统一的现代数学

第二册第一分册

美国中学数学课程改革研究组编

人民教育出版社

统一的现代数学

第二册第一分册

美国中学数学课程改革研究组编

王申怀 译
王阿雄
吴望名 校

人民教育出版社

内 容 提 要

《统一的现代数学》是美国中学数学课程改革研究组编的一套中学数学现代化课本．全书共六册十二分册．内容除有一定的初等数学外，还包括集论、数理逻辑、近世代数、微积分、概率论、程序设计、线性规划等基本知识，并用现代数学的结构思想作了统一处理．

本书系内部参考资料，供研究外国中学数学教材用．这套课本对我们了解国外中学数学现代化的动态，研究用现代数学观点处理中学数学教材有一定参考价值．但对这套课本内容中渗透的资产阶级思想意识，应当注意分析批判．

本分册是按该书第二册第一分册1972年版译出的，包括数学语言和证明，群，公理化仿射几何引论，域，实数系，坐标几何等六章．

统一的现代数学

第二册第一分册

美国中学数学课程改革研究组编

王申怀　译

王阿雄
吴望名　校

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

1978年1月第1版　1979年2月第1次印刷

书号13012·0162　定价0.49元

目　录

第一章 数学语言和证明

1.1 引言

是这样吗？必须证明！

在你的经历中有多少次你遇到这样的情况：当你作出一个有争议的语句时，那些持怀疑态度的听众向你质问，为了使他们确信无疑，你必须证明这个语句的正确性. 譬如说，当你告诉你的一些朋友说：你认为威廉·梅斯是比米基·曼特尔更好的棒球运动员；当你告诉化学老师说：氦气比空气轻；当你对父母说：别的孩子们在外面都呆得很晚呀；当你对数学老师说：两个偶数相加，其和还是偶数；等等. 为了使人家相信，在每一种情况下你都必须对你的语句加以证明.

你应当提出怎样的论据取决于讨论问题的范围. 比较一下各次棒球比赛的记录册，看看威廉·梅斯和米基·曼特尔谁的平均得分多，就可以解决哪一人是更好的运动员的争论；用氦气充入一个气球后看看气球是否飘起，做这个简单实验就足以使化学老师认为你说得有理；还有，如果你最好的朋友证实你说的确是事实，也许会使你的父母允许周末你晚一些回家.

你的关于偶数之和的推测应按照数学上所采用的推理规则来证明. 你已看到过一些数学语句的证明. 事实上，“偶数加偶数其和是偶数”这个语句可以论证如下：

1. 如果 a 和 b 是偶数，那么 $a=2m$ 和 $b=2n$,

2. 于是 $a+b=2m+2n$,

3. 即 $a+b=2(m+n)$,

4. 或者 $a+b=2k$, 这里 $k=m+n$,

5. 这表示 $a+b$ 是偶数.

是什么保证上述论证成为一个数学上能接受的证明？什么法则支配着数学中的证明？因为证明将成为你的数学工作中越来越重要的部分，这一章将解释和举例说明数学证明的基本法则.

1.2 数学语句

为了明白数学证明，我们必须首先了解在证明中所用语言的意思. 在日常英语中我们经常允许一词或一句在不同的场合下有不同的意思. 例如，假设我们听到一个天晴并且温暖的天气预报，在这个句子中“温暖”是什么意思？纽约的七月“温暖”意味着80°F.，在一月我们认为45°F. 是温暖的. 在迈阿密*，里约热内卢*，或卡萨布兰卡*会有完全不同的标准. 一个简单的英语句子的意思经常以各种方式依赖于上下文.

数学是科学的基本工具，所以数学语言必须精确. 我们不能允许自己有日常英语用法中的那种自由. 例如，数学语句:

一个自然数是质数，当且仅当它恰有两个不同的因数.

这就给出了确定一自然数是否是质数的明确界限. 13 有两个不同因数 13 和 1，所以是质数. 12 有 6 个因数——1，2，3，4，6，12——所以不是质数. 这种定义质数的数学语句足够精确地去确定 12，13 或其它自然数是否是质数.

由刚才给出的例子得出的结论可以写为

12 不是质数.

用在数学上的这种类型的句子叫做语句. 另外一个数学语句是

---

* 迈阿密，美国佛罗里达州的城市. 里约热内卢，巴西首都. 卡萨布兰卡，摩洛哥的港口. ——译者

6 是质数.

当然这是不对的. 因为 6 有 4 个不同的因数 1,2,3 和 6.

在数学上,一个语句是一个句子,它或是真的(正确的)或是假的(错误的),两者不能同存.

对假的语句感兴趣好像是很奇怪的. 但我们经常不能立即知道语句的真假. 下面的语句是真的吗?

15283 是质数.

数学家的任务之一是确定给出的语句是真或是假. 这样他必须允许假的语句有存在的可能性. 一个语句只能是真假两者之一, 不能两者都是,也不能模棱两可.

例 1 "$2<5.$"这是一个语句,很清楚是真的.

例 2 "$5<2.$"这是假的,但仍是一个语句.

例 3 "x 是小于$\frac{2}{3}$的有理数."对 x 用$\frac{1}{3}$试一下:因为$\frac{1}{3}$是有理数且小于$\frac{2}{3}$,所以如果 x 等于$\frac{1}{3}$,这句子是真的. 现在用$\frac{3}{4}$试一下,因为$\frac{3}{4}$是有理数且大于$\frac{2}{3}$,所以如果 x 等于$\frac{3}{4}$,这句子是假的. 由于句子本身并未告诉我们 x 的值,因此当句子如此写出时,它既非真亦非假,这种类型的句子叫做开句子.

例 4 "特伦顿是新泽西州的首府."虽然这不是一个数学语句,但它是一个语句且是真的.

例 5 "过马路!"这是一个普通的命令句, 但不是语句. 因为我们不能对它说出真假.

在这章中我们经常要提到同一语句好几次. 为了方便起见, 我们常常用字母 P, Q, R 等等来表示语句. 在提到它们时, 以字母代表每个语句而不写出其整个语句.

例如,我们写

S: "15735 能被 5 整除."

这样，在以后的讨论中，我们就不再写"15735 能被 5 整除"，而简单地写作 S. 注意：为了避免混淆，要清楚说明某字母所表示的是哪一个语句，并且在同一问题讨论中决不用同一字母表示一个以上的语句.

现在考虑语句 P: "1271是质数."虽然你知道它或是真或是假，但也许你一下子不能说出 P 是真还是假. 如果 P 是假，那么语句 Q: "1271 不是质数"将是真. 如果 P 是真，那么 Q 就是假. 这样 P 和 Q 有相反的意义，即若 P 真则 Q 假或若 P 假则 Q 真. 给出任何一个语句 R，我们总能组成一个新的相反的语句，我们将称这个新语句为 R 的否定. 我们不用新字母来表示否定语句，而是把它称为"非 R". 语句和它的否定语句的关系可用表 1 来总括，称为真值表.

表 1

R	非 R
真	假
假	真

例 6 假设 S: "$2+3=4$"(当然是假).
那么非 S: "$2+3\neq4$"(真).

例 7 假设 T: "4371 被 9 除尽"(假).
那么非 T: "4371 不能被 9 除尽"(真).

例 8 如果非 T: "4371不能被 9 除尽". 那么非(非T): "4371 不是不能被 9 除尽"，或"4371 能被 9 除尽". 这样，非(非 T)和 T 是等同的.

1.3 练　习

在 1—11 题中确定给出的句子是否是语句. 如果是语句，说出它的真

假. 如果不是语句,给出理由.

1. 15283 是质数.

2. $\frac{7}{13}\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{8}+\frac{2}{5}\right)$是大于$\frac{1}{2}$的有理数。

3. 关门.

4. x 是小于 9 的整数.

5. $\frac{23}{30}+\frac{2}{7}+\frac{1}{6}$ 不大于 1.

6. 243 不是质数.

7. 243 不是质数是假的.

8. 243 不是质数是假的,这是真的.

9. 243 是质数.

10. 243 不是质数是假的,这是假的.

11. 15283 是质数,这不是真的.

在 12—18 题中找出每一个语句的否定语句且确定共(原来的语句和它的否定)真假.

12. 721 是质数.

13. $71\times27=1917$.

14. $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}<\frac{3}{5}$.

15. 71 不小于 38+35 是真,这是假的.

16. T:"1001 被 13 除尽."

17. 非 T.(参看第 16 题)

18. 非(非 T).(参看第 16 题)

19. 如果 A 是"在 Z_9* 中 $7\times3=3$",写出一个语句来表示

(a) 非 A;

(b) 非(非 A);

(c) 非(非(非 A)).

20. 如果 R 是"29 不是质数",写出一个语句来表示.

(a) 非 R;

(b) 非(非 R);

---

* Z_9 表示有限数系{0,1,2,3,4,5,6,7,8}. ——译者

(c) 非(非(非 R)).

21. 填空：当 S 是语句时

(a) 非(非 S)等同于________

(b) 非(非(非 S))等同于________

22. 假设你有一个语句"非(非(非(…Q)…)"，其中"非"出现 37 次，这和什么语句等同？如果"非"出现 n 次，你能说出一般规律吗？

1.4 联结词：与*、或

复合数学句子

5 是质数与 5 是 3 的倍数，

是由两个简单语句用"与"联结组成的．这个复合句是语句吗？它是真还是假？

很清楚，语句"5 是质数"是真，"5 是 3 的倍数"是假．从直观上看，要使复合句是真，必须两部分都是真，这样理解看来是合理的．这样的话，上面给出的句子是假(但它是一个语句)．我们约定，要使用"与"来联结的整个句子是真，被联结的两部分必须都是真．在这里，数学上的约定和直观是一致的．如果 P 和 Q 两句都是真，"P 与 Q"形式的语句是真，两句之一为假或两句均为假，整个语句为假．

例 1 复合语句"$5<3$ 与 $2>7$"是假，因为"$5<3$"，"$2>7$"均为假．

例 2 复合语句 S："$2+3=5$ 与 $4\neq7$"是真，因为"$2+3=5$"是真，且"$4\neq7$"是真．S 的两部分是真，因此 S 是真．

例 3 S："x 是大于 5 的整数与 x 是小于 8 的整数．"当然，这不是一个语句——这是开句．如果 x 用 2 代替，这语句的第二部分"2 是小于 8 的整数．"是真，但第一部分是假，所以复合语句

* "与"又可称为"并且"，"和"，但不能与加法求和的"和"字相混．——译者

为假. 强调一下：当变量 x 用 2 来代替时，复合开句成为一个假语句. 用不同值代替 x 可以得到真假结果不同的语句.

在普通语言中，联结两部分组成复合句的另一个词是“或”. 这个联结词同样可用在数学中构成复合语句. 但是，我们要小心地定义“或”的用法(正如我们已经作出“与”的用法那样)，从直观开始，我们将遇到困难. 习惯上，“或”能表示完全不同的事情. 当我们说，“天下雨或天晴，”我们意思是两者之一发生了，但两者不会同时发生. 但当我们说，“玛丽亚总是唱歌或跳舞，”我们并不排除她同时唱歌跳舞的可能性.

因为数学要求定义是独立于上下文的. 我们必须给以决定性的论断，避免(在数学句子中)给以“或”的另一种解释的可能. 在数学上我们将说，当 P 和 Q 是语句时，“P 或 Q”是一个语句且当 P 是真或 Q 是真或两者都是真时，整个语句才是真.

例 4 复合句“$2=3$ 或 $4+1=5$”是一个语句. 这个语句的第一部分是假，但第二部分是真，因此复合语句是真.

例 5 假设 P 是“6 是质数”和 Q 是“线反射保持方向.”P 是假，Q 也是假，因此复合语句“P 或 Q”是假.

例 6 假设 S 是“$\frac{2}{3}$是有理数”，T 是“$-4<3$”. S 和 T 两者都是真，按定义，复合语句“S 或 T”同样是真.

例 7 S:“x 是大于 6 的整数或 x 是小于 3 的整数”这是一个复合开句. 如果 x 用 2 代替，S 的第一部分是假，但第二部分是真. 因为这是由“或”组成的复合语句，所以，按定义，x 由 2 代替所得的语句是真. 类似地，x 用 7 代替，第一部分为真，第二部分为假，这样 7 使整个语句为真. 如果 x 用 4 代替，则两部分均为假，这样整个句子为假. 为了得到使句子是真语句的所有 x 的值(即对于 x 的解集或真值集)，我们仅需取所有使第一部分为真的和余下的所

有使第二部分为真的值，这样得出除去3,4,5和6的整数集合.

已知P和Q是语句，如果P和Q两者是真复合语句"P与Q"是真. 如果P或Q之一是真或两者皆真，复合语句"P或Q"是真. 这些约定综合成表2.（回忆一下这样的表称为真值表.）

表 2

P	Q	P与Q	P或Q
真	真	真	真
真	假	假	真
假	真	假	真
假	假	假	假

进一步检查表2，在"与""或"以及否定之间将揭露出一个有趣且有用的关系. 当P是假（"非P"是真）或Q是假（"非Q"是真）或者两者均假，语句"P与Q"是假. 但说"P与Q"是假和说"非P或非Q"是真是等同的.

另一方面，当P是假（"非P"是真）和Q是假（"非Q"是真），语句"P或Q"是假. 但说"P或Q"是假和说"非P与非Q"是真是等同的. 总之，

当 "非P或非Q"是真，那么"非(P与Q)"是真.

和

当 "非P与非Q"是真，那么"非(P或Q)"是真.

1.5 练　习

在1—10题中确定给出的复合语句是真还是假.

1. $3\neq7$ 或 $5<4$.
2. $3\neq7$ 与 $5<4$.
3. 23是质数并且能被5除尽.
4. 23是质数或被5除尽.
5. "U或V". 这里U是"$\frac{11}{12}<\frac{10}{13}$"和$V$是"$\frac{13}{16}>\frac{15}{18}$".

6. “U 与 V”. (参看第 5 题)

7. “A 或 B”. 这里 A 是“直线反射 R 不保持平行性”和 B 是“R 保持方向”.

8. “A 与 B”. (参看第 7 题)

9. “P 或 Q”. 这里 P 是“在伸长 $D_{\frac{2}{3}}$* 下 6 的像是 4”和 Q 是“在 D_6* 下 $\frac{1}{2}$ 的像是 3”.

10. “P 与 Q”. (参看第 9 题)

11. 假设语句 S 和 T 组成“S 或 T”是假. 对复合语句“S 与 T”可下什么结论? 如果“S 或 T”是真, 对“S 与 T”能下什么结论?

12. 假设语句 G 和 H 组成“G 与 H”是真, 对“G 或 H”可下什么结论? 如果“G 与 H”是假, 对“G 或 H”能下什么结论?

13. 完成下列真值表.

P	Q	非 P	非 Q	P 或 Q	(非 P)与(非 Q)
真	真	假	假	真	假
真	假				
假	真				
假	假				

在表的最后两行之间你能注意到什么关系? 对于“非 P 与非 Q”以及“P 或 Q”之间的关系, 你能下什么结论?

14. 完成下列真值表.

P	Q	非 P	非 Q	P 与 Q	(非 P)或(非 Q)
真	真	假	假	真	假
真	假				
假	真				
假	假				

比较表中的最后两行, 对于“非 P 或非 Q”以及“P 与 Q”之间的关系, 你能说些什么?

15. 找出下列开句的解集.

P:“x 是大于 5 的整数.”

---

* $D_{\frac{2}{3}}$ 表示映射 $x \longrightarrow \frac{2}{3}x$; D_6 表示映射 $x \longrightarrow 6x$. ——译者

Q:“x是小于9的整数.”

再寻找开句“P与Q”的解集.“P与Q”的解集与P的解集和Q的解集之间你注意到有什么关系?

16. 假设开句$S(x)$的解集是A和开句$T(x)$的解集是B.用集A和B来表示开句“$S(x)$与$T(x)$”的解集是什么?

17. 找出下列开句的解集.

V:“y是3和7之间的整数.”

W:“y是5和10之间的整数.”

寻找开句“V或W”的解集.“V或W”的解集与V的解集和W的解集之间你注意到有什么关系?

18. 开句$M(x)$的解集是C和开句$N(x)$的解集是D.用集C和D来表示开句“$M(x)$或$N(x)$”的解集是什么?

1.6 条件和双条件语句

近来一家报纸的科学编辑作了下述预言:“如果美国在1976年派一个宇宙航行员到火星去，那么在1980年将派一个到金星去.”现在没有人能说这个预言是真还是假.到1980年后我们才知道.请问,在什么情形下预言是真?什么情形下是假?

首先假设美国在1976年派宇宙航行员到火星去,之后在1980年继续派一个到金星去,那么这预言将被认为是真的.另一方面,假设在1976年派一个宇宙航行员去火星，而1980年未派人去金星,在这情形下,预言被判断为假.

这两种情形是很清楚的,还有两种情形需要小心地思考一下.假设每种情形皆错，这样不仅在1980年未派人到金星去，而且在1976年也未派人去火星.这个科学编辑是错了吗?小心地思考.请记住他没有说在1976年宇宙航行员将到火星去或在1980年将去金星;他仅说如果在1976年派人去火星,那么在1980年将派人到金星去.这样，因为在1976年没有宇宙航行员去火星，我们不

能说科学编辑关于派人到金星去的预言是错的.

假设在 1976 年没有一个宇宙航行员到火星，在 1980 年有一个去金星. 这样的情形下预言也不错，我们不能说它是假.

考虑下面关于两个整数 a 和 b 的推测:

如果 a 和 b 是奇数，那么 $a+b$ 是偶数.

设想用大量的数值(即对 a 和 b 用数值作不同的替换)检查这个断言. 给你一个加法器，它能将任何两个整数相加并打印出结果. 对于每个具体的情形，你必须判定断言是真还是假. 为使此项工作更容易些，机器能自动地选择数值来作加法并在相加之前将它们打印出来. 但是它不是总选择奇数. (也许同一台机器被用来同时检查关于两个整数之和的另一些断言.)

机器首先选择的两个数值是 3 和 5. 这时断言是对的. 因为 3 和 5 的确是奇整数，则它们的和应为偶数. 由此可见，它是对的，机器打出了"8". 其次机器选择 4 和 7，得出和是"11". 我们知道 11 不是偶数. 在这情形时断言错了吗? 不，错误在于开始时机器没有选择两个奇数. 断言还是对的.

何时你能决定机器作出"断言"是错的? 这仅发生在机器找到两个奇数，它们的和不是偶数. 这样你必须找到 a 和 b 的两个数值，使"a 和 b 是奇数"是真，但"$a+b$ 是偶数"是假. 此外任何别的情形断言的确不假.

上面讨论的两个例子的共同点是什么? 两个都是具有形式

若 P，则 Q

的复合句. 在每种情况下当 P 是真和 Q 是真时，好像有理由认为复合句是真语句；当 P 是真和 Q 是假时，好像有理由认为复合句是假语句. 在 P 和 Q 都是假或 P 是假 Q 是真的情况下，复合句的真假是不明显的. 但在这些情况下没有理由说预言是假的. 因此，要区分每个数学句子"若 P 则 Q"是真还是假，数学上采取下面的约定:

当P和Q是语句时，除去P是真Q是假的情形外，"若P则Q"的语句为真.

"若P则Q"形式的语句称为条件语句. 语句P称为前提并且语句Q称为结论.

当前提是假或当前提和结论均为假时，条件语句为真，如果你对这一约定感到迷惑不解，只要重新阅读上面两个例子的讨论对你会有所邦助. 如果你仍有怀疑，那么记住有时在数学上需要做出并且接受某个不一定和直观明显一致的定义.（回忆复合语句"或"的情形）. 当你获得条件语句的经验后，这个定义将变得越来越可接受.

例 1 假定S是"$2+3=5$"和T是"$2=5-3$". 那么条件语句

若S，则T

是真，因为S和T均为真.

例 2 "若在Z_7中$3=-4$，则在Z_7中$-3=-4$."这里前提"在Z_7中$3=-4$"是真，但结论"在Z_7中$-3=-4$"是假，所以条件语句是假.

例 3 "若在W中$1+1=3$，则在W中$5+4=8$."这里前提和结论均假，由我们的定义条件语句为真.

例 4 "若在Z_5中$4+3=2$，则在Z_7中$5+4=1$."虽然条件语句的两部分好像无关，但是"在Z_5中$4+3=2$"的确为真，并且"在Z_7中$5+4=1$"是假，所以条件语句为假.

例 5 "若集$S=\{a, b, c\}$不是自己的子集，则S有5个元素."前提和结论均假(注意每个集都是自己的子集)，这样给出的条件语句为真！定义必须严格地遵循. 这个例子指出了条件语句为真并不意味着它的结论自然为真，仅当知道前提为真时才能得出结论是真.

象"与"、"或"以及"非"的情形一样，对于确定条件语句真假的