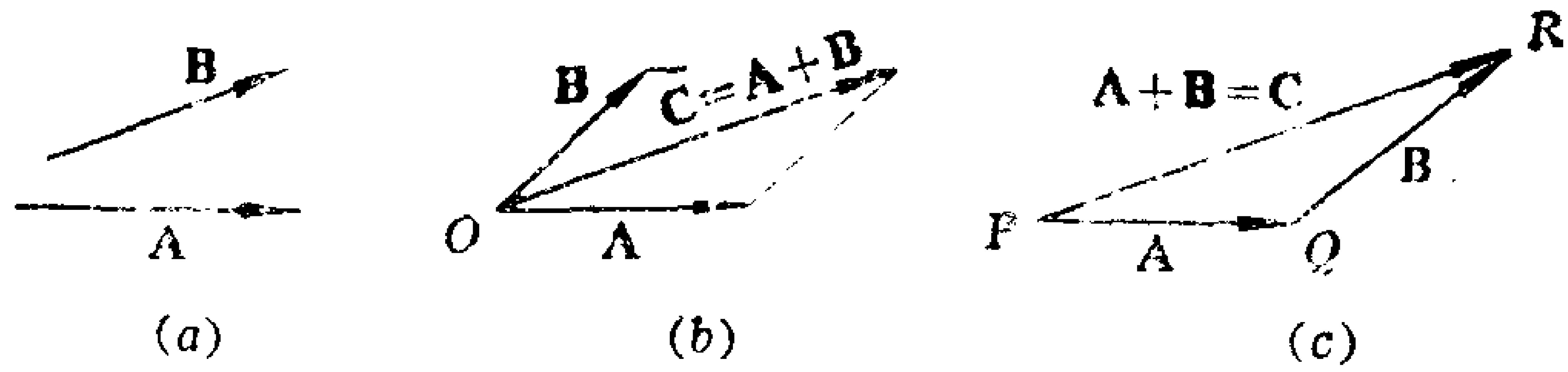


图 1—3

如果一个矢量 $\mathbf{b}$ 其大小与矢量 $\mathbf{a}$ 的大小相等，而方向与 $\mathbf{a}$ 相反，那么矢量 $\mathbf{b}$ 就叫做矢量 $\mathbf{a}$ 的负矢量，记作

$$-\mathbf{a}=\mathbf{b} \tag{1—14}$$

两个矢量相减所得之差叫做矢 量 差。矢量 $\mathbf{A}$ 减去矢量 $\mathbf{B}$ 就等于矢量 $\mathbf{A}$ 加上矢量 $\mathbf{B}$ 的负矢量 $-\mathbf{B}$，即

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B}) \tag{1—15}$$

若 $\qquad \mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}$

则 $\qquad \mathbf{A}=\mathbf{C}-\mathbf{B}$ 或 $\mathbf{B}=\mathbf{C}-\mathbf{A}$

如图 1—4 所示。

图 1—4

三、矢量的正交分解与合成

两个或两个以上的矢量可以合成为一个矢量，相反，一个矢量也可以分解为两个或两个以上的分矢量。一个矢量分解为两个分矢量的问题，就是已知平行四边形的对角线求两

个邻边，显然有无限多组解答，但如果先限定了两个分矢量的方向，则解答是唯一的。物理学中常把一个已知矢量（如力、速度、电场强度等）沿直角坐标轴分解，在图 1—5 中可以看出

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_x+\mathbf{A}_y \qquad (1—16)$$

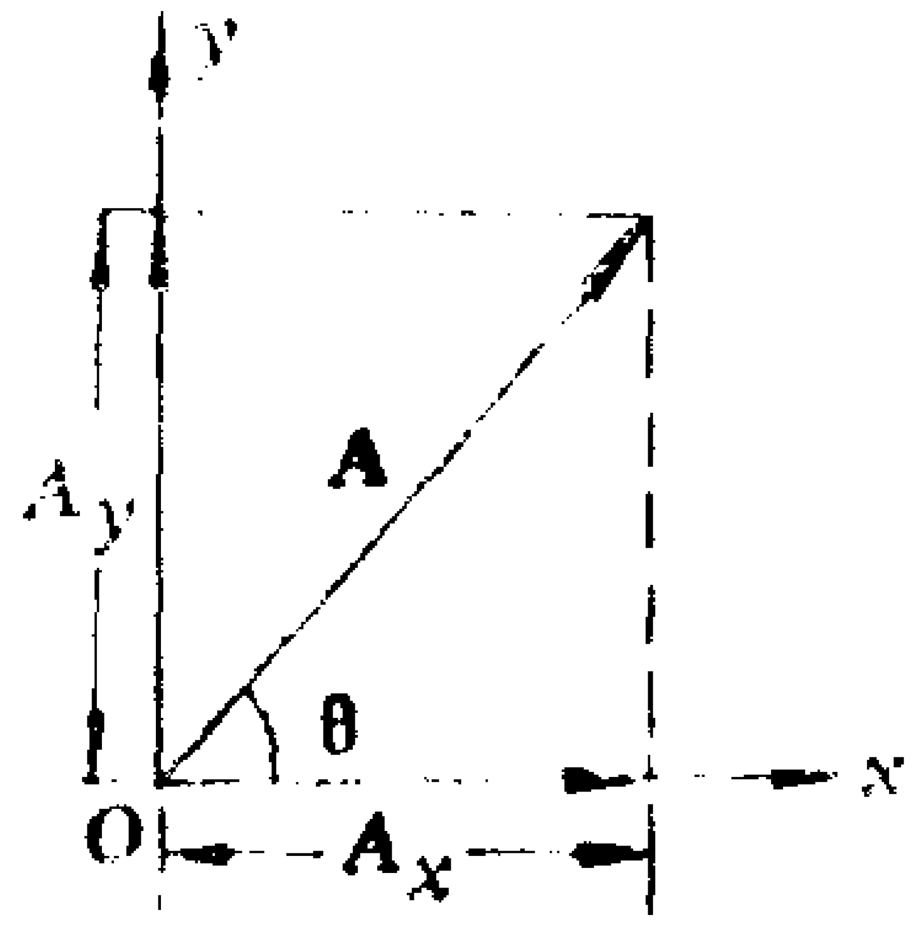


图 1—5

$\mathbf{A}_x$、$\mathbf{A}_y$ 叫做矢量 $\mathbf{A}$ 在 x、y 轴上的分矢量。如果用 $\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$ 分别代表沿 x、y 轴正向的单位矢量，则有

$$\mathbf{A}_x=A_x\mathbf{i} \qquad \mathbf{A}_y=A_y\mathbf{j}$$

式中，A_x、A_y 分别是矢量 $\mathbf{A}$ 在 x、y 轴上的投影，它们是标量，于是式（1—16）可写成

$$\mathbf{A}=A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j} \qquad (1—17)$$

矢量 $\mathbf{A}$ 在坐标轴上的投影 A_x、A_y 又叫矢量 $\mathbf{A}$ 的坐标。在物理学中又将矢量的坐标称为矢量的分量，这是因为，任一矢量分解在给定方向的各轴上分矢量只需用带有正号或负号的数值表示即可。当已知一个矢量在 x、y 轴上的两个分量 A_x 和 A_y 时，就能唯一地确定这个矢量的大小及方向。由图 1—5 得

$$\left.\begin{aligned}A_x&=|\mathbf{A}|\cos\theta\\A_y&=|\mathbf{A}|\sin\theta\end{aligned}\right\} \qquad (1—18)$$

矢量 $\mathbf{A}$ 的模与分量 A_x、A_y 之间关系为

$$\left.\begin{aligned}|\mathbf{A}|&=\sqrt{A_x^2+A_y^2}\\\theta&=\operatorname{arc\,tg}\frac{A_y}{A_x}\end{aligned}\right\} \qquad (1—19)$$

其中，θ 是矢量 $\mathbf{A}$ 与 x 轴间的夹角。